

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

Q
54
N23
ser.4
v.28
1961

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XXVIII. — (Anno C)

gennaio • dicembre 1961



NAPOLI

STABILIMENTO TIPOGRAFICO GUGLIELMO GENOVESE

Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 322-568

1961

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL' ACCADEMIA
DELLE
SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XXVIII. — (Anno C)

gennaio - dicembre 1961



NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO GUGLIELMO GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 322-568
1961

R E L A Z I O N E

SUI LAVORI COMPIUTI

DALL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

DURANTE L'ANNO 1960

letta nell'adunanza plenaria del dì 22 gennaio 1961

dal socio segretario GEREMIA D'ERASMO

Considerando brevemente, in questa consueta rassegna dell'attività annuale del nostro Sodalizio, quanto di più notevole si è verificato nel corso dell'anno 1960, è motivo di soddisfazione constatare come l'Accademia di Scienze fisiche e matematiche abbia continuato a svolgere, con non rallentata alacrità, il compito al quale attende da più di due secoli di sua vita gloriosa. Ne sono principale, ma non unica dimostrazione più che cinquanta lavori di scienze matematiche, fisiche, chimiche, biologiche e geomineralogiche, i quali hanno fornito la materia di un grosso volume del Rendiconto (il 27° della serie IV), ricco di oltre 600 pagine di stampa, con numerose figure intercalate e tavole fuori testo, o hanno trovato posto nel volume degli Atti (il 3° della serie III), completato e pubblicato nello scorso dicembre, dopo un lungo intervallo di anni.

Questa attività scientifica ed editoriale è stata facilitata, come negli anni precedenti, dall'assegno straordinario concesso dal Ministero della Pubblica Istruzione alla Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, e da uno speciale contributo, destinato al nostro Rendiconto dalla Presidenza del Consiglio dei Ministri sui fondi che l'Ente per la Cellulosa e la Carta riserva alle riviste di elevato valore culturale.

Iniziando, come sempre, la mia succinta rassegna dai contributi astronomici, ricorderò anzitutto che il socio Tito NICOLINI, esponendo in una nota (*Sull'approssimazione isoteramica ad un modello rarefatto di atmosfera lunare*) come un modello di atmosfera lunare, o comunque di una massa abbastanza piccola, sia frequentemente considerato di tipo isoteramico, ha osservato che conviene conservare la formulazione del modello per il campo uniforme di gravità, a causa della sua semplicità. La pressione e densità devono considerarsi nulle a distanza finita, e ciò può ottenersi formalmente da un semplice cambiamento di variabile, lasciando inalterata la forma isoteramica della espressione di p .

A ricerche di analisi matematica sono destinate parecchie note. Una di esse, dovuta al prof. Antonio ZITAROSA, espone *Alcune osservazioni su certi teoremi di compattezza e sul problema di Darboux*, apportando vari interessanti complementi ad una sua precedente memoria. — Un'altra, del dott. Paolo DE LUCIA, verte *Su un problema ai limiti con condizioni al contorno dipendenti dal parametro*. Si dimostra, in essa, l'esistenza di un sistema di autovalori reali e si studia inoltre la loro distribuzione. — Una terza, del prof. Emilio GAGLIARDO, tratta di *Una struttura unitaria in diverse famiglie di spazi funzionali. Teoremi di compattezza e di chiusura*. Questo autore, noto per le sue ricerche sulla teoria dell'interpolazione fra due diversi spazi di BANACH, annunzia alcuni nuovi risultati, i quali mettono in luce che questo tipo di ricerche può condurre a importanti criteri di compattezza e di chiusura, che estendono di molto vari teoremi già noti. — Altre due note, che spettano al prof. Giovanni AQUARO, riguardano, rispettivamente, alcune *Relazioni tra cardinalità di basi e di strutture uniformi sopra uno spazio topologico*, mettendo in rilievo una questione aperta a tale riguardo, e le *Proprietà locali e proprietà globali di uno spazio topologico*, indicando classi di spazi topologici, l'appartenenza locale alle quali implica l'appartenenza globale.

Nel campo della geometria, il nostro consocio Nicolò SPAMPINATO, estendendo le sue precedenti ricerche *Sul genere aritmetico di una superficie algebrica*, ci ha offerto altre due note, nelle quali si determina una terza coppia di caratteri proiettivi di una superficie algebrica dell' S_3 complesso, la cui differenza risulta divisibile per 48 (o, rispettivamente, per 108) ed il quoto dà l'invariante birazionale $p_a + 1$, con p_a genere aritmetico della superficie. — In un'altra nota dal titolo *Una osservazione sui gruppi finiti a fattoriali supersolubili*, il prof. Mario CURZIO caratterizza i gruppi finiti che non sono risolubili ed hanno i fattoriali supersolubili. Tali gruppi appaiono costruibili, conosciuti che siano alcuni sottogruppi dell'automorfo di un gruppo semplice (non abeliano) o d'un gruppo prodotto diretto di componenti semplici (non abeliane) fra loro isomorfe.

Nel settore della meccanica razionale è da segnalare una nota del dott. Luigi SALVADORI sopra *Criteri di instabilità per i moti merostatici di un sistema olonomo*. In essa l'autore, facendo sèguito ad un precedente lavoro in cui forniva un perfezionamento di un criterio di stabilità del ROUTH concernente i moti merostatici di un sistema olonomo, pone il problema della inversione del criterio stesso. Tale inversione egli riesce a stabilire per una particolare classe di sistemi, e precisamente per quelli i cui termini girostatici sono a coefficienti costanti. Nel caso generale, l'autore mostra che la suddetta inversione non è possibile, ma dà tuttavia un utile criterio di instabilità del tipo di quelli che il LIAPOUNOFF raggruppa nel suo secondo metodo.

Il campo della matematica applicata registra ancora quattro lavori,

che si riferiscono alla Scienza delle Costruzioni. Il primo di essi, dovuto all'ing. Renato SPARACIO, ha come titolo *Il calcolo a rottura degli impalcati da ponte* e prende in esame la verifica a rottura di strutture a graticcio, con particolare riferimento agli impalcati da ponte, giungendo alla determinazione della rigidezza minima da assegnare alle travi trasversali perchè queste possano esplicitare fino al collasso delle travi principali la loro funzione di collegamento. — Il secondo, spettante al prof. Tullio RENZULLI, studia *La linea elastica al di là del carico critico*, esaminando il problema della determinazione della deformata dell'asse di una trave, a sezione costante e appoggiata agli estremi, sollecitata da uno sforzo assiale costante. È necessario, per eliminare la indeterminatezza del problema, sostituire alla usuale equazione delle travi inflesse una più approssimata che tiene conto di termini usualmente trascurati. La equazione differenziale proposta, non lineare, viene risolta con il metodo di approssimazioni successive del PICARD. Si giunge ad una espressione della linea elastica che, con riferimento ad un caso concreto, viene confrontata con la curva esatta, ottenuta con lo ausilio di tavole degli integrali ellittici. — Il terzo lavoro, dell'ing. Giuliano AUGUSTI, espone i risultati dello studio *Sulla determinazione del grado di sicurezza nel calcolo a rottura*, estendendo il teorema fondamentale, che sostituisce ed unifica i due teoremi di GREENBERG e di FEINBERG, al caso generale del continuo tridimensionale. Egli discute quindi della ricerca del minimo coefficiente di una struttura, la cui condizione di carico è nota solo a meno di alcuni parametri; ed i risultati ottenuti vengono particolarizzati nel caso degli archi da ponte. — Il quarto lavoro, del dott. Antonio LA TEGOLA, espone un procedimento di calcolo per determinare le *Sollecitazioni limiti in solidi soggetti a stati di tensione piani*. Il procedimento, messo a punto dal lato analitico, è condotto anche per via grafica, agevolando notevolmente il calcolo numerico, ed è corredato da esempi numerici.

Passando ora al settore delle discipline fisiche e geofisiche, sia sperimentali che teoriche, è anzitutto da segnalare una nota dei dottori Flavio PORRECA e Luigi SALVADORI intitolata *Sulla focalizzazione spaziale del microtrone*, nella quale i due autori hanno particolareggiatamente studiato il problema del massimo aumento dell'intensità delle orbite elettroniche nella macchina acceleratrice denominata Microtrone. Mentre il PORRECA suggerisce un dispositivo sperimentale che permette di ottenere una notevole intensità sulla decima orbita, che è quella utilizzata, il SALVADORI, d'altro canto, analizzando più particolarmente la struttura del campo della cavità in cui sono emessi gli elettroni, riesce ad individuare in esso una causa stabilizzatrice per le orbite. — Il dott. Izumi YOKOYAMA, che sotto la direzione del prof. IMBÒ aveva eseguito, nella primavera del 1959, un rilievo geomagnetico del Gran cono vesuviano, ha esposto in una nota (*Anomalie magnetiche sul Vesuvio*) i risultati del suo studio, dimostrando come l'andamento rilevato risulti equivalente — analogamente a quanto si sa per altri vulcani — a

quello di un dipolo con asse coincidente con l'asse del vulcano. Il dipolo risulterebbe situato ad un'altezza di m 300 sul livello del mare ed avrebbe un momento magnetico di $3,1 \times 10^{11}$ emu. Ammettendo una magnetizzazione uniforme, si ottiene per l'intensità di magnetizzazione il valore di 7×10^{-13} emu/cc.: valore, che si accorda con le particolari caratteristiche relative alla natura ed alla struttura del nostro vulcano. — Un'altra nota, dovuta al prof. Pio VIRROZZI, riguarda *Considerazioni sull'applicazione di un particolare metodo di analisi periodale*. L'autore descrive un metodo di analisi periodale già applicato in alcuni suoi lavori dal prof. IMBÒ e consistente nella ricerca del periodo mediante la periodicità con cui si susseguono i valori medi relativi ad intervalli di tempo uguali e consecutivi, la cui ampiezza risulti una certa frazione dell'eventuale periodo esistente. Discute sugli inconvenienti del metodo e fornisce suggerimenti utili per la pratica applicazione di esso.

Assai numerosi sono stati i contributi relativi alle scienze chimiche, i quali assommano a più di una trentina e riguardano tanto la chimica organica, quanto la chimica fisica, la chimica teorica, la chimica farmaceutica, la biochimica, la chimica applicata ed industriale.

Sono da assegnare al primo gruppo i molteplici lavori del consocio Rodolfo Alessandro NICOLAUS e della sua scuola, del dott. Bruno NICOLAUS e del prof. Giorgio DANIELE. — Continuando la serie di ricerche sui pigmenti neri animali iniziate in anni precedenti, il nostro collega ha indagato, insieme con i dottori Mario PIATTELLI e Giuseppe NARNI, *Sulla struttura della sepiomelanina*, cioè sul pigmento nero contenuto nella borsa di *Sepia officinalis*, giungendo a risultati molto notevoli, i quali dimostrano come la sepiomelanina ottenuta ad un elevato stadio di purificazione ha una formula molto vicina a $[(C_8H_3O_2N)_5 \cdot COOH]_x$ e permettono di dare una interessante conferma della teoria della melanogenesi. — In un successivo lavoro, dovuto a R. A. NICOLAUS e M. PIATTELLI, dal titolo *Struttura e biogenesi delle melanine*, le ricerche vengono continuate ed estese, con la messa a punto di un diverso metodo di purificazione, che evita l'uso di temperature elevate e dimostra come durante queste operazioni di purificazione una parte dei carbossili del polimero possa andare perduta per effetto del riscaldamento. In base ai nuovi dati analitici ottenuti, la sepiomelanina deve considerarsi costituita da unità diidroindolchinoniche carbossilate con almeno un $-COOH$ ogni 2 unità. Dal punto di vista biologico ciò significa che lo schema della melanogenesi è solo parzialmente valido e che l'unità polimerizzante è probabilmente il dopacromo.

Anche le numerose note (XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX e XX) *Sugli acidi pirrolicarbonici* rappresentano un proseguimento ed una estensione di indagini della medesima scuola, dirette alla descrizione di nuovi metodi di ottenimento di particolari composti che hanno proprietà farmacologiche (Rachele SCARPATI e Vincenzo DOVINOLA, *Sintesi di alcuni acidi N-metil*

ed *N-etilpirrolici*; Mario PIATTELLI e Guido DI PRISCO, *Sintesi di acidi N-alchil-pirrolocarbonici*; Mario PIATTELLI e Luigi MINALE, *Sintesi di acidi N-aril-pirrolocarbonici*), oppure alla *Determinazione di nuovi Rf* (V. DOVINOLA) relativi ad acidi pirrolocarbonici determinati allo scopo di apportare un contributo allo studio delle strutture di sostanze naturali a scheletro pirrolico, oppure si riferiscono alla sintesi e alle proprietà di *Alcuni acidi pirrolici in relazione alla struttura della porfirina a* (Mario PIATTELLI), o trattano, infine, dell'*Azione dell'acqua ossigenata sull'acido 3-metil-4-pirrolocarbonico* (Rachele SCARPATI e Vincenzo DOVINOLA).

La serie di questi lavori sugli acidi pirrolocarbonici si chiude con uno studio del dott. Giuseppe DEL RE e della prof. Rachele SCARPATI, che espone alcune *Considerazioni teoriche sulla reattività* di questi composti, sulla base di calcoli condotti secondo il metodo MO-LCAO semi-empirico, giungendo alla conclusione che oltre all'energia di localizzazione è necessario anche tener conto delle cariche delle singole posizioni.

Il dott. Bruno J. R. NICOLAUS ha descritto, in un gruppo di sette note, la sintesi e le proprietà di *Nuovi coloranti a dispersione* appartenenti alla classe dei monoazoici (nota I: *Monoazoici gialli contenenti gruppi uretanici*; nota II: *Eteri di monoazoici gialli contenenti gruppi uretanici*; nota III: *Ammine aromatiche terziarie contenenti gruppi uretanici*) o stililici (nota IV: *Monoazoici rossi contenenti gruppi uretanici*; nota V: *Coloranti stililici contenenti gruppi uretanici*), come dei loro rispettivi intermedi (nota VI: *Nuovi composti stililici e relazioni intercorrenti tra costituzione chimica e proprietà ottiche*; nota VII: *Composti stililici basici e relazioni intercorrenti tra costituenti chimici e spettri di assorbimento*). Tutti questi composti sono caratterizzati dalla presenza di uno o più gruppi uretanici nella molecola. Il gruppo uretanico introdotto nei coloranti a dispersione ha la proprietà di aumentarne l'affinità per l'acetilcellulosa, le fibre poliestere e poliammidiche e di determinarne l'eccellente solidità al lavaggio, contribuendo inoltre ad aumentare la solidità alla luce. Molti di essi, ora descritti per la prima volta, sono pertanto dotati di ottime proprietà tintorie, mentre opportune sostituzioni di qualche gruppo hanno consentito la possibilità di ottenere colorazioni uniformi con grandi varietà di tinte e in ogni intensità desiderata.

Una *Misura della costante di equilibrio dello ione I_2 Cl^- con un metodo spettrofotometrico* è stata determinata dal prof. Giorgio DANIELE, che ha applicato tale metodo allo studio del sistema iodio-cloruro potassico-acqua alla temperatura di 25° C. Le curve di assorbimento di queste soluzioni presentano una nuova banda intensa con massimo a 247 m μ . Non potendo, per una parziale sovrapposizione di bande, determinare direttamente il coefficiente molare di estinzione del composto formato, l'autore ha utilizzato un metodo grafico che permette di individuare i coefficienti di reazione ed il calcolo della relativa costante di equilibrio. Ad elevate concentrazioni

è stata identificata un'altra banda con massimo a 227 m μ , e per spiegarla sono state formulate alcune ipotesi.

Ad un diverso settore spetta una nota di Chimica teorica *Sul calcolo delle curve di energia potenziale dei legami chimici mediante il metodo semi-empirico MO-LCAO*. Ne sono autori i dottori Giuseppe DEL RE e ALDO COVELLO, i quali hanno esaminato la possibilità di calcolare le curve che rappresentano l'energia potenziale di due atomi legati costruendo la relativa funzione sulla base di un metodo quantomeccanico approssimato.

Passando alle ricerche di Chimica farmaceutica, sono ora da citare tre lavori del nostro consocio prof. Mario COVELLO, il quale, in collaborazione col dott. Giuseppe CIAMPA, ha continuato le indagini di carattere fitochimico, condotte particolarmente sulle piante coltivate presso la Stazione Sperimentale per le Piante Officinali annessa all'Orto Botanico dell'Università di Napoli, riferendo, in una prima nota, su *La Salpichroa rhomboidea*, le cui radici hanno fornito almeno due componenti basici di natura alcaloidea, e trattando, in un secondo lavoro, della *Determinazione quantitativa degli alcaloidi nelle radici di Withania somnifera*, con la messa a punto di un sistema per la estrazione completa dei componenti alcaloidei e di un metodo potenziometrico per la loro determinazione quantitativa negli estratti: risultati di notevole interesse, anche per l'impiego della droga nel campo farmacologico. — La terza nota, degli stessi autori, è un *Contributo critico-sperimentale allo studio dei polimeri dell'acido salicilico*, nel quale sono state sintetizzate strutture lineari dell'acido salicilico aventi carattere polimerico, e se ne è discusso il meccanismo di formazione, dopo aver proceduto ad una rassegna critica dei risultati ottenuti da altri ricercatori che hanno preso in considerazione la preparazione di strutture cicliche similari. Un'interpretazione, basata sulle conoscenze attuali dei polimeri, lascia supporre che le strutture lineari siano alla base della formazione di strutture cicliche contenenti lo scheletro fondamentale dell'acido salicilico.

Anche la Chimica applicata ed industriale sono rappresentate, nel Rendiconto accademico del 1960, da numerosi contributi. Il prof. Riccardo SERSALE ha continuato con assidua attività le sue interessanti ricerche sopra le rocce laviche e piroclastiche di numerosi gruppi vulcanici dell'Italia centro-meridionale, di cui ci aveva già offerto molteplici saggi inseriti nei nostri Rendiconti degli anni precedenti. — In un primo lavoro sopra *l'Attività pozzolanica delle zeoliti*, egli ha trattato, con la collaborazione del dott. Vittorio SABATELLI, della *Reattività della herschelite con la soluzione di calce*, dimostrando come l'herschelite della rupe di Aci Castello in prov. di Catania, allorchè venga cimentata con la soluzione satura di calce, abbia la proprietà di fissare rapidamente quantitativi di calce assai superiori di quanto si verifichi per la pozzolana flegrea. — In altre due note successive ha indagato rispettivamente *Sulla natura zeolitica dei tufi rossi a scorie nere delle regioni Sabazia e Cimina* e *Sulla natura zeolitica*

del tufo « carpato » della regione vulcanica del monte Vulture, mettendo in evidenza come il termine zeolitico predominante nella massa cementante di tali rocce sia la cabasite e come, di conseguenza, la genesi di queste sia da attribuirsi ad un processo di zeolitizzazione. — Un quarto lavoro, che rappresenta la prosecuzione di precedenti *Ricerche sulla zeolitizzazione dei vetri vulcanici per trattamento idrotermale*, è destinato alla esposizione dei risultati ottenuti sottoponendo a pressioni e temperature moderate, e in ambiente debolmente alcalino, alcuni campioni di ossidiane riolitiche, provenienti da differenti distretti eruttivi. Lavorando in ambiente alcalino per potassa, si consegue la feldispatizzazione ad ortoclasio dei vetri originari; adoperando invece come liquido di contatto la soluzione di idrossido di sodio all'1%, si ottiene l'analcimizzazione delle ossidiane di partenza, ed incrementando le condizioni fisiche si registra la loro feldispatizzazione ad ortoclasio sodifero.

Altri notevoli contributi — che rappresentano ricerche in corso di svolgimento presso l'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Napoli sopra le proprietà dei sistemi solido-liquido-gas, ottenuti iniettando gas in letti di particelle solide fluidizzati con liquidi — sono quelli del dott. Leopoldo MASSIMILLA, il quale, in collaborazione con altri giovani allievi del consocio MALQUORI, ha offerto al nostro Rendiconto tre distinti lavori. — Tanto la prima di queste note (Leopoldo MASSIMILLA, Antonio SOLIMANDO ed Eduardo SQUILLACE. *Sulla dispersione di gas in sistemi solido-liquido fluidizzati*), quanto la seconda (Leopoldo MASSIMILLA, Gianluigi VITAGLIANO e Renato CHIANESE. *Sull'efflusso di sistemi fluidizzati solido-gas da fori di grande diametro, luci a sezione quadrata e feritoie*) e la terza (Leopoldo MASSIMILLA, Gennaro VOLPICELLI e Mario MASTURZO, *Fenomeni fluidodinamici e di scambio nella dispersione di getti continui di liquidi in altro liquido più denso*) riferiscono su particolari esperienze, svolte con adatte apparecchiature, adoperando materiali diversi e facendo opportunamente variare le condizioni della sperimentazione: ed i risultati da loro ottenuti hanno fornito dati relativi alle superficie di contatto tra gas e sistema solido-liquido fluidizzati, i quali sono necessari in eventuali calcolazioni riguardanti il trasferimento di materia in sistemi fluidizzati solido-liquido-gas.

Un altro lavoro, dovuto all'ing. Gianni ASTARITA, espone le determinazioni sperimentali della velocità di *Assorbimento di anidride carbonica in soluzioni acquose di monoetanolamina*, ottenute a bassi valori del tempo di contatto, presentando un riepilogo delle attuali conoscenze teoriche sui fenomeni di diffusione e reazione chimica, simultanee. Le relazioni teoriche desumibili si mostrano in accordo, anche quantitativo, con i dati raccolti. Si illustra inoltre un probabile meccanismo della reazione chimica che si svolge in fase liquida, in base al quale viene desunta una relazione quantitativamente confermata dai dati sperimentali.

Prima di concludere l'arida elencazione delle note inserite nel Rendi-

conto accademico, desidero ancora ricordare un lavoro di Chimica biologica e fisiologia, che espone i rapporti esistenti tra *Acidi grassi alimentari e sintesi del colesterolo nel ratto* ed è dovuto ai dottori Teodoro DE LEO e Lidia FORTI. Questi studiosi, somministrando a due gruppi di ratti rispettivamente acido stearico $1-C^{14}$ e acido linoleico $1-C^{14}$, hanno messo in rilievo che questi due acidi sono precursori del colesterolo marcato, che si ritrova variamente distribuito nell'organismo e di cui sono particolarmente ricchi fegato e siero. La variabilità biologica presentata dagli animali nello ambito di ogni gruppo permette di accertare, tra i due gruppi, soltanto differenze nei valori dell'attività totale e di quella specifica del colesterolo epatico esterificato.

Come ho accennato in principio, nello scorso anno sono state accolte, per la inserzione nel volume degli Atti, anche alcune memorie di nostri colleghi o di loro allievi; il che ha permesso all'Accademia di chiudere e di pubblicare il volume in corso, soddisfacendo così le ripetute richieste di cambio che ci venivano da numerosi Sodalizi italiani e stranieri.

Una di tali memorie, che ha carattere geologico applicativo, presentando notevole interesse pubblico e grandissima attualità per la nostra Napoli, è quella del consocio Francesco PENTA, che ha per titolo *Il sottosuolo della città di Napoli in rapporto alla progettazione di una metropolitana*. Vengono in questo lavoro prospettati tempestivamente i principali problemi geologici e tecnici che si dovranno affrontare allorchè a Napoli si vorrà realizzare una metropolitana, della quale ormai da più parti si parla come di opera necessaria ed indilazionabile. Tenuto conto delle peculiari caratteristiche dei nostri terreni, delle preoccupanti condizioni statiche di alcune aree edificate della città, della esistenza di vuoti sotterranei e di acque assai variamente scorrenti o comunque presenti nel sottosuolo, e giovandosi della lunga esperienza personale e di una ricchissima bibliografia sull'argomento, l'autore conclude affermando che l'impostazione del problema resta subordinata ad un vasto programma di indagini preliminari, destinate ad accertare la configurazione del sottosuolo, le condizioni idriche, l'ubicazione dei vuoti sotterranei di ogni tipo, la posizione dei piani di fondazione e lo stato di conservazione degli edifici. L'opera, molto impegnativa, appare pertanto realizzabile solo alla condizione che siano attuate sistematiche ed esaurienti indagini preventive.

Ad un campo completamente diverso spetta la memoria del socio Giuseppe CATALANO, il quale traccia, in una succosa e chiara sintesi, la storia de *L'erboristeria attraverso i tempi*. Partendo dal concetto che l'erboristeria moderna, sempre meglio perfezionata, si afferma oggi come un'arte ed un commercio d'interesse sociale, ausiliari della medicina, e procedendo a ritroso, il nostro collega passa in rassegna le fumose botteghe degli Speciali e degli Aromatarî dei secoli passati, gli spacciatori di erbe adatte ai

sortilegi del Medio Evo, fino alla sapienza erboristica di Dioscoride, raccolta nei cinque libri della sua *Materia Medica*, e, risalendo ancora nel tempo, attraverso i Rhizotomisti ed i Zootomisti, fino alla medicina esercitata dagli antichi Patriarchi, che agivano per intuito o ispirazione mistica, per giungere all'uso delle piante medicinali governato solo dalla tradizione orale, durante i millenni della preistoria.

L'ultima memoria, che ha visto la luce nel volume degli Atti recentemente pubblicato, è quella dei proff. Riccardo SERSALE e PAOLO GIORDANO ORSINI che ha per titolo *Idratazione e trasformazione della loppa d'alto forno per contatto con soluzione d'idrossido di calcio*. Data l'importanza sempre crescente che ha assunto il cemento d'alto forno nella tecnica edilizia, gli autori hanno voluto compiere accurate ricerche, onde rilevare la costituzione ed il valore idraulico delle loppe d'alto forno, nonchè le caratteristiche e le attitudini del cemento che deriva dalla loro associazione con il clinker di portland. Ed in questo lavoro danno conto dei risultati ottenuti seguendo sistematicamente il processo di idratazione della loppa basica d'alto forno, posta in presenza di soluzione di calce, tanto con determinazioni analitiche che provano la sua reattività verso la calce, quanto con osservazioni in microscopia ottica ed elettronica che consentono di rilevare la morfologia e la costituzione dei prodotti d'idratazione, nonchè la loro evoluzione nel tempo.

Se queste sono state le principali manifestazioni dell'attività scientifica della nostra Accademia, si devono ancora ricordare altre forme di collaborazione culturale, quali la partecipazione a Convegni, Congressi e celebrazioni varie (Convegno sui problemi organizzativi della Matematica italiana e questioni connesse; Decimo Congresso Internazionale di Meccanica applicata; Congresso di Etnografia e Folklore della Casa, ecc.) e l'aumento degli scambi con Accademie e Società scientifiche (Istituto Zoologico della Università di Lisbona; Chemical Society di Londra; Biblioteca dell'Accademia Sinica di Pechino; Science Institution della Kinki University di Fuse Osaka in Giappone ecc.), che ha permesso di incrementare la già ricca collezione di periodici che alla nostra Biblioteca pervengono da tutte le parti del mondo.

È stato provveduto alle nomine prescritte dallo Statuto sociale, chiamando alla carica di Vice-presidente per l'anno 1961 il consocio Antonio CARRELLI, mentre ha assunto di diritto la presidenza il socio Giovanni MALQUORI. Alla carica di Tesoriere è stato riconfermato, per il triennio 1961-1963, il collega Antonio SCHERILLO.

È stato giudicato il concorso a premio bandito per il biennio 1959-1960 sul tema: « *Ricerche sulle anomalie della struttura cristallina mediante i raggi X* », dichiarando meritevole del premio l'unico concorrente, anonimo, che ha presentato un lavoro dattiloscritto contraddistinto dal motto: « *Finis*

coronat opus ». In conformità delle norme che regolano detto concorso, il signor Presidente Generale procederà ora all'apertura della busta suggellata contenente il nome dell'autore ed alla proclamazione del vincitore (1). Come tema del nuovo concorso per il biennio 1961-1962 l'Accademia, seguendo il criterio di un opportuno turno fra le discipline matematiche, fisiche e naturali, ha stabilito il seguente: « *Studio geo-morfologico di un gruppo montuoso dell'Appennino centro-meridionale* », fissando come scadenza la data del 31 ottobre 1962 e come cifra la somma di lire duecentomila.

Due gravi lutti hanno funestato l'Accademia nel corso del 1960.

Il 17 aprile si spegneva in Napoli, in età di 87 anni, il decano dei nostri soci, Maria BAKUNIN, che alla vita dell'Accademia aveva preso parte attivissima per più di cinquantacinque anni, dal dì 11 febbraio 1905 in qualità di socio corrispondente, e dal 6 maggio 1911 come socio ordinario residente della Sezione di Scienze Naturali, ricoprendovi anche la carica di Presidente negli anni 1932 e 1952. Nata in Siberia nel 1873 ed appartenente ad aristocratica famiglia russa, Maria BAKUNIN dovè lasciare, con i suoi, la terra d'origine fin dalla più giovane età per le idee rivoluzionarie del padre. Trasferitasi a Napoli, nuova patria d'elezione, percorse nella nostra città tutta la sua carriera universitaria, occupandovi ben presto (ottobre 1912) la cattedra di Chimica tecnologica organica, e poi quella di Chimica industriale nella Facoltà di Ingegneria (allora Scuola Superiore Politecnica) e passando più tardi a quella di Chimica organica della Facoltà di Scienze, che tenne fino al 31 ottobre 1948, data del suo collocamento a riposo per raggiunti limiti di età. Nella prima metà del secolo ventesimo ella divenne così una delle figure più rappresentative dell'ambiente scientifico napoletano, non solo per la sua profonda cultura e per i suoi studi nei campi della chimica organica e della chimica applicata — riguardanti specialmente il meccanismo della sintesi di Perkin-Ogialoro e le isomerie dei composti della serie cinnamica, con particolare riguardo alle condizioni più adatte per la trasformazione degli uni negli altri, oltre agli interessanti contributi di chimica applicata riflettenti la conoscenza degli scisti bituminosi del Salernitano e di altre regioni d'Italia, che condussero alla preparazione di importanti prodotti medicamentosi — ma altresì per le numerose cariche ricoperte, per la larga cerchia di allievi della sua scuola, molti dei quali salirono ben presto a meritata fama, e per l'alto prestigio di cui godeva presso Enti, Autorità, colleghi, amici e scolari, in virtù del suo carattere severo ma giusto, del profondo senso di attaccamento al dovere, dell'entu-

(1) Aperta — secondo le norme del Regolamento di detto premio — la busta suggellata contenente la scheda col nome dell'autore, nell'adunanza plenaria del dì 22 gennaio 1961, è risultato autore del lavoro premiato il signor prof. Ercole GROSSETTI.

siasmo per la ricerca scientifica, e soprattutto delle fondamentali virtù della scrupolosità e del disinteresse.

Poche settimane più tardi, il 7 maggio, moriva in Firenze, in età di circa 82 anni, Gioacchino Leo SERA, socio corrispondente nella Sezione di Scienze Naturali dal dì 11 maggio 1929. Il nostro compianto collega, che per più di un ventennio fu titolare della cattedra di Antropologia in questo Ateneo, aveva compiuto a Roma i suoi studi universitari nei primi anni del secolo, e dopo aver esercitato la libera docenza a Firenze e aver tenuto per incarico i suoi insegnamenti a Pavia e a Milano, era passato come ordinario a Napoli nel 1927, continuando ad occuparsi indefessamente, fino agli ultimi anni di una lunga vita operosa, anche in condizioni visive progressivamente indebolite, di argomenti molteplici, fra cui spiccano, per originalità di vedute ed importanza di risultati, i contributi da lui portati all'anatomia delle razze umane ed ai problemi dell'antropogenesi. Sono da segnalare, particolarmente, nel primo di tali gruppi, gli studi di talune conformazioni e caratteri anatomici di varie parti dello scheletro nelle diverse razze umane e nei mammiferi, e, nel secondo, le sue osservazioni sull'importanza dell'ambiente acquatico nell'evoluzione dei diversi ordini di mammiferi e la sua tendenza polifletica nelle nuove classificazioni proposte per i Primati. In una serie di lavori, che venne pubblicando nello ultimo ventennio, SERA prese infatti in esame le diverse forme fossili di Primati superiori scoperte nel Sud-Africa, a Giava e nella Cina meridionale, giungendo a conclusioni affatto nuove circa il loro significato. Per tali forme, capaci di corsa in attitudine bipede, di occultamento subacqueo o di arrampicamento arboreo, egli istituì il gruppo degli *Orthodromidae*, al quale collegò le forme conosciute collettivamente come *Australopithecinae*, sostenendo che tale gruppo costituisce la prima prova paleontologica sicura dell'origine polifletica dell'umanità.

Del primo di tali nostri colleghi il consocio Rodolfo Alessandro NICOLAUS ha già tracciato recentemente una degna ed efficace commemorazione, facendo rivivere in mezzo a noi la cara figura di Maria BAKUNIN scienziata e maestra; dell'altro verrà ugualmente ricordata la spiccata personalità per merito del socio Mario GALGANO, che ha cortesemente accettato l'incarico di prepararne un profilo per il nostro Rendiconto.

Mentre rivolgiamo oggi, con memore ed accorata mestizia, un saluto alla venerata memoria dei consoci, che a tanti di noi furono legati da vincoli di affettuosa e sincera amicizia, salutiamo con il compiacimento più vivo i nuovi colleghi, che per effetto delle elezioni del giugno scorso sono venuti a colmare i vuoti che l'inesorabilità del fato aveva accresciuti nelle nostre file.

Alcuni di essi facevano già parte del Sodalizio in qualità di soci corrispondenti: tale è il caso, ad esempio, dei professori Antonietta ORRÙ e Giuseppe MONTALENTI, nominati soci ordinari nella Sezione delle Scienze

Naturali (e quest'ultimo trasferito più tardi nella categoria degli ordinari non residenti, in séguito al suo passaggio all'Università di Roma); altri entrano ora nella medesima Sezione, come il prof. Conrad BURRI, titolare di Mineralogia al Politecnico di Zurigo, nominato socio straniero, ed il prof. Francesco SCARSELLA, ordinario di Geologia nell'Università di Napoli, eletto socio corrispondente; o vengono chiamati nella Sezione di Scienze Matematiche, come il prof. Federico CAFIERO, ordinario di Analisi matematica a Napoli, nominato socio ordinario residente, ed il prof. Carlo CILIBERTO, titolare di Analisi matematica nell'Università di Bari, eletto socio corrispondente.

Tanto gli uni che gli altri, raccogliendo, come degni eredi, le nobili tradizioni di coloro che li hanno preceduti, porteranno alla vita dell'Accademia — ne siamo certi — il prezioso contributo della loro esperienza e della loro dottrina ed assicureranno la continuità del biscolare prestigio culturale e scientifico di questo Sodalizio. Siano i benvenuti tra noi!

RIASSUNTO. — Si espone brevemente l'attività svolta dall'Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli durante l'anno 1960, con la pubblicazione di più che cinquanta lavori di svariate discipline matematiche, fisiche, chimiche, biologiche e geomineralogiche, i quali hanno fornito la materia di un grosso volume del Rendiconto (il 27° della serie 4a) o hanno trovato posto nel volume degli Atti (il 3° della serie 3a), completato e pubblicato dopo un lungo intervallo di anni. A questa attività scientifica ed editoriale sono da aggiungere altre manifestazioni culturali, quali la partecipazione a Convegni, Congressi e celebrazioni varie, l'aumento degli scambi con Accademie e Società scientifiche, il conferimento di premi per lavori su tema prestabilito e l'apertura di nuovi concorsi a premio. Si riferisce infine sulle variazioni avvenute nella compagine sociale, con la scomparsa di apprezzati e benemeriti colleghi (Maria BAKUNIN, Gioacchino Leo SERA) e con la nomina, o il passaggio di categoria, di altri soci (Antonietta ORRÙ, Giuseppe MONTALENTI, Conrad BURRI, Francesco SCARSELLA, Federico CAFIERO, Carlo CILIBERTO).

SUMMARY. — An outline of the activity of the Academy of physical and mathematical sciences of Naples during 1960 is briefly given. More than fifty papers concerning mathematics, physics, chemistry, biology, mineralogy and geology compose the 27th volume (4th series) of the Rendiconto. — Other works have been published in the 3rd volume (3rd series) of the Atti, issued after many years.

The activity of the Academy has been extended to other cultural manifestations, as the contribution to symposia, celebrations and the establishment of new exchanges of its own publications with other scientific Academies and societies.

New grants for special works have been distributed. An account of variations in membership is reported, that is the death of distinguished colleagues (Maria BAKUNIN, Gioacchino Leo SERA) and the election, or changes of status, of new ones (Antonietta ORRÙ, Giuseppe MONTALENTI, Conrad BURRI, Francesco SCARSELLA, Federico CAFIERO, Carlo CILIBERTO).

Maria Bakunin

Commemorazione letta dal socio Rodolfo A. Nicolaus

(Adunanza del dì 7 gennaio 1961)

Il 17 Aprile 1960 si è spenta nella sua abitazione in Napoli la Professoressa Maria BAKUNIN. Con la sua morte la nostra Accademia ha perduto il suo socio più anziano, il ricordo del quale vivrà a lungo in quest'Aula per l'opera assidua ed illuminata durata oltre 55 anni.



Maria BAKUNIN nacque il 2 Febbraio 1873 a Krasnoïarsk (Siberia). Era figlia del celebre agitatore e filosofo russo Michele BAKUNIN e di Antossia KWRATHOVOSKA figlia di un deportato politico polacco.

Dopo un lungo periodo trascorso in Siberia, dove il BAKUNIN scontava una condanna a vita per motivi politici, l'intera famiglia con i figlioletti Carlo, Sofia e Maria riuscì a riparare in Europa.

In Italia Maria BAKUNIN venne assai giovane e ivi ricevette la sua prima educazione. Frequentò il Liceo Umberto di Napoli e si laureò con grande onore presso l'Università di Napoli nel lontano 1895, in una epoca cioè in cui solo a donne eccezionali si permetteva di raggiungere titoli così elevati.

Non ancora ventenne iniziò la sua carriera scientifica quale preparatore presso l'Istituto di Chimica Generale della Università di Napoli diretto dal Professor Agostino OGILIALORO TODARO che poi doveva sposare.

Nel 1909 riceveva l'incarico d'insegnamento di Chimica Applicata presso la Facoltà di Ingegneria, allora Scuola Superiore Politecnica di Napoli. L'anno successivo assumeva l'incarico della Chimica Tecnologica Organica sempre presso la stessa scuola Politecnica e nel 1912 vinceva il concorso per la stessa cattedra. Questo insegnamento, trasformato nel 1936 in quello biennale di Chimica Industriale, fu da Lei mantenuto fino al 1940, anno in cui chiese di essere trasferita alla cattedra di Chimica Organica presso la Facoltà di Scienze della Università di Napoli dove restava fino al Suo collocamento a riposo.

Per incarico del Ministero Agricoltura, Industria e Commercio, nel 1914 visitava la Svizzera e il Belgio per studiare l'insegnamento professionale di quei paesi. Così pure nel 1935, oltre alla partecipazione ufficiale al Congresso tenutosi in Russia per le celebrazioni del centenario di MENDELEJEFF, compiva una indagine sullo stato della industria della cellulosa in alcune nazioni dell'America del Sud.

Il primo lavoro scientifico di Maria BAKUNIN porta la data del 1890 e riguarda la preparazione degli acidi fenilnitrocinnamici, argomento ripreso e sviluppato negli anni successivi con la scoperta di nuovi stereoisomeri.

Siamo in un periodo in cui assai giovane era la stereochimica a seguito della scoperta della isomeria geometrica da parte di WISLICENUS (1873) e quella maleico-fumarica del VANT HOFF (1875) e in generale di quella cis-trans (1888). I lavori della BAKUNIN nel periodo 1890-1900 risultano perciò di grande interesse.

Credo che il miglior commento a questi lavori si trovi scritto nella relazione riguardante un concorso per un premio sulla stereochimica bandito proprio da questa Accademia e che porta le firme, quali relatori, dei nostri grandi chimici Stanislao CANNIZZARO ed Emanuele PATERNÒ:

« La signora dott. Maria BAKUNIN presenta al concorso 6 memorie sugli stereoisomeri degli acidi fenilcinnamico, fenilnitrocinnamici e fenilossicinnamici e sui loro derivati, pubblicate dal 1890 al 1901. Sono esse il frutto di un lavoro sperimentale assiduo, ordinato, intelligente. La prima memoria sulle tre coppie stereoisomeriche di acidi nitrocinnamici è un lavoro nel quale sono superate difficoltà sperimentali non lievi, sono descritti con cura massima numerosi composti ed è manifesta la completa conoscenza dell'argomento. Nella seconda è studiata la trasformazione degli allocomposti in quelli ordinari ed il loro comportamento in diverse reazioni. Nella terza è descritto lo stereoisomero dell'acido fenilcinnamico, già invano tentato di preparare da altri chimici; nella quarta si dimostra con esperienze inappuntabili la non esistenza di un acido ossifenilcinnamico che il VANDEVELDE credeva di avere ottenuto; nella quinta viene discussa la costituzione degli acidi fenilnitrocinnamici e stabilito a quali spetta la formula pianosimmetrica, a quali

l'assiale; nella sesta infine l'autrice si occupa di un nuovo processo di disidratazione, mostrandone, con numerose esperienze i vantaggi.

Da quanto abbiamo brevemente esposto risulta dunque che la signora BAKUNIN con un lavoro sperimentale assiduo, ricco di nuovi dati, superando difficoltà non lievi, ha chiarito un capitolo della stereochimica ed ha portato un contributo non ispregevole ai progressi di questa parte della chimica.

La sezione di Scienze fisiche propone quindi che il premio di lire mille venga conferito alla dott. Maria BAKUNIN.

Stanislao CANNIZZARO ed Emanuele PATERNÒ, relatori ».

Un interessante lavoro di Maria BAKUNIN dal titolo « Contributo alla conoscenza dei pigmenti melanici » apparve nel 1904. È un argomento quello delle melanine di grandissimo interesse chimico e biologico trattandosi della classe di pigmenti più universalmente diffusa nel regno animale e vegetale e il cui studio chimico risultò subito così difficile che fu coniato per esso, da parte dei tedeschi, l'espressione « Die Chemie der Entsangungen » ovverossia « La Chimica delle rinunzie ». Il contributo portato in quell'epoca è certamente molto importante in quanto che l'autore riesce, disponendo di soli mezzi chimici, ad isolare da un melanoma due diversi pigmenti, uno nero brillante ed uno di colore meno cupo, per i quali prepara i sali di ammonio e di argento e ne calcola anche le formule greggie. Non mi risulta che a tutt'oggi ulteriori progressi siano stati fatti sulla conoscenza di quel pigmento.

Assai interessanti sono poi gli studi a carattere generale sull'azione condensante dell'anidride fosforica in seno a un solvente. L'anidride fosforica era stata usata da moltissimo tempo come disidratante utilizzando la sua azione sui corpi in processi soprattutto di fusione. Parve logico perciò sostituire ad una azione così drastica come la fusione, l'uso dell'anidride fosforica sciolta in solventi organici inerti ottenendo così risultati assai soddisfacenti nella preparazione di anidridi, indoni ed eteri. Il metodo fu applicato nell'industria, come ad esempio in Inghilterra nella « Manufacturing Chemist Synthetic Perfumes and Organic Chemicals William Berker » che lo utilizzò per la preparazione della aspirina.

Un altro metodo di non secondaria importanza ideato dalla BAKUNIN è quello che riguarda le condensazioni in presenza dei metalli e dei loro cloruri in fase omogenea fra alogenuri aromatici e fenoli o ammine. Con questo metodo furono preparati con rendimenti più elevati sostanze già note come il benzilfenolo ed altre nuove come il benzil- α -naftolo, benzil- β -naftolo, la benzilresorcina, la benzilpirocatechina. Nel caso della reazione fra cloruro di benzile e p.amminofenolo la reazione procede in modo diverso con formazione di derivati solo all'azoto. Tutte le sostanze preparate hanno un interesse particolare perchè costituiscono materiale di partenza nelle industrie delle sostanze coloranti. Anche nel campo degli eterociclici, chimica, questa spesso difficile ed avara di risultati, Maria BAKUNIN portò un notevole contributo con un nuovo metodo per la sintesi del nucleo indolico consistente nel

riscaldamento con idrossido di Ba degli ortonitrofenilderivati degli acidi della serie etilenica.

Accanto a questi studi fondamentali altri ne devono essere ricordati, come quelli sulla costituzione della picrotossina, sulla morfina, sulla stricnina, sulla esterificazione dei fenoli, sugli indoni, e sulle reazioni fotochimiche.

Interessanti contributi nel campo della Chimica Applicata hanno recato i suoi studi sugli scisti bituminosi del Salernitano e di altre regioni d'Italia e specialmente i primi che condussero alla preparazione di importanti prodotti farmacologici ottenuti per solfonazione degli olii distillati.

In tutti i lavori di Maria BAKUNIN i fatti non sono solo accuratamente descritti ma sono coordinati in unità armoniche dalle quali si traggono sempre nuove ipotesi di lavoro. SCHILLER ha detto « Nur dem Ernst, dem keine Mühe bleichet, rauscht der Wahrheit tiefverstecktes Korn », e cioè « Solo alla serietà che non indietreggia di fronte ad alcuna fatica si rivelerà il recondito seme della verità ». Questa serietà appare evidente a chiunque si soffermi a leggere i lavori di Maria BAKUNIN.

La sua attività scientifica non poteva quindi non essere altamente apprezzata e riconosciuta. Socio corrispondente dell'Accademia dei Lincei, Socio ordinario residente della Società di Scienze Lettere ed Arti, dell'Accademia Pontaniana, dell'Istituto di Incoraggiamento e della Società dei Naturalisti di Napoli, fu anche presidente (1944-1949) dell'Accademia Pontaniana e presidente della sezione di Scienze Fisiche e Matematiche della Società di Scienze, Lettere ed Arti (1932 e 1952).

Se l'opera scientifica di Maria BAKUNIN è notevole, sarebbe tuttavia grave errore il credere che in essa sia racchiusa tutta la sua attività. In Maria BAKUNIN bisogna considerare non soltanto i lavori scientifici ai quali è legato il suo nome ma anche l'opera svolta nel campo dell'insegnamento, sia contribuendo alla efficienza degli istituti chimici napoletani con l'immediata e straordinaria comprensione del continuo evolversi degli studi, sia educando un folto stuolo di allievi, molti dei quali raggiunsero posizioni preminenti nella vita. Straordinariamente severa con gli studenti ed i suoi allievi ma sempre ed unicamente al fine di ottenere da loro il massimo rendimento e la formazione di una sicura coscienza professionale. Sotto le spoglie talvolta rudi Maria BAKUNIN nascondeva un animo generoso e buono. Ebbe sempre intatto il culto della amicizia sincera e profonda. Desidero ricordare le famose e tradizionali colazioni che essa dava generalmente dopo le riunioni dell'Accademia e nelle quali soleva riunire le personalità e gli scienziati più illustri dell'epoca. Fra i più assidui, e che ebbe assai cari, i professori TORELLI, MASONI, DE LORENZO, BASSANI, LONGO, DEL PEZZO, DE DOMINICIS, PIERANTONI, SCORZA e in un secondo periodo i professori GIORDANI, IPPOLITO, CARRELLI, D'ERASMO, MALQUORI, CACCIOPPOLI e tanti altri.

Queste colazioni, improntate alla massima semplicità e modestia, servirono non solo l'amicizia ma anche la cultura e la scienza.

Quando, come tutti sanno, la sua casa fu incendiata dai tedeschi *) si trasferì in un grande e disadorno stanzone dell'Università e continuò ad offrire, in un locale in breve diventato una autentica arca di Noè, ospitalità generosa ed aiuto a quanti a Lei si rivolgevano.

Alla sua indomita energia e alla sua abile diplomazia si deve praticamente il salvataggio dell'Istituto Chimico Napoletano dal quale mai si staccò durante tutto il periodo bellico e che evitò per puro miracolo di essere occupato e requisito dalle truppe Alleate. Partecipò alla ricostruzione dell'Università attivamente collaborando nel periodo post-bellico con il Rettore OMODEO.

Fino agli ultimi giorni della Sua vita, alla veneranda età di 87 anni, sofferente, si recava tutti i giorni all'Istituto Chimico dedicandosi soprattutto allo studio delle lingue.

Guidava ancora, con preziosi suggerimenti, gli allievi più giovani lungo i filoni tradizionali della ricerca a testimonianza della sua lucida e feconda attività e del suo amore per la scienza fino a tarda vecchiaia.

La sua scomparsa ha lasciato un vuoto incolmabile: la sicurezza che il suo esempio e le sue opere rimarranno, elementi ispiratori della nostra vita scientifica, ci allevia il dolore della Sua dipartita.

LAVORI DELLA PROF. MARIA BAKUNIN.

- 1) *Sugli acidi meta e paranitrofenilcinnamici e sopra alcuni loro derivati.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, 1890 (in collab. con A. OGLIALORO).
- 2) *Sugli acidi fenilnitrocinnamici e sui loro isomeri stereometrici.* Gazz. Chim. Ital., XXV, 1895.
- 3) *Stereoisomero dell'acido fenilcinnamico.* Gazz. Chim. Ital., XXVII, 1897.
- 4) *Stereoisomeri degli acidi fenilnitrocinnamici.* Gazz. Chim. Ital., XXVII, 1897.
- 5) *Sulla formazione degli indoni in rapporto colle stereoisomerie e su di un nuovo metodo per la preparazione di indoni, anidridi ed eteri.* Gazz. Chim. Ital., XXX, 1900.
- 6) *Sull'acido ossifenilcinnamico.* Rend. dell'Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, fasc. 8°, 1900.
- 7) *Sulla sintesi degli acidi non saturi e sui loro prodotti di disidratazione.* Gazz. Chim. Ital., XXXI, 1901.
- 8) *Sulla eterificazione di acidi con fenoli.* Gazz. Chim. Ital., XXXII, 1902.
- 9) *Sulle condensazioni in presenza dei metalli e loro cloruri. Nota preliminare.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. di Napoli, fasc. 2°, 1903.
- 10) *Commemorazione di Luciano Arnanni.* Atti Accad. Pontan., Vol. XXXVI, Napoli. 1903.
- 11) *Sintesi del benzil- β -naftolo e suoi derivati.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. di Napoli, fasc. 1°, 1904 (in collab. con G. ALTIERI).
- 12) *Sintesi del benzil- α -naftolo e suoi derivati.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, fasc. 1°, 1904 (in collab. con M. BARBERIO).
- 13) *Azione del cloruro di benzile sugli amidofenoli.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, fasc. 8° a 11°, 1905.

*) Nel disastro si persero purtroppo molti protocolli scientifici,

- 14) *Azione del cloruro di para-nitro-benzile sul para-amido-fenolo.* Gazz. Chim. Ital., XXXVII, 1906 (in collab. con C. PROFILO).
- 15) *Contributo alla conoscenza delle isomerie spaziali negli acidi fenil-nitro-cinnamici (Anidridi, indoni, cloruri, fenilidrazidi, idrazoni, ossime).* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Fasc. 12, 1906.
- 16) *Studio sui prodotti di disidratazione dell'acido fenilortonitrocinnamico e dei prodotti che accompagnano quest'acido nella sintesi del Perkin.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. di Napoli, fasc. 1° e 2°, 1906 (in collab. con L. PARLATI).
- 17) *Azione del cloruro di benzile sulla resorcina e sulla pirocatechina.* Gazz. Chim. Ital., XXXVII, part. II, 1906 (in collab. con P. ALFANO).
- 18) *Sugli ortonitrobenzilparamidofenoli.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, fasc. 12°, 1907 (in collab. con M. CORRIDI).
- 19) *La sorgente di valle di Pompei.* Atti Accad. Pontan., Vol. XXXVII, Napoli, 1907.
- 20) *Sui nitrobenzilortoamidofenoli.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, fasc. 12°, 1907 (in coll. con L. PARLATI).
- 21) *La sorgente minerale di Valle di Pompei. Relazione dell'analisi chimica e batteriologica.* Atti Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, Serie II, Vol. XIV, N. 3, 1908 (in collab. con A. OGLIALORO).
- 22) *In memoria di Stanislao Cannizzaro.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, fasc. V-VI, 1910 (in collab. con A. OGLIALORO).
- 23) *L'industria degli scisti itticolici dell'Italia Meridionale.* Atti R. Ist. Incoraggiamento di Napoli, serie VI, Vol. IX, 1911.
- 24) *Sull'azione dei raggi ultravioletti sugli stereoisomeri della serie cinnamica.* Nota II. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, fasc. 7°, 8°, 9°, 1911.
- 25) *Reazioni fotochimiche dei nitrofenilindoni.* Nota I. Gazz. Chim. Ital., XLI, 1911 (in collab. con E. LANIS).
- 26) *Sulla esplosività dei residui delle soluzioni eterree dei fenilnitroindoni esposti alla luce.* Nota III. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, fasc. 7°, 8°, 9°, 1911.
- 27) *Gli indoni ed i loro prodotti di trasformazione al sole. Loro comportamento con l'ozono.* Nota IV. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, fasc. 7°, 8° 9°, 1911.
- 28) *Sulla costituzione del fenilortonitroindone e del suo ozonide.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, fasc. 7°, 8°, 9°, 1912 (in collab. con T. ANGRISANI).
- 29) *L'insegnamento professionale nel Belgio e nella Svizzera.* Bollettino del Minist. di Agricoltura, Industr. e Com., Serie B, N. 2, Roma, 1914
- 30) *Sulla costituzione del fenilortonitroindone e sui prodotti di scissione.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, fasc. 7° a 10°, 1914 (in collab. con T. ANGRISANI).
- 31) *Sulla costituzione del fenilmetanitroindone.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, fasc. 7° a 10°, 1914 (in collab. con T. ANGRISANI).
- 32) *Sulla costituzione del fenilparanitroindone.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, fasc. 7° a 10°, 1914 (in collab. con A. KOSSINOVA).
- 33) *Soluzioni colloidali e sintesi organiche.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, fasc. 7° a 10°, 1915.
- 34) *Sulla eterificazione con fenoli.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, fasc. 7° a 10°, 1916 (in collab. con F. GIORDANI).
- 35) *Meccanismo della reazione del Perkin.* Gazz. Chim. Ital., XLVI, 1916 (in collab. con G. FISCEMAN).
- 36) *Reazioni fotochimiche dei fenilnitroindoni. Prodotti di trasformazione del fenilortonitroindone.* Nota V. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, Fasc. 1°-2°, 1916 (in collab. con F. GIORDANI).
- 37) *William Ramsay. Cenno necrologico pronunziato dalla Socia M. Bakunin nell'adunanza del dì 9 giugno 1917.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, serie III, vol. XXIII, 1917.

- 38) *Soluzioni colloidali e sintesi organiche. Meccanismo della sintesi dei diacetati di nitrobenzilidene*. Nota II. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, fasc. 4°, 5°, 6°, 1917 (in collab. con F. GIORDANI).
- 39) *L'industria degli scisti ittiolici dell'Italia Meridionale*. Nota III. Atti R. Ist. Incoraggiamento Napoli, serie VI, vol. IX, 1917.
- 40) *Sulla costituzione della picrotossina*. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, serie III, vol. XXX, 1924 (in collab. con F. GIORDANI).
- 41) *Gli scisti bituminosi di Castoreale e Barcellona (Sicilia)*. Annali di Chimica applicata, vol. 15°, fasc. 6°, 1925 (in collab. con F. GIORDANI).
- 42) *Sulla utilizzazione delle rocce bituminose con speciale riguardo alla Sicilia*. Atti del II Congresso Nazionale di Chim. Pura ed Appl. Palermo, Maggio 1926.
- 43) *Sul fenil-isatogeno*. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, serie III, vol. XXXV, 1927 (in collab. con T. VITALE).
- 44) *Necrologia di Arnaldo Piutti*. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, 1928.
- 45) *Sul meccanismo della sintesi di Perkin-Ogliastro*. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, fasc. 1°-6°, 1932.
- 46) *Studi nel gruppo dell'indolo. Nuova sintesi del 3-fenildiossindolo*. Gazz. Chim. Ital., vol. 63, fasc. 1°, 1933 (in collab. con D. PECCERILLO).
- 47) *Commemorazione del socio corrispondente Gaetano Minunni*. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, 1934.
- 48) *Composti molecolari nei sistemi: Acido-sale. Acido-etero (acidi acetico, butirrico, fenilacetico)*. Gazz. Chim. Ital., vol. 65, fasc. 6°, 1935 (in collab. con E. VITALE).
- 49) *Sul meccanismo della sintesi Perkin-Ogliastro*. Gazz. Chim. Ital., vol. 65, 1935 (in collab. con D. PECCERILLO).
- 50) *Commemorazione del socio corrispondente Orazio Rebuffat*. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, 1938.
- 51) *Sugli stereoisomeri della serie cinnamica (Acidi f. n. cinnamici)*. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, 1942-45 (in collab. con A. ACCURSO).

Ugo Beretta

Commemorazione letta dalla prof. Lilianna Jannelli

(Adunanza del dì 7 gennaio 1961)

È con animo sinceramente commosso che mi accingo a rievocare la figura del prof. Ugo BERETTA in questa Università che Lo vide, studente, intraprendere con entusiasmo gli studi di Chimica e quindi, Maestro, profondere dalla Cattedra energie inesauribili con tenacia e con generosa dedizione.



Rara figura di gentiluomo, Lo distinguevano la lealtà e il calore dei rapporti sociali, una non comune capacità di sintesi, che gli consentiva di formulare con immediatezza giudizi obbiettivi su uomini e situazioni, il temperamento combattivo. Era severo soprattutto con sè stesso, sentiva il dovere fino al sacrificio.

Aveva eletto la Scuola a Missione di Vita. Il Suo giudizio inflessibile di esaminatore maturava da un'approfondita e serena valutazione delle capacità dell'allievo ed era mitigato dalla profonda umanità e dal tatto squisito, che improntavano tutte le Sue azioni; se però, nella massa degli studenti gli era dato di intravedere qualche giovane, notevole per doti intellettuali e per attitudine alla ricerca, Egli si prodigava con giovanile entusiasmo e senza risparmio di forze nel compito di aiutarlo e di incoraggiarlo nei primi duri contatti con la vita scientifica.

Obbedendo all'impulso generoso del Suo animo, sentiva il bisogno di essere sempre in mezzo ai Suoi discepoli per sorreggerli con la Sua com-

preensione paterna nei momenti di perplessità, per ammonirli se in preda a facili entusiasmi, per spronarli con la guida del Suo nobile esempio. Ed agli allievi prediletti, con l'amarezza di chi sente che non gli è dato di portare a termine la Sua missione, ha rivolto il pensiero negli ultimi istanti di una travagliata esistenza che si è chiusa in Pontremoli l'otto settembre 1959.

Nato ad Arcola (La Spezia) il 26/11/1902, Ugo Beretta si laureò in Chimica a Napoli nel 1928. Subito dopo la laurea frequentò il laboratorio di Elettrochimica del Politecnico conseguendo dopo pochi mesi la nomina ad Assistente volontario.

Nell'agosto del 1929 una borsa di studio sui fondi Morselli, che gli venne rinnovata per tre anni consecutivi, gli consentì di andare in Germania a frequentare il laboratorio di Chimica Fisica di Berlino, diretto da BODENSTEIN.

Ebbe modo così di approfondire le sue conoscenze nel campo di studi prevalentemente coltivato in quella Scuola relativo alla Cinetica in fase gassosa e di affinare le sue attitudini sperimentali, addestrandosi alla tecnica degli alti vuoti.

Dopo aver lavorato per qualche tempo sulla reazione di decomposizione del cloruro di nitrosile a base temperature, intraprese, in collaborazione con SCHÖMAKER, uno studio sulla decomposizione fotocinetica dell'ozono in luce ultravioletta, pubblicando due note sull'argomento.

Ritornato in Italia nel febbraio 1932 fu nominato Assistente incaricato presso la Cattedra di Chimica generale ed inorganica di Napoli e quindi, a seguito di concorso nazionale, assistente di ruolo nell'ottobre dello stesso anno.

Cominciò allora un periodo di intensa attività di ricerca che durò circa un decennio e che culminò nel 1942 con il raggiungimento della Cattedra.

Le direttive di ricerca furono due: la cinetica chimica e l'elettrochimica teorica ed applicata.

Uno studio accurato e metodico sulla decomposizione della nitrammide in soluzione acquosa nelle condizioni più disparate di temperatura e di concentrazione dei sali aggiunti gli permisero di controbattere sul piano della evidenza sperimentale alcune affermazioni di BRÖNSTED, relative alla applicazione della teoria della catalisi acido-basica allo studio dello effetto salino.

Avendo dimostrato che i sali aggiunti influivano sulla velocità di decomposizione solo in quanto sottraevano, idratandosi, molecole di acqua, il prof. BERETTA intravide la possibilità di valutare il grado di idratazione degli ioni a partire dai dati cinetici, ottenendo risultati che, nel caso dei cloruri alcalini, concordavano bene con quelli ricavati dai numeri di trasporto.

Questi studi cinetici furono premiati nel 1934 con il premio biennale dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche in Napoli.

Contemporaneamente l'interesse del prof. BERETTA si rivolse allo studio del rendimento di energia nella elettrolisi, problema che venne affrontato per vie diverse.

Poichè nella letteratura corrente esistevano molti dati sul rendimento di corrente, mentre scarseggiavano i dati sul rendimento di voltaggio, il prof. BERETTA provvide ad arricchire detto campo con misure numerose e precise. A tale scopo mise a punto, in collaborazione con il prof. JACOPETTI, un delicato dispositivo che consentiva di determinare separatamente la tensione applicata agli elettrodi e la caduta ohmica, permettendo di valutare quella parte della tensione che va sotto il nome di « polarizzazione di concentrazione ».

Misure condotte in parallelo con un elettrolizzatore costruito in modo da funzionare da calorimetro consentivano di controllare la ripartizione della energia nell'elettrolisi nelle condizioni sperimentali più diverse (elettrodi ed elettroliti differenti). Veniva così misurata l'energia chimica connessa con il processo di elettrolisi e, sotto forma di calore, si ritrovava l'eccesso di energia dovuto alla polarizzazione chimica e alla polarizzazione di concentrazione.

L'accoppiamento del dispositivo di misura suddetto con le misure calorimetriche portava alla valutazione distinta di ben quattro dei sei termini nei quali si ripartisce la tensione applicata.

Queste ricerche di elettrochimica teorica sfociavano nel campo applicativo con lo studio dei fenomeni di invecchiamento degli apparecchi di elettrolisi dell'acqua, che si manifestano appunto con una diminuzione del rendimento di energia.

E sempre a questo tipo di ricerca a carattere applicato, può ascriversi un altro gruppo di lavori sull'uso dell'elettrodo ad antimonio per la determinazione dell'acidità reale dei liquidi zuccherini in flusso continuo.

Questa ricerca feconda di risultati era accoppiata ad una attività didattica parimente intensa; il prof. BERETTA, che aveva conseguito nel 1937 la libera docenza in Chimica generale, impartiva le lezioni del Corso ufficiale di Chimica fisica, conferitogli per incarico dalla Facoltà di Scienze e quelle relative a tutti i corsi di esercitazioni connessi con tale insegnamento.

Lo scoppio della guerra, le disagiate condizioni di vita dovute ai bombardamenti, un richiamo alle armi dal settembre 1939 al marzo 1940 imposero un rallentamento all'attività del prof. BERETTA, che, ternato nel concorso alla Cattedra di Elettrochimica dell'Università di Milano, veniva chiamato a coprire la Cattedra di Chimica Fisica nella nostra Università nel novembre 1942.

Nel primo anno di straordinariato, sebbene fosse in atto nell'Istituto di Napoli un lavoro di sgombrò degli apparecchi e della biblioteca con relativo trasferimento in luoghi più sicuri, il prof. BERETTA continuò le sue ricerche di cinetica sulla decomposizione della nitrammide estendendo la

indagine al comportamento degli acidi forti, che, a differenza dei loro sali, accelerano la decomposizione.

Purtroppo tutto il lavoro andò perduto a seguito di un incendio di rappresaglia tedesca verificatosi nel settembre 1943 e che distrusse non solo i protocolli di misura e l'attrezzatura inerente alle indagini in corso, ma anche un laboratorio allestito per le esercitazioni da impartire agli studenti.

A causa delle distruzioni provocate dall'incendio e dai continui bombardamenti e in seguito alla mancanza di erogazione di energia elettrica e di gas le ricerche furono sospese, mentre l'attività didattica non subì mai interruzione; anzi il prof. BERETTA si prodigò nella sostituzione dei colleghi richiamati alle armi tenendo corsi di Elettrochimica e di altre discipline.

Solo verso la metà del 1944 fu possibile una parziale ripresa dell'attività sperimentale ed il prof. BERETTA con mezzi modesti, ma con grande sacrificio personale, si accinse all'opera di ricostruzione del suo Istituto.

Mi sia lecito ricordare che in questo duro periodo il prof. BERETTA viveva a Napoli in uno stato di profonda depressione morale e fisica, privo di notizie dei Suoi cari rimasti al di là della linea gotica e senza una fissa dimora perchè la sua casa era requisita dagli alleati.

E così, in mezzo a difficoltà gravissime di ogni sorta, in locali senza vetri alle finestre, malgrado le deficienze di energia elettrica e di gas che costringevano a limitare le ricerche ad alcuni giorni della settimana, nel 1945 furono iniziate misure di cinetica sulle reazioni a decorso lento e sulla reazione di trasformazione del cianato di ammonio in carbammide.

Relativamente alle reazioni a decorso lento, caratterizzate da valori anormalmente bassi del termine A dell'equazione di Arrhenius, il prof. BERETTA e i suoi collaboratori raccoglievano copioso materiale sperimentale. I risultati dell'esperienza venivano elaborati ammettendo che il verificarsi di reazioni contemporanee di attivazione e di disattivazione per collisione portasse ad una concentrazione stazionaria dei complessi d'urto attivi. Si ricavava così una formula di interpolazione che riproduce rigorosamente i dati sperimentali e che consente di attribuire un significato fisico alle costanti limiti di velocità quando la concentrazione dei reagenti tende a zero.

Per quel che riguarda la reazione di trasformazione dell'isocianato di ammonio in urea, che per lungo tempo è stata considerata una reazione di trasposizione intramolecolare, i numerosi dati sperimentali, raccolti attraverso lo studio sistematico del decorso della reazione in mezzi isodielettrici a composizione variabile, portavano a stabilire, in modo inequivocabile, che la reazione in soluzione procede attraverso un meccanismo di interazione degli ioni provenienti dalla dissociazione del sale.

Contemporaneamente l'attività didattica del prof. BERETTA si svolgeva senza sosta attraverso l'insegnamento della Chimica Fisica e della Chimica generale nella Facoltà di Scienze, della Chimica applicata ai materiali da

costruzione presso la Facoltà di Architettura e della Chimica generale ed inorganica presso l'Accademia Aeronautica.

Il prof. BERETTA fu eletto Preside della Facoltà di Farmacia per due trienni consecutivi, e fu membro del Consiglio di Amministrazione della Università, Socio dell'Accademia Pontaniana, Socio della Accademia di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali in Napoli, Presidente della Sezione Campana della Società Chimica Italiana.

Con il procedere degli anni le migliorate condizioni economiche del Paese consentivano di potenziare la attrezzatura scientifica dell'Istituto, il cui organico si arricchiva di nuovi posti di assistenti ed una Scuola fiorente veniva a crearsi intorno al prof. BERETTA.

I campi di ricerca si allargavano e si differenziavano: si formavano così nuclei distinti di ricercatori che lavoravano sulla determinazione dei momenti elettrici dipolari di sostanze in soluzione, sui fenomeni associativi che si verificano tra sostanze polari in solventi inerti, sulla crioscopia di sistemi binari a comportamento regolare, sulla determinazione dei coefficienti differenziali di diffusione degli elettroliti in mezzo acquoso.

E proprio mentre intorno a Lui ferveva l'attività di una Scuola che già, in numerosi campi, dava segni tangibili della sua vitalità e del suo valore, il prof. BERETTA è immaturamente scomparso.

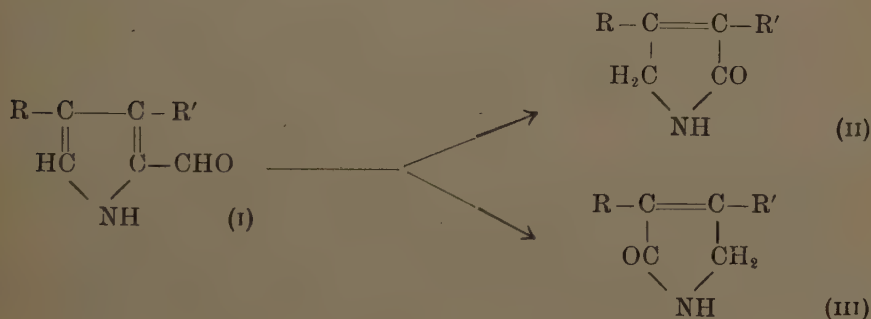
Per noi, Suoi discepoli, è molto difficile assuefarci all'idea che è venuto a mancarci il sostegno del Suo animo generoso, l'incoraggiamento della sua parola di Maestro e di Amico, la guida del Suo nobile esempio, ma è ancora più difficile dimenticare l'insegnamento che ci viene da una vita interamente spesa per la Scienza e per la Scuola.

Azione dell'acqua ossigenata sul 2-formilpirrolo.

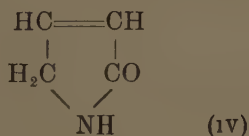
*Nota della prof. Rachele Scarpati e del dott. Ciro Santacroce,
presentata dal socio corrispondente Rodolfo A. Nicolaus*

(Adunanza del dì 7 gennaio 1961)

La nota reazione di ossidazione con H_2O_2 in ambiente alcalino di composti pirrolici con posizioni α libere, che conduce ai pirroloni-2¹⁾, è stata applicata da HÜNI e FRANK²⁾ ad aldeidi pirroliche β -disostituite del tipo (I). Queste, sotto l'azione dell'ossidante, danno luogo ai due pirroloni-2 isomeri (II) e (III)³⁾.



Nell'intento di preparare il pirrolone-2 (IV) con un metodo di più rapida realizzazione di quello consigliato da LANGENBECK e BOSER⁴⁾, dopo



¹⁾ Cfr. note bibliografiche di: PLIENINGER H., DECKER M. *Eine neue Synthese für Pyrrolone, insbesondere für « Isooxylopsopyrrol » und « Isooxylopsopyrrolcarbonsäure »*. Ann., **598**, 198 (1956).

²⁾ HÜNI A., FRANK F. *Oxydation von Pyrrolen mit Wasserstoffperoxyd*. Z. Physiol. Chem., **282**, 96 (1947).

³⁾ Ai composti di questo tipo fu attribuita la struttura di α -ossipirroli, ma il loro comportamento induce a pensare che l'equilibrio tautomerico sia spostato verso la forma pirrolonica (cfr. pag. 29).

⁴⁾ LANGENBECK W., BOSER H. *Notiz über Pyrrolon (γ -amino-crotonsäure-lactam)*. Ber., **84**, 526 (1951).

aver tentato l'ossidazione del pirrolo con H_2O_2 che porta a notevoli quantità di nero di pirrolo e solo a tracce di ammidi non isolabili, abbiamo effettuato l'ossidazione del 2-formilpirrolo.

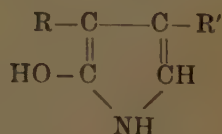
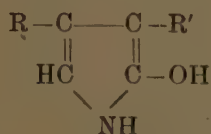
La reazione, condotta nelle condizioni utilizzate da HÜNI, e cioè in presenza di piridina, ha portato ad un unico derivato ammidico a p. f. 91-92°, il quale deve essere considerato come un complesso della succinimide con la piridina in base ai risultati analitici ed al fatto che per trattamento con HCl 2N a temperatura ambiente si scinde nei componenti⁵⁾. D'altra parte, se la reazione si conduce in assenza di piridina, l'unico derivato ammidico che si ottiene è la succinimide.

Che il complesso si formi durante la reazione e prima che l'imide abbia assunto la sua struttura più stabile è dimostrato dal fatto che i componenti preformati, trattati nelle condizioni utilizzate per la reazione in esame, non danno il complesso; la formazione di questo può essere spiegata ammettendo che la succinimide nella sua forma enolica si leghi con la piridina.

In base al fatto che durante il corso dell'ossidazione si osserva notevole sviluppo di CO_2 e che nella miscela di reazione è possibile identificare cromatograficamente piccole quantità di acido α -pirrolocarbossilico, si può dedurre che il distacco del carbonio extranucleare venga preceduto dalla sua ossidazione.

Poichè ben poco è noto sul meccanismo della reazione di decarbossilazione⁶⁾, non è facile avanzare un'ipotesi fondata per il meccanismo di ossidazione nel caso in esame, tuttavia, se la reazione è preceduta dalla decarbossilazione, nessun fattore contrasta con il meccanismo elettrofilo suggerito per la reazione di ossidazione dei derivati pirrolici β -disostituiti⁷⁾.

A prescindere dal meccanismo di reazione i prodotti che si formano primariamente dovrebbero essere derivati α -ossipirrolici del tipo (V); questi non sono stati molto studiati dal punto di vista dell'equilibrio tautomerico



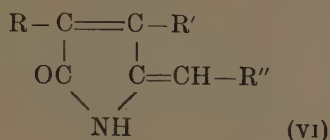
(v)

⁵⁾ Il fatto che gli Rf del complesso corrispondano a quelli della succinimide è giustificato dalla sua instabilità in ambiente acido, infatti gli eluenti che sono comunemente utilizzati per le ammidi implicano l'uso di acido acetico.

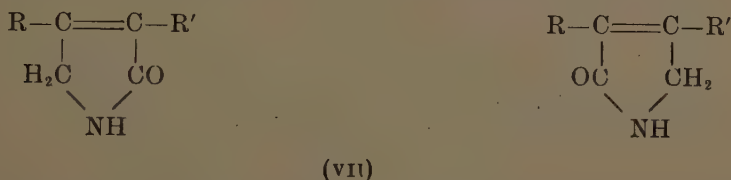
⁶⁾ FINAR I. L. *Organic Chemistry*, Vol. I, Longmans, Green and Co, London, 1956, pag. 146.

⁷⁾ SCARPATI R., DOVINOLA V. Sugli acidi pirrolocarbonici. Nota XIX. Azione dell'acqua ossigenata sull'acido 3-metil-4-pirrolocarbonico. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. s. 4^a, 27, 503 (1960).

tuttavia, se si considera che non sono solubili in NaOH ⁷⁾ ⁸⁾, che non danno colorazione con cloruro ferrico ⁷⁾ ⁸⁾, che non vengono metilati con diazometano ⁷⁾, che anche in ambiente nettamente alcalino condensano con le aldeidi con formazione di composti del tipo (VI) ⁸⁾, che il loro spettro



I. R. presenta nettamente la banda del = CO mentre lo spettro U.V. di un derivato di questo tipo (R = R' = CH₃) permette di dedurre la presenza di un sistema crotonico ⁸⁾, si può ammettere che l'equilibrio deve essere nettamente spostato verso forme pirroloniche-2 del tipo (VII).



A prima vista sembra singolare che nell'equilibrio prendano il sopravvento le forme carboniliche (VII) su strutture come le (V) che dovrebbero essere stabilizzate dalla risonanza del sistema pirrolico, infatti il fenolo e la β-ossipiridina pare esistano solo in forma enolica ⁹⁾; tuttavia non è del tutto giustificato un paragone tra gli ossipirroli e queste sostanze data la particolare struttura del pirrolo e, per quanto molto poco sia noto sull'equilibrio tautomerico negli ossiderivati di altri sistemi eterociclici ⁹⁾, il fatto che la α-ossipiridina esista solo in forma carbonilica ¹⁰⁾ permette di dedurre che un raggruppamento ammidico si stabilizza a preferenza di un sistema aromatico.

D'altra parte ad alcuni altri composti di questo tipo è stata attribuita la forma Δ₄ pirrolinica (VIII) ¹¹⁾; si deve quindi pensare che la stabilizza-

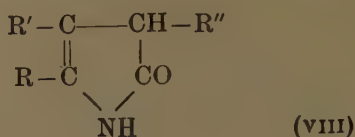
⁸⁾ PLIENINGER R., DECKER M. *Loc. cit.*

⁹⁾ WHELAND G. W. *Advanced Organic Chemistry*, III Ed., New York, Wiley J. e Sons, 1960, pp. 696 e 721-723.

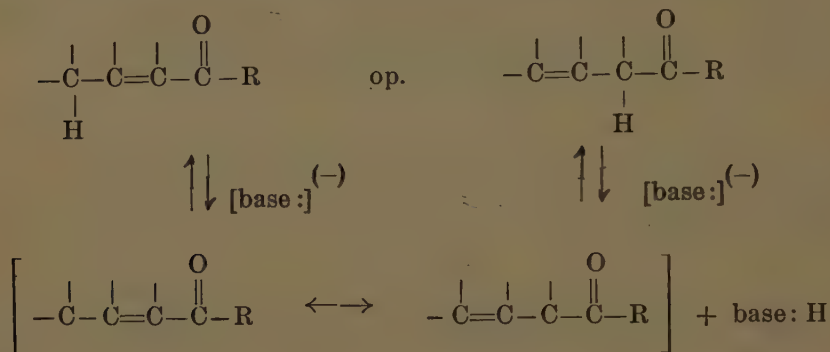
¹⁰⁾ WHELAND G. W. *Resonance in Organic Chemistry*. New York, Wiley J. e Sons, 1955, pag. 410.

¹¹⁾ EMERY W. O. *Ueber die Einwirkung von Ammoniak und Aminbasen auf Acetbernsteinsäureester und substituierte Acetbernsteinsäureester*, Ann. **260**, 137 (1890). — LUKES R. *Studien über die Pyrrolone C.*, 1929, I, 523. — LUKES R. *Ueber die Beständigkeit von Pyrrolonen gegen Wasser C.*, 1932, I, 3062. — GROB C. A., ANKLI P. *Über α-Pyrrolone. 1 Mit. Bildung und Reaktionen der 4-Carbhäthoxy-2-pyrrolone*. Helv. Chim. Acta, **32**, 2010 (1949). — Nei casi in discussione R = H,

zione di una struttura del tipo (VII) o di una del tipo (VIII) sia funzione della presenza di particolari sostituenti sulle diverse posizioni del ciclo.



Questa possibile alternativa trova riscontro nella tautomeria tricarbónica; per i composti carbonilici non saturi il riscaldamento in ambiente basico stabilisce, in alcuni casi, un equilibrio tra i due isomeri ¹²⁾:



La percentuale di una delle due forme, come la velocità della reazione, è funzione del tipo di sostituenti e della loro posizione nella catena ¹³⁾ e, per quanto non sia possibile fare uno stretto paragone tra i pirroloni ed i composti carbonilici non saturi ¹⁴⁾, qualitativamente si può dire che è giustificato considerare l'equilibrio spostato verso la forma (VIII) per i pirroloni di EMERY, LUKES e GROB ¹¹⁾ e verso la forma (VII) per i pirroloni β -dialchilsostituiti.

Il comportamento anomalo rispetto all'ossidazione con H_2O_2 del 2-formilpirrolo va ricercato nella possibilità, in questo caso, di un equilibrio tra una forma del tipo (VII) ed una del tipo (VIII) ($\text{R}=\text{R}'=\text{R}''=\text{H}$) ¹⁵⁾. Se si

¹²⁾ ALEXANDER E. R. *Principles of Ionic Organic Reactions*. New York, Wiley J. e Sons, 1950, pag. 281.

¹³⁾ ADKINS H. in *Gilman Organic Chemistry* II Ed., New York, Wiley J. e Sons, 1953, cap. 13, pag. 1041.

¹⁴⁾ La percentuale delle forme e la velocità della reazione variano notevolmente passando dall'estere all'acido, al nitrile; non è pertanto possibile prevedere quale possa essere l'influenza di un gruppo ammidico.

¹⁵⁾ Per quanto, ripetiamo, non sia possibile un confronto quantitativo, è notevole il fatto che l'equilibrio degli acidi α - β non saturi β - γ non saturi si sposti notevolmente verso la prima forma per introduzione di un alchile sul carbonio α (cfr. referenza ¹³⁾).

ammette che anche in questo caso l'acqua ossigenata funzioni da reattivo elettrofilo⁷⁾, una struttura come la (VIII) verrà ulteriormente attaccata, infatti il carbonio γ si può pensare polarizzato negativamente rispetto al carbonio β in dipendenza del legame col raggruppamento ammidico, il quale può esistere in forme mesomere con positivazione dell'azoto¹⁶⁾.

Nel caso dei pirroloni-2 β -disostituiti si può pensare che la velocità di trasformazione di forme del tipo (VII) in forme del tipo (VIII) sia tanto piccola da rendere irrilevante l'ulteriore azione da parte dell'ossidante.

PARTE SPERIMENTALE

OSSIDAZIONE DEL PIRROLO CON H_2O_2 IN PIRIDINA.

Alla soluzione di mg 500 di pirrolo in 2 cc di piridina, si aggiunge 1 cc di perneozonio Erba e si riscalda la miscela di reazione a 55-60°; dopo tre ore si aggiunge ancora 1 cc di perneozonio e si protrae il riscaldamento per altre tre ore. Durante il corso della reazione si formano notevoli quantità di nero di pirrolo per cui, dopo raffreddamento della miscela, si filtra per imbuto a setto poroso e si lava con cloroformio il precipitato. Dal filtrato, per allontanamento dei solventi a bassa pressione, si separano mg 80 di un olio bruno non cristallizzabile.

La soluzione alcolica di questo olio è stata portata su carta Whatmann n° 1. I cromatogrammi ottenuti con il metodo discendente e rivelati con il metodo di RYDON¹⁷⁾ presentano 3 macchie:

in Propanolo - Ligroina 80/90° - Ac. Acetico - Acqua (5 : 10 : 1 : 1)

traccia	Rf 0,33	non identificata
macchia	Rf 0,56	identificata (cromatografia in parallelo) come succinimide
piccola macchia	Rf 0,76	identificata (cromatografia in parallelo) come maleinimide

¹⁶⁾ Queste considerazioni trovano riscontro nella ben nota influenza che il gruppo trimetilammonio esercita sul nucleo benzenico.

¹⁷⁾ RYDON N. H. e SMITH P. W. *A New Method for the Detection of Peptides and Similar Compounds on Paper Chromatograms*. Nature, **169**, 922 (1952); il metodo è stato modificato come descritto in una precedente nota (cfr. referenza⁷⁾).

in Etile Acetato - Ligroina 80/90° - Ac. Acetico - Acqua (5 : 5 : 1 : 1)

traccia	Rf 0,32	non identificata
macchia	Rf 0,58	identificata (cromatografia in parallelo) come succinimide
piccola macchia	Rf 0,67	identificata (cromatografia in parallelo) come maleinimide

Se la miscela di reazione viene acidificata con HCl al 10% ed estratta in continuo con etere, si ottiene, per allontanamento del solvente, un olio bruno che, sottoposto all'analisi cromatografica, dà i medesimi risultati.

OSSIDAZIONE DEL 2-FORMILPIRROLO CON H_2O_2 IN PIRIDINA: *Complesso tra succinimide e piridina.*

Alla soluzione di g 1 di 2-formilpirrolo¹⁸⁾ in 2 cc di piridina, si aggiunge 1 cc di perneozonio Erba e si riscalda la miscela di reazione a 55-60°; dopo tre ore si aggiunge ancora 1 cc di perneozonio e si protrae il riscaldamento per altre tre ore¹⁹⁾. Si lascia a sè per 12 ore, quindi si allontanano a bassa pressione l'acqua e la piridina riscaldando fino a 60°. Si ottengono g 1,3 di un olio giallo nel quale, mediante l'analisi cromatografica eseguita secondo le modalità precedentemente descritte, si rivela la presenza di un solo prodotto di natura ammidica con

Rf 0,50 in Propanolo - Ligroina 80/90° - Ac. Acetico - Acqua (5 : 10 : 1 : 1)
 Rf 0,51 in Propanolo - Ligroina 80/90° - Ac. Acetico - Acqua (7 : 10 : 1 : 1)
 Rf 0,63 in Etile Acetato - Ligroina 80/90° - Ac. Acetico - Acqua (5 : 5 : 1 : 1)¹⁵⁾.

L'olio, sottoposto all'analisi cromatografica discendente usando come fase mobile Etanolo-Ammoniaca al 33%-Acqua (80 : 4 : 16) e come rivelatore DZA²⁰⁾ mostra la presenza di un solo prodotto a Rf 0,69 identificato come acido α -pirrolcarbossilico mediante cromatografia in parallelo con un campione di questo acido.

L'olio, posto in un sublimatore e riscaldato a 80° alla pressione di 0,2 mm, lascia separare mg 450 di un solido bianco, abbastanza solubile in acqua e in alcool, poco solubile in etere e nelle ligroine, cristallizzabile da acetato di etile, che risublimato si presenta in aghi a p. f. 91-92°.

¹⁸⁾ *Organic Syntheses*, Vol. 36, New York, Wiley J. e Sons, 1956, pag. 74.

¹⁹⁾ Durante il corso della reazione non si nota formazione di nero di pirrolo. La formazione di CO_2 è stata messa in evidenza facendo gorgogliare i gas non condensabili in una soluzione di $Ba(OH)_2$.

²⁰⁾ NICOLAUS R. A. e MANGONI L. *Sugli Acidi Pirrolcarbonici. Nota VII. Comportamento chimico e cromatografico di Acidi C-metilpirrolcarbonici*. Ann. di Chim., **46**, 864 (1956).

Analisi:

	trov. %:	C 60,60;	H 5,95;	N 15,53;
per $C_9H_{10}O_2N_2$	calc. %:	60,66;	5,66;	15,72.

Peso molecolare: trov. (crioscopia in canfora) 182,7 ;

calc. per $C_9H_{10}O_2N_2$ 179,17.

Milligrammi 500 del complesso fra succinimide e piridina si sciolgono nella minima quantità di HCl 2N. La soluzione si estrae ripetutamente con cloroformio quindi si alcalinizza con NaOH al 15% e si estrae con etere.

La soluzione cloroformica, seccata su $MgSO_4$ e svaporata, lascia separare mg 250 di un solido bianco cristallino che, ricristallizzato da alcool, presenta p. f. 125-126° ed è stato identificato come succinimide mediante punto di fusione in miscela e analisi cromatografica di confronto su carta.

La soluzione eterea, seccata su $MgSO_4$ e svaporata lascia separare un olio che è stato identificato come piridina mediante cromatografia di confronto su carta ²¹⁾.

OSSIDAZIONE DEL 2-FORMILPIRROLO CON H_2O_2 .

A mg 500 di 2-formilpirrolo sospesi in 1 cc di acqua distillata si aggiunge 1 cc di perneozonio Erba e si riscalda a 55-60° per tre ore. Dopo aver aggiunto un altro cc di perneozonio si protrae il riscaldamento ancora per tre ore. Per allontanamento dei solventi a bassa pressione si separa un olio scuro nel quale, mediante l'analisi cromatografica, si rivela la presenza di una sola sostanza a carattere ammidico.

L'olio posto in un sublimatore e riscaldato a 100° a 0,2 mm lascia separare mg 200 di un solido bianco identificato come succinimide mediante p. f. in miscela e analisi cromatografica di confronto su carta.

Napoli - Istituto di Chimica Organica, 5 gennaio 1961.

RIASSUNTO. — L'ossidazione con H_2O_2 in presenza di piridina del 2-formilpirrolo porta ad un complesso della succinimide con la piridina; in assenza di piridina si ottiene succinimide. Si dà una interpretazione del comportamento anomalo del 2-formilpirrolo rispetto ai 2-formilpirroli β -disostituiti nella reazione di ossidazione con H_2O_2 .

SUMMARY. — Oxidation of 2-formylpyrrole with H_2O_2 in presence of pyridine yields a complex of the succinimide with pyridine; without the pyridine, succinimide is obtained. An interpretation is given of the anomalous behaviour of the 2-formylpyrrole with respect to the β -disubstituted 2-formylpyrroles in the oxydation reaction with H_2O_2 .

²¹⁾ Per rivelare la piridina il cromatogramma è stato spruzzato con cloruro di picrile e quindi tenuto in atmosfera di ammoniacca per 30 minuti. Appaiono macchie rosse su fondo giallo. — (LEDERER E. *Chromatographie en Chimie Organique et Biologique*, Vol. II, Paris, Masson, 1960, pag. 712).

In tema di sicurezza delle strutture ad arco

*Nota del Prof. Ing. Aldo Raithel e del Dott. Ing. Luigi Adriani
presentata dal socio V. Franciosi*

(Adunanza del 7 gennaio 1961)

1. PREMESSA.

La pratica del procedimento per la determinazione del grado di sicurezza a rottura si basa, com'è noto, su un metodo d'iterazione che conduce al ricercato coefficiente di sicurezza s quale comune limite delle due classi dei coefficienti cinematicamente sufficienti γ , e staticamente ammissibili ψ .

La ricerca di una coppia di valori (γ , ψ) va eseguita per un'assegnata posizione degli snodi plastici e consente, in generale, una nuova scelta degli stessi che permette di stringere il risultato sempre più da vicino.

Nella presente nota la ricerca viene condotta, invece, con riferimento ai soli coefficienti γ , essendo noto come il limite inferiore di questa classe coincida col grado di sicurezza s ; tale modo di operare risulta notevolmente vantaggioso in quei casi ove sia facilmente esprimibile la legge di interdipendenza tra le rotazioni che si verificano a rottura negli snodi plastici. In particolare tale procedimento risulta di immediata applicazione agli archi la cui curva d'asse sia assimilabile ad una parabola, caso per il quale si riportano in appendice le tabellazioni necessarie alla soluzione numerica.

2. RICERCA DI UN COEFFICIENTE γ .

Con riferimento ad una generica struttura iperstatica si indichi con

M_{oi} — il momento limite nella sezione i -ma

$\Delta\varphi_i$ — la rotazione relativa nello snodo plastico i -mo

F_j — la forza esterna generica agente sulla sezione j -ma

δ_j — lo spostamento, nella direzione di F_j , del suo punto di applicazione.

Posto il crearsi di un numero n di plasticizzazioni tali da rendere una volta labile il sistema, le $\Delta\varphi_i$ e i δ_j restano tutti univocamente determinati a meno di un comune moltiplicatore (inessenziale allo sviluppo dei calcoli) e la condizione limite di equilibrio definisce, per il coefficiente γ , il valore:

$$(1) \quad \gamma = \frac{\sum M_{oi} \Delta\varphi_i}{\sum F_j \delta_j}$$

il cui minimo (s) va ricercato con riferimento alle ∞^n possibili posizioni degli snodi plastici.

Al fine di semplificare tale determinazione conviene porre la (1) in forma diversa, esprimendo il denominatore, invece che mediante il lavoro delle forze esterne, mediante quello di un qualunque sistema di forze equilibranti, quali, in particolare, le caratteristiche della sollecitazione negli snodi plastici. Ben s'intende che data la iperstaticità del sistema, tale scelta di caratteristiche può farsi arbitrariamente nell'ambito di quelle che rispettano le condizioni di equilibrio e pertanto per qualunque valore prefissato delle incognite iperstatiche.

Detto, allora, M_i il momento nella sezione i -ma relativo al generico sistema equilibrante, la (1) può porsi:

$$(2) \quad \gamma = \frac{\sum M_{oi} \Delta \varphi_i}{\sum M_i \Delta \varphi_i}$$

che consente, in modo formalmente indipendente dalla posizione e dal valore delle forze esterne, di operare sulle sole $\Delta \varphi_i$ e nel contempo di ridurre, in generale, il denominatore ad un solo termine mediante un'opportuna scelta delle $(n-1)$ incognite iperstatiche. Dando, infatti, a queste valori tali da annullare $(n-1)$ momenti M_i , e sia il solo M_K diverso da zero, la (2) diventa:

$$(3) \quad \gamma = \frac{\sum M_{oi} \Delta \varphi_i}{M_K \Delta \varphi_K}$$

Scegliendo, in particolare, $\Delta \varphi_K = 1$ quale parametro arbitrario della deformata di collasso, la (3) assume la forma definitiva:

$$(3') \quad \gamma = \frac{1}{M_K} \sum M_{oi} \Delta \varphi_i^*$$

dove le $\Delta \varphi_i^*$ s'intendono calcolate proprio per $\Delta \varphi_K = 1$.

3. DETERMINAZIONE DEL COEFFICIENTE s .

Con riferimento allo schema di carico in esame, il coefficiente s viene individuato con la condizione di minimo della (3') innanzi specificata, che ben si adatta a quei casi in cui il numero degli snodi plastici, o quanto meno quello delle loro posizioni incognite, sia limitato. È questo, ad esempio, il caso degli archi che costituisce l'oggetto del presente studio e che richiede, nell'ipotesi più generale di arco incastrato, la determinazione di quattro snodi plastici. In effetti tale numero risulta sempre inferiore o per l'esistenza di cerniere effettive (in cui sarà, pertanto, $M_o = 0$) o per l'essere nota a priori

la posizione di alcuni snodi, quali quelli alle imposte, in genere sempre presenti.

In quanto segue, per completezza di trattazione, si fa riferimento al caso più generale, schematizzato in fig. 1.

Le posizioni degli snodi plastici incogniti sono definite dalle loro ascisse $x_2 = \xi_2 l$ e $x_3 = \xi_3 l$.

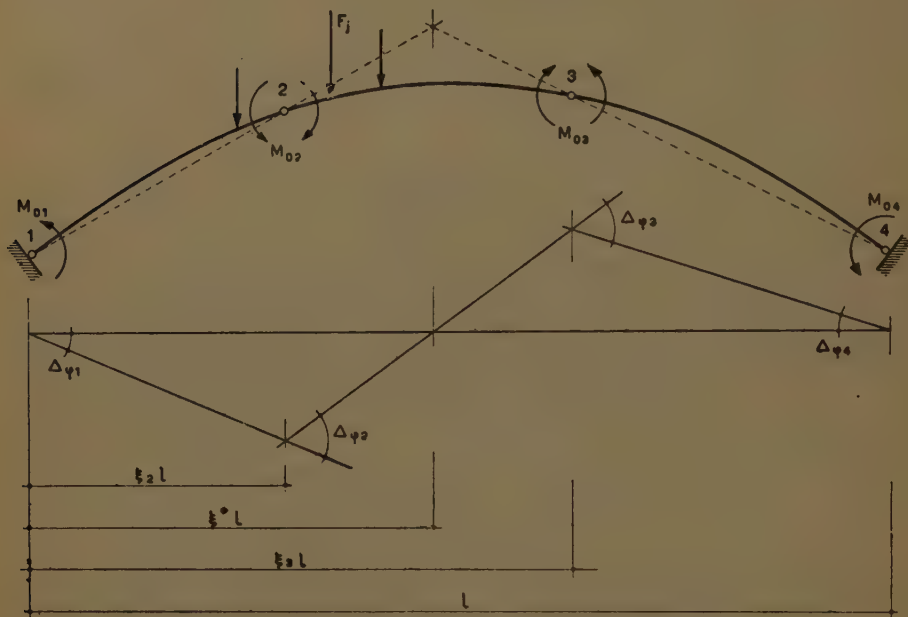


Fig. 1.

S'inizia il procedimento fissando ad arbitrio una delle due posizioni, ad esempio $\xi_3 l$, e scegliendo, quindi, incognite iperstatiche tali da annullare tutti i momenti ad eccezione di quello nella sezione 2. Basta, a tal fine, porre direttamente $M_1 = M_4 = 0$ ed attribuire alla spinta H valore tale da annullare in 3 il momento M'_3 di trave appoggiata ($H \cdot y_3 = M'_3$). Sarà, in tal caso, $M_K = M_2$, e, ricordando che $\Delta\varphi_k = \Delta\varphi_2 = 1$, la (3') si scrive:

$$(A) \quad \gamma = \frac{1}{M_{\square}} (M_{01} \Delta\varphi^*_{1} + M_{02} + M_{03} \Delta\varphi^*_{3} + M_{04} \Delta\varphi^*_{4})$$

Essendo noti i valori che M_2 assume all'ascissa generica $\xi_2 l$ ($M_2 = M'_2 - H \cdot y_2$), e potendosi, del pari, calcolare i valori delle $\Delta\varphi_i^*$ al variare di questo parametro, è numericamente possibile determinare per quale

valore di esso γ attinge il suo minimo. Tale γ_{min} fornirebbe il ricercato s ove la posizione $\xi_3 l$, inizialmente prefissata, fosse quella effettiva.

Si itera, allora, il procedimento ponendo, questa volta, lo snodo fisso nella sezione $\xi_2 l$ che ha fornito il γ_{min} e facendo variare la sezione $K = 3$ in cui si pone, questa volta, $\Delta\varphi_k = \Delta\varphi_3 = 1$, e determinando, quindi, il minimo dell'espressione:

$$(B) \quad \gamma = \frac{1}{M_3} (M_{01} \Delta\varphi^*_1 + M_{02} \Delta\varphi^*_2 + M_{03} + M_{04} \Delta\varphi^*_4)$$

Se tale minimo coincide con quello fornito dalla (A) e corrisponde, quindi, alla posizione $\xi_3 l$ fissata nel primo tentativo, esso fornisce l'effettivo valore di s coincidendo col minimo valore di γ rispetto ad ambedue i parametri del problema $\xi_2 l$ e $\xi_3 l$. In caso contrario si itera il procedimento partendo, come sezione fissa, dalla ultima determinata fino a raggiungere tale condizione.

Nella pratica, come appare dagli esempi che seguono, si ottiene una rapida convergenza, bastando, in generale, due tentativi per raggiungere il risultato effettivo o, quanto meno, un sufficiente grado di approssimazione.

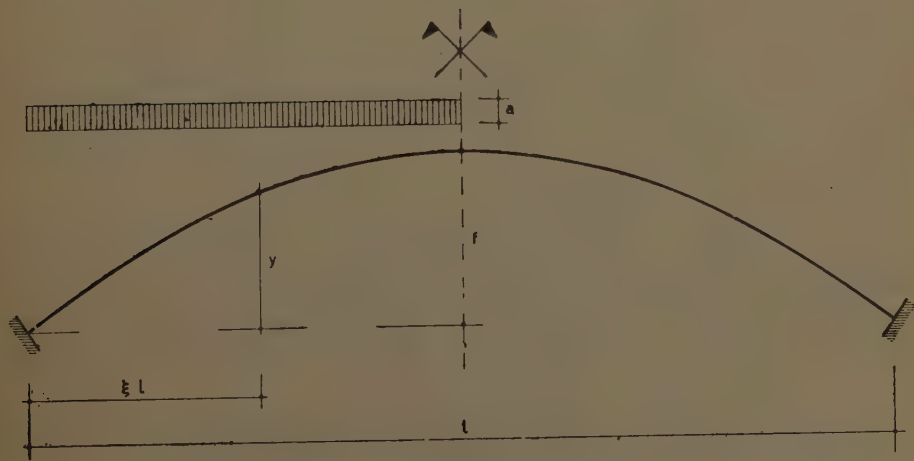


Fig. 2.

4. APPLICAZIONI NUMERICHE.

Applicazione n. 1. — Sia l'arco incastrato di fig. 2, con curva d'asse a profilo parabolico e momento limite $M_o = \text{cost}$, sottoposto ad un carico a uniformemente distribuito sulla semiluce.

Il momento M' di trave appoggiata ha le espressioni:

$$M' = \left(\frac{3}{8} \xi - \frac{1}{2} \xi^2 \right) a l^2 \quad \text{per } 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$$

$$M' = \frac{1}{8} (1 - \xi) a l^2 \quad \text{per } \frac{1}{2} \leq \xi \leq 1$$

Nella tabellina che segue si riportano le ordinate y dell'asse ed i momenti M' alle varie ascisse ξ :

ξ	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
y/f	0.19	0.36	0.51	0.64	0.75	0.84	0.91
M'/al^2	0.0175	0.0325	0.0450	0.0550	0.0625	0.0675	0.0700

ξ	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70
y/f	0.96	0.99	1.00	0.99	0.96	0.91	0.84
M'/al^2	0.0700	0.0675	0.0625	0.0562	0.0500	0.0437	0.0375

ξ	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	ξ
y/f	0.75	0.64	0.51	0.36	0.19	y/f
M'/al^2	0.0312	0.0250	0.0187	0.0125	0.0062	M'/al^2

Essendo $M_0 = \text{cost.}$, le (A) e (B) diventano, rispettivamente:

$$(A') \quad \gamma = \frac{1 + \sum_{1,3,4} \Delta \varphi_i^*}{M_2} \cdot M_0$$

$$(B') \quad \gamma = \frac{1 + \sum_{1,2,4} \Delta \varphi_i^*}{M_3} \cdot M_0$$

dove, come detto in precedenza, il momento M_2 (o, rispettivamente, M_3) va determinato assegnando alle incognite sovrabbondanti del problema valori tali da annullare i momenti nelle presunte sezioni di plasticizzazione **1**, **3**, **4** (o, rispettivamente, **1**, **2**, **4**).¹⁾

I° tentativo. — Fissato $\xi_3 = 0,80$, la condizione $M_3 = 0$ fornisce:

$$H = \frac{M'_3}{y_3} = \frac{0,0250}{0,64} \frac{al^2}{f} = 0,0391 \frac{al^2}{f}.$$

Con questo valore di H si calcola il momento corrente $M_2 = M'_2 - H y_2$, riportato nel seguente prospetto insieme alle quantità $(1 + \Sigma \Delta \varphi_i^*)^2$ ed ai rapporti (A') :

ξ_2	$1 + \Sigma \Delta \varphi_i^*_{1,3,4}$	M_2/al^2	$\gamma \cdot al^2/M_0$
0.20	3.2000	0.0300	106.67
0.25	3.3750	0.0332	101.66
0.30	3.5000	0.0347	100.86
0.35	3.5750	0.0345	103.62
0.40	3.6000	0.0325	110.77

Il minimo γ si verifica per $\xi_2 = 0,30$.

II° tentativo. — Si itera il procedimento fissando, ora, la sezione di plasticizzazione **2** all'ascissa $\xi_2 = 0,30$ determinata nel I° tentativo. Operando analogamente si ha:

$$H = \frac{M'_2}{y_2} = \frac{0,0675}{0,84} \frac{al^2}{f} = 0,0804 \frac{al^2}{f}$$

e, successivamente, si hanno i dati riportati nella seguente tabella riassuntiva:

¹⁾ Si soddisfa a questa condizione ponendo direttamente $M_1 = M_4 = 0$ ed assegnando ad H il valore per cui sia $M_3 = 0$ (o $M_2 = 0$).

²⁾ I valori delle rotazioni $\Delta \varphi_i^*$ si leggono nella tabella II in appendice.

ξ_3	$1 + \sum_{1,2,4} \Delta \varphi_i$	M_3/al^2	$\gamma \cdot al^2/M_0$
0.60	2.8000	0.0271	103.32
0.65	2.8166	0.0294	95.80
0.70	2.8000	0.0300	93.33
0.75	2.7500	0.0291	94.50
0.80	2.6667	0.0264	101.01

Si ottiene γ_{min} per $\xi_3 = 0.70$.

Un ulteriore tentativo confermerebbe l'ascissa di plasticizzazione $\xi_2 = 0.30$, cosa, d'altra parte, rigorosamente prevedibile, in questa fase di calcolo, attesa la simmetria della struttura e la emisimmetria del diagramma dei momenti.

È pertanto

$$s = \gamma_{min} = 93.33 \frac{M_0}{al^2}$$

in accordo con un risultato già noto ³⁾.

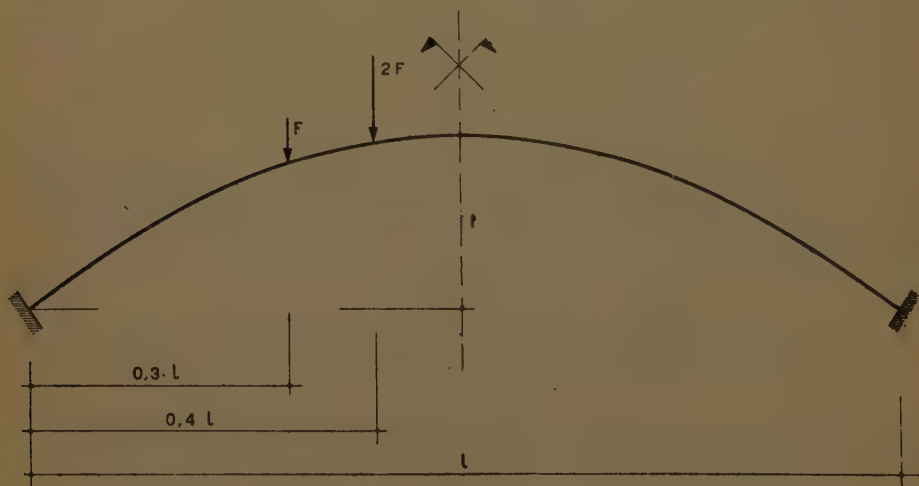


Fig. 3.

³⁾ Cfr. A. RAITHEL, *Il grado di sicurezza nei ponti ad arco*, Giornale del Genio Civile, Roma, Settembre 1959.

Applicazione n. 2. — Si abbia lo stesso arco dell'esercizio precedente, soggetto, questa volta, a due forze concentrate di valore F e $2F$, agenti, rispettivamente alle ascisse $0,3l$ e $0,4l$ (fig. 3).

Le espressioni analitiche dei momenti di trave appoggiata sono le seguenti:

$$\begin{aligned} M' &= 1,9 \xi Fl && \text{per } 0 \leq \xi \leq 0,3 \\ M' &= (0,9 \xi + 0,3) Fl && \text{per } 0,3 \leq \xi \leq 0,4 \\ M' &= 1,1 (1 - \xi) Fl && \text{per } 0,4 \leq \xi \leq 1 \end{aligned}$$

ed i loro valori si leggono nella tabella qui sotto riportata, insieme alle ordinate y dell'asse dell'arco:

ξ	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
y/f	0.19	0.36	0.51	0.64	0.75	0.84	0.91
M'/Fl	0.0950	0.1900	0.2850	0.3800	0.4750	0.5700	0.6150

ξ	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70
y/f	0.96	0.99	1.00	0.99	0.96	0.91	0.84
M'/Fl	0.6600	0.6050	0.5500	0.4950	0.4400	0.3850	0.3300

ξ	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	ξ
y/f	0.75	0.64	0.51	0.36	0.19	y/f
M'/Fl	0.2750	0.2200	0.1650	0.1100	0.0550	M'/Fl

Sono ancora valide le (A') e (B').

I° tentativo. — Fissato $\xi_3 = 0,70$, e posto direttamente $M_1 = M_4 = 0$, la condizione $M_3 = 0$ viene soddisfatta dal valore della spinta:

$$H = \frac{M'_3}{y_3} = \frac{0.3300}{0.84} \frac{Fl}{f} = 0,3929 \frac{Fl}{f}.$$

Si riportano di seguito i momenti $M_2 = M'_2 - H \cdot y_2$, calcolati con la H sopra determinata, le quantità $(1 + \sum \Delta \varphi_i^*)$, nonchè i rapporti (A') :

1,3,4

ξ_2	$1 + \sum_{1,3,4} \Delta \varphi_i^*$	M_2/FI	$\gamma \cdot FI/M_0$
0.30	2.8000	0.2400	11.67
0.35	2.8166	0.2575	10.94
0.40	2.8000	0.2829	9.90
0.45	2.7500	0.2161	12.73
0.50	2.6667	0.1571	16.97

Il coefficiente γ risulta minimo all'ascissa $\xi_2 = 0,40$.

II° tentativo. — Si itera il procedimento, fissando la sezione di plasticizzazione all'ascissa $\xi_2 = 0,40$ determinata nel I° tentativo.

Operando come sopra si ha:

$$H = \frac{M'_2}{y_2} = \frac{0.6600}{0.96} \frac{FI}{f} = 0,6875 \frac{FI}{f}$$

e, successivamente:

ξ_3	$1 + \sum_{1,3,4} \Delta \varphi_i^*$	M_3/FI	$\gamma \cdot FI/M_0$
0.60	2.4000	0.2200	10.91
0.65	2.4374	0.2406	10.13
0.70	2.4500	0.2475	9.90
0.75	2.4374	0.2406	10.13
0.80	2.4000	0.2200	10.91

Il valor minimo di γ si verifica all'ascissa $\xi_3 = 0,70$, già fissata nel I° tentativo, e coincide, quindi, con quello precedentemente trovato.

Esso è, pertanto, il coefficiente di sicurezza s , il cui valore risulta:

$$s = \gamma_{min} = 9,90 \frac{M_0}{Fl} .$$

Appendice. — Le tabelle I e II sono calcolate, come si è detto, con riferimento agli archi parabolici. In particolare la prima tabellazione è stata eseguita assumendo quale parametro arbitrario del moto rigido la rotazione in corrispondenza del punto di nullo della catena cinematica, rotazione che si è posta uguale ad uno (fig. 4).

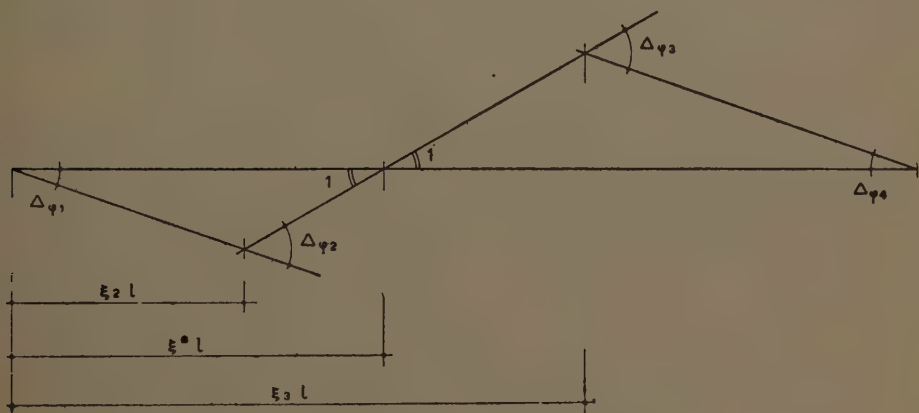


Fig. 4.

Le relazioni geometriche tra ascisse ed angoli sono le seguenti:

$$(I) \quad \begin{aligned} \xi^* &= \frac{\xi_3}{1 - \xi_2 + \xi_3} ; \quad \Delta\varphi_1 = \frac{\xi^*}{\xi_2} - 1 ; \quad \Delta\varphi_2 = \frac{\xi^*}{\xi_2} \\ \Delta\varphi_3 &= \frac{1 - \xi^*}{1 - \xi_3} ; \quad \Delta\varphi_4 = \frac{\xi_3 - \xi^*}{1 - \xi_3} \end{aligned}$$

La seconda tabellazione contempla, invece, sia il caso di $\Delta\varphi_2 = 1$, che quello di $\Delta\varphi_3 = 1$, immediatamente deducibile dal primo, ed è stata sviluppata in base alle seguenti relazioni analitiche:

$$(II) \quad \begin{aligned} \Delta\varphi_1^* &= 1 - \frac{\xi_2}{\xi_3} (1 - \xi_2 + \xi_3) ; \quad \Delta\varphi_3^* = \frac{\xi_2}{\xi_3} \frac{1 - \xi_2}{1 - \xi_3} \\ \Delta\varphi_4^* &= \xi_2 \frac{\xi_3 - \xi_2}{1 - \xi_3} \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] GREENBERG e PRAGER. *Limit design of beams and frames*. Proceedings of the A.S.C.E., Vol. 77. New York, 1951.
- [2] FRANCIOSI V. *Il teorema fondamentale del calcolo a rottura*. L'Ingegnere, 1955, n. 12.
- [3] NEAL B. G. *The Plastic Methods of Structural analysis*. Chapman a. Hall. London, 1956.
- [4] HODGE. *Plastic Analysis of Structures*. Mac Graw Hill, 1959.

RIASSUNTO. — La ricerca del grado di sicurezza a rottura viene condotta tramite la determinazione del minimo coefficiente cinematicamente sufficiente; una particolare espressione del lavoro esterno consente l'applicazione di un procedimento di iterazione rapidamente convergente. Si prende particolarmente in esame il problema degli archi, per il quale si riportano estese tabellazioni, e si sviluppano due esempi numerici.

SUMMARY. — The safety load factor is sought by computing the minimum kinematically admissible factor. A special expression of the external work allows a rapid trial-and-error procedure to be applied.

This procedure is applied to compute the load factor of arches; some comprehensive tables and two numerical examples are reported too.

TABELLA I.

[illegible]

TABELLA II.

ξ_2	$\xi_3=0,10$			$\xi_3=0,15$			$\xi_3=0,20$			$\xi_3=0,25$			$\xi_3=0,30$			$\xi_3=0,35$			$\xi_3=0,40$			$\xi_3=0,45$			$\xi_3=0,50$			$\xi_3=0,55$			$\xi_3=0,60$			$\xi_3=0,65$			$\xi_3=0,70$			$\xi_3=0,75$			$\xi_3=0,80$			$\xi_3=0,85$			$\xi_3=0,90$			$\xi_3=0,95$																																																																																																																																																																																																							
	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$																																																																																																																																																																																																								
	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$	$\Delta\varphi^*_4$	$\Delta\varphi^*_1$	$\Delta\varphi^*_3$

Sull'attività « pozzolanica » delle zeoliti.

Nota II. - Reattività dell'analcime con soluzione d'idrossido di calcio.

*Nota del prof. Riccardo Sersale e del dott. Vittorio Sabatelli,
presentata dal socio ord. G. Malquori*

(Adunanza del dì 7 gennaio 1961)

Nel proseguimento delle ricerche intraprese con lo scopo di documentare compiutamente l'attitudine a fissare la calce da parte di quei minerali zeolitici¹⁾ che abbiamo indicato come i termini più frequentemente predominano nella massa cementante di una numerosa serie di tufi vulcanici di differente tipo mineralogico e chimico²⁾, con la presente nota diamo conto dei risultati della sperimentazione in base alla quale abbiamo rilevato: entità e velocità di fissazione della calce a partire da un campione, convenientemente polverizzato, di *analcime* ($\text{NaAlSi}_2\text{O}_6 \cdot \text{H}_2\text{O}$): uno tra i più comuni minerali zeolitici, isotipico con la leucite, della quale spesso rappresenta un prodotto di alterazione.

Il campione fa parte della *Collezione Generale* esistente presso il Museo di Mineralogia della nostra Università. È stato messo a nostra disposizione dal Direttore di quell'Istituto Prof. SCHERILLO, che qui ringraziamo sentitamente. La località di provenienza del minerale in oggetto è la Nuova Scozia (America Sett.).

In considerazione del fatto che in una precedente indagine uno di noi ha posto in luce che l'*analcime* rappresenta il costituente predominante nella massa di fondo, cementante, dei tufi verdi della regione flegrea³⁾, abbiamo creduto interessante comprovare la medesima attitudine sopra ricordata anche a partire da un campione, di pari finezza di macinazione, di tufo verde ischitano, conformemente a quanto già fatto per il tufo giallo flegreo e per il minerale zeolitico predominante nella sua massa cementante: l'*herschelite*⁴⁾.

¹⁾ SERSALE R. e SABATELLI V. — Sull'attività « pozzolanica » delle zeoliti. Nota I. Reattività dell'*herschelite* con soluzione d'idrossido di calcio. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., [4], XXVII, pp. 263-282. Napoli (1960). — La Ric. Sc., 12, pp. 2121-2127. Roma (1960).

²⁾ La relativa bibliografia compare nel lavoro citato a nota ¹⁾.

³⁾ SERSALE R. — Costituzione dei tufi verdi della regione flegrea. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., [4], XXVI, pp. 355-373. Napoli (1959).

⁴⁾ SERSALE R. e SABATELLI V. — L. c. a nota ¹⁾.

Di pari passo con le determinazioni analitiche che ci hanno fornito i dati relativi all'entità ed alla velocità di fissazione della calce da parte del minerale e del « tufo zeolitico », abbiamo inoltre eseguite sistematicamente delle osservazioni in microscopia elettronica, nell'intento di rilevare anche la morfologia dei prodotti di neoformazione, originatisi per effetto della trasformazione della materia cimentata, sotto l'azione della soluzione d'idrossido di calcio.

Di quanto sopra tratteggiato, riferiamo dettagliatamente nel corso della nota.

* * *

Il campione di *analcime* adoperato nella presente ricerca, sottoposto ad analisi chimica, ha fornito i risultati riportati in tab. I.

TABELLA I.

SiO ₂	54,02
Al ₂ O ₃	22,93
Fe ₂ O ₃	0,32
CaO	0,78
Na ₂ O	13,05
H ₂ O ⁺	8,40
	<hr/>
	99,50

Il relativo diffrattogramma compare in fig. 1 (A).

Per quanto attiene al campione di tufo verde adoperato, ricordiamo che le sue caratteristiche costituzionali hanno formato oggetto di una ricerca a parte, alla quale si rimanda ⁵⁾. Ci limiteremo qui a riportare, nella stessa fig. 1, solo il relativo diffrattogramma, eseguito sul prodotto tal quale (B) le cui linee, debitamente computate, furono attribuite: all'*analcime* ed all'*ortoclasio* (C e C') ⁶⁾.

* * *

Le modalità sperimentali alle quali ci siamo uniformati per la preparazione della intera serie di sospensioni acquose: idrossido di calcio/minerale o « tufo zeolitico », necessarie per i saggi analitici e per le osservazioni al

⁵⁾ SERSALE R. — L. c. a nota ³⁾.

⁶⁾ SERSALE R. — *Ricerche sulla zeolitizzazione dei vetri vulcanici per trattamento idrotermale*. Nota IV. *Analcimizzazione di materiali piroclastici, alcali-trachitici*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., [4], XXVI, pp. 345-354. Napoli (1959).

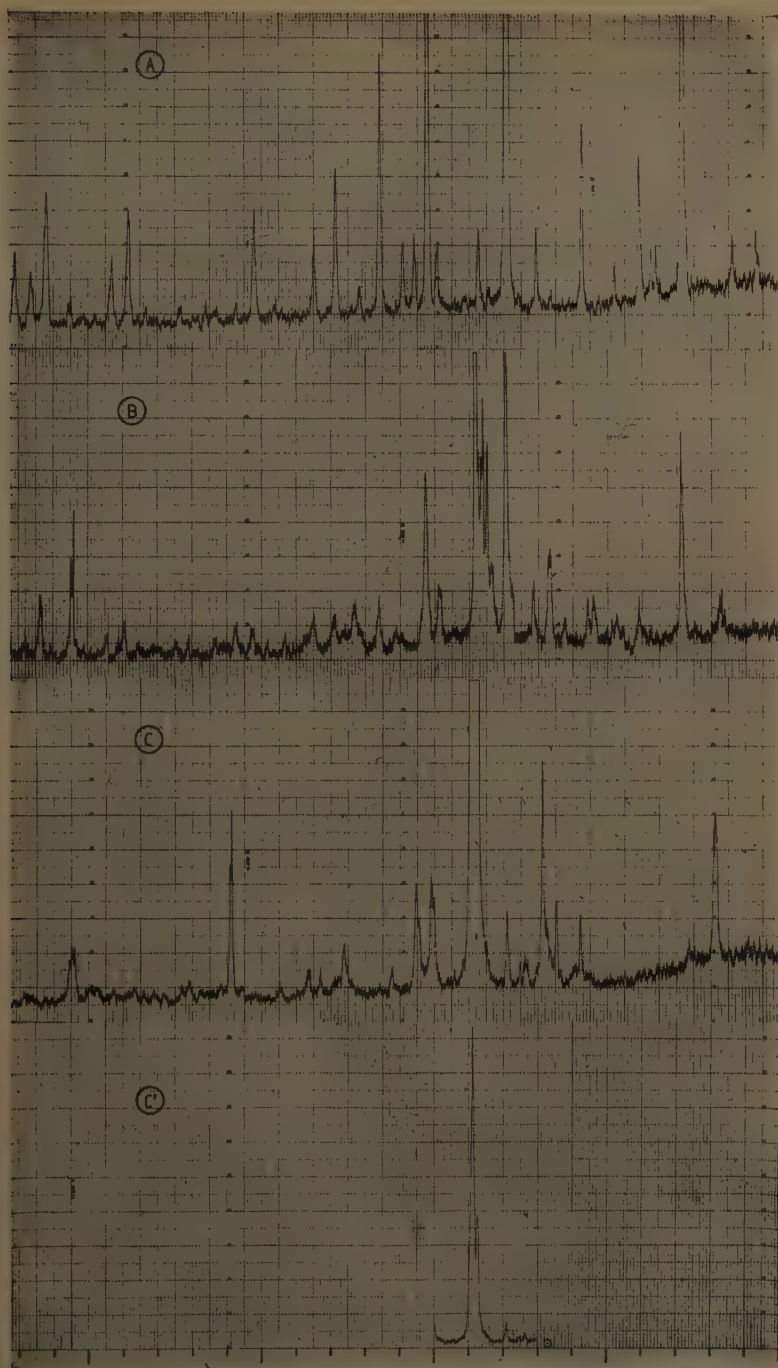


Fig. 1. — Radiazione $\text{CuK}\alpha$. Zona compresa fra 5 e $27,5^\circ$. — (A) Analcime; (B) Tufo verde ischitano; (C) Ortoclasio sodifero (Ischia); (C') lo stesso. (sensibilità dello strumento: $\frac{1}{6}$ di (C)).

microscopio, sono state dettagliatamente riportate in due precedenti lavori ai quali rimandiamo ⁷⁾, limitandoci qui ad esporre solo i risultati ottenuti.

In tab. II compaiono infatti i dati analitici relativi alla quantità di calce fissata, in funzione del tempo, da parte del minerale zeolitico, previamente polverizzato fino a non lasciar residuo sullo staccio da 9450 maglie per cm² e mantenuto, in costante agitazione alla temperatura ambiente, a contatto con soluzione perennemente satura d'idrossido di calcio. *R* indica il rapporto percentuale iniziale calce/*analcime*, che, come si vede, è stato del: 20%, 30%, 40%, 60%.

Nella tabella compare, per ciascun rapporto *R*, la percentuale di CaO fissata, desunta sulla base della prima determinazione analitica che ha rivelato l'insaturazione della soluzione di contatto rispetto all'idrossido di calcio, tenuto conto, s'intende, della presenza degli alcali in soluzione, nonchè il relativo tempo, in giorni, occorso perchè l'*analcime* fissi detta quantità di calce.

TABELLA II.

Percentuale di CaO fissata dall'*analcime* in funzione del tempo.

Rapporto percentuale iniziale CaO/ <i>analcime</i>	Tempo di contatto (giorni)	Grammi di CaO fissati %
20 %	18	10,80
30 %	42	20,60
40 %	85	31,90
60 %	234	52,00

L'andamento del processo in studio risulta chiaramente dall'esame del grafico riportato in fig. 2 e ricavato sulla base dei dati tabellati. In esso i punti contraddistinti da triangoli corrispondono ai dati analitici che compaiono in tab. II e che, come già detto, esprimono le quantità di calce fissata, in funzione del tempo di contatto con soluzione mantenuta perennemente satura di Ca(OH)₂.

⁷⁾ SERSALE R. e SABATELLI V. — L. c. a nota ¹⁾, pag. 266.

— SERSALE R. e GIORDANO-ORSINI P. — Idratazione e trasformazione della loppa d'alto forno per contatto con soluzione d'idrossido di calcio. Atti Acc. Sc. fis. e mat., [3], III, n. 9, pag. 3. Napoli (1960). — Atti Convegno Produz. e Applicaz. cementi Siderurgici. (Fondaz. Politecnica Mezzog. Italia), pp. 233-248. Napoli (1960).

I punti contraddistinti da cerchietti si riferiscono invece a titolazioni di controllo su soluzioni non contenenti più idrossido di calcio come corpo di fondo.

Può constatarsi che l'*analcime*, in contatto con soluzione perennemente satura d'idrossido di calcio, ne fissa notevoli quantità. Esse sono infatti pari a circa 15 gr., per ogni cento grammi di minerale, dopo 28 giorni di contatto, a circa 35 gr., dopo 100 giorni, a circa 50 gr., dopo 200 giorni.

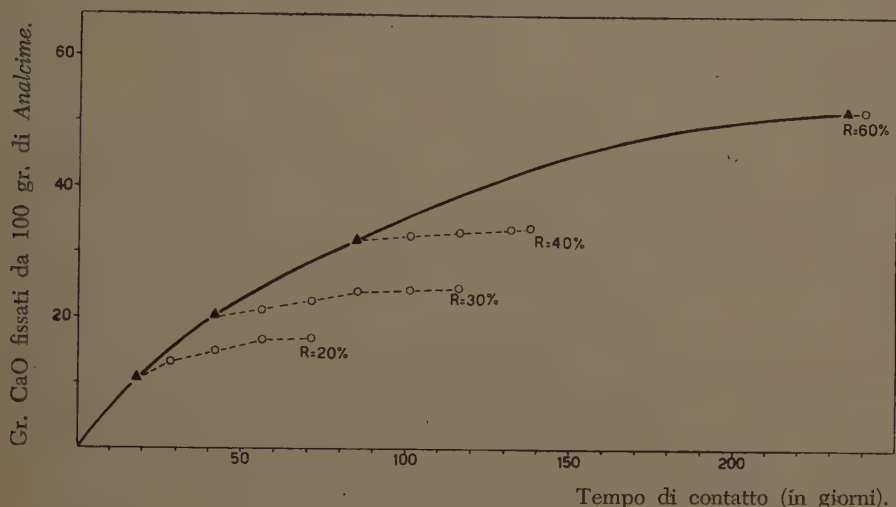


Fig. 2. — Andamento del processo di fissazione della calce in funzione del tempo per parte dell'*analcime*.

(R = rapporto percentuale iniziale $\text{CaO}/\text{analcime}$. I punti contraddistinti da triangoli corrispondono alla prima determinazione analitica che ha rivelato l'insaturazione della soluzione di contatto rispetto al $\text{Ca}(\text{OH})_2$. I punti contraddistinti da cerchietti corrispondono a titolazioni di controllo, eseguite su soluzione non più satura di $\text{Ca}(\text{OH})_2$).

Dal raffronto di questi ultimi dati con quelli che abbiamo ottenuti dalla precedente ricerca eseguita, in identiche condizioni sperimentali, a partire da un minerale zeolitico meno comune: l'*herschelite*⁸⁾, risalta che la velocità di fissazione della calce è, per l'*analcime*, notevolmente minore. Infatti l'*herschelite* dopo 28 giorni di contatto con soluzione perennemente satura di idrossido di calcio, risultò fissare un quantitativo di calce più che doppio (35%) di quello riscontrato ora (15%) a partire da *analcime*. Parimente, per tempi più lunghi, l'*herschelite* risultò fissare oltre il 50% di calce dopo 100 giorni di contatto con soluzione satura, laddove, come può constatarsi, un risultato consimile è conseguibile, a partire da *analcime*, solo raddoppiando

⁸⁾ SERSALE R. e SABATELLI V. — L. c. a nota ¹⁾, pag. 267.

il suddetto tempo (200 giorni). Un tale comportamento è, probabilmente, da considerarsi come riflesso delle relazioni isostrutturali che intercorrono fra *analcime* e *leucite* (nonchè *pollucite* ^(*)), relazioni che hanno costituito oggetto di ricerche da parte di numerosi studiosi ⁽⁹⁾ ed è da porsi in relazione con la possibilità che l'*analcime* si comporti come una complessa « idro-leucite sodica ». È pertanto verosimile che l'*analcime*, pur rientrando nel gruppo dei minerali della famiglia delle zeoliti per i caratteri costituzionali, per le proprietà principali e, spesso, per la genesi, manifesti una reattività meno pronta, in generale, e più bassa nei confronti della soluzione d'idrossido di calcio, in particolare, di quella che è propria dei termini più tipici della surricordata famiglia.

Quanto a velocità di fissazione della calce, il comportamento dell'*analcime* ci risulta pertanto esser assai più vicino a quello da noi stessi rilevato, in identiche condizioni sperimentali, a partire da pozzolana del 2° periodo flegreo, di quanto non sia invece al tufo giallo del medesimo periodo e all'*herschelite*. Dopo 29 giorni di contatto con soluzione satura d'idrossido di calcio la suddetta pozzolana poté, infatti, fissare circa il 10% di calce (contro il 15% rilevato ora per l'*analcime*) e circa il 30% di calce dopo 91 giorni (contro il 33% circa, sempre a partire da *analcime*).

La tabella III riporta i dati ottenuti, in condizioni del tutto simili, sostituendo il minerale con il « tufo zeolitico » corrispondente: il tufo verde ischitano, la cui massa di fondo — come già più volte sottolineato — contiene come costituente predominante appunto l'*analcime*.

L'andamento del processo di fissazione della calce da parte del suddetto tufo, risalta poi dall'esame del grafico in fig. 3, ricavato sulla base dei dati tabellati.

Si constata che, a conferma di quanto precedentemente posto in luce, anche il tufo verde, polverizzato e mantenuto in costante agitazione, in contatto con soluzione perennemente satura d'idrossido di calcio, può fissarne quantità considerevoli. Esse risultano infatti pari: a circa 14 gr., per ogni cento grammi di tufo, dopo 28 giorni di contatto, ed a circa 29 gr., dopo 100 giorni. Pertanto, per tempi di contatto medi e lunghi, la quantità di CaO che il tufo verde ha attitudine a fissare, pur risultando un po' inferiore, è però sempre dell'ordine di quella riscontrata per il minerale zeolitico.

Al contrario, per tempi di contatto assai lunghi (↪ 200 giorni), si delinea una differenza. Infatti, trascorsi circa 200 giorni, mentre il minerale puro, in contatto con la soluzione satura di idrossido di calcio, a rapporto percentuale iniziale calce/*analcime* pari al 60%, è riuscito a provocare la scomparsa

(*) Meta-silicato acido di cesio e d'alluminio (raro).

⁽⁹⁾ EITEL W. — *The physical chemistry of the silicates*. The University of Chicago Press, Chicago, Ill., pag. 995 (1954).

TABELLA III.

Percentuale di CaO fissata dal *tufo verde ischitano* in funzione del tempo.

Rapporto percentuale iniziale CaO/tufo	Tempo di contatto (giorni)	Grammi di CaO fissati %
20 %	18	10,80
30 %	51	20,40
40 %	132	31,10
60 %	234	(*)

(*) Essendo la soluzione ancora satura di Ca(OH)_2 , manca il presupposto per il calcolo della quantità di CaO fissata in totale.

dell'idrossido quale corpo di fondo, la stessa condizione non è invece soddisfatta per il « tufo zeolitico ». Un tale comportamento è però perfettamente logico se si ricorda che l'esame ottico ¹⁰⁾ rivelò la presenza, nel tufo verde,

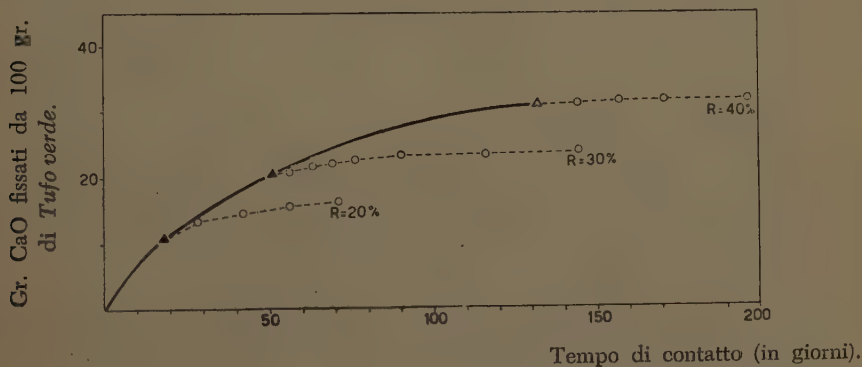


Fig. 3. — Andamento del processo di fissazione della calce in funzione del tempo per parte del tufo verde ischitano.
(Per la spiegazione, cfr. fig. 2).

di grossi e numerosi frammenti di fenocristalli di sanidino, i quali, unitamente ai pochi frammenti di altri minerali (quali: mica nera, plagioclasio, pirosseno), sono inerti verso la calce e quindi responsabili della riscontrata divergenza.

¹⁰⁾ SERSALE R. — L. c. a nota ³⁾, pag. 357.

* * *

Per quanto attiene poi al raffronto fra il comportamento del tufo verde flegreo e quello del tufo giallo napoletano, allorchè cimentati con soluzione costantemente satura d'idrossido di calcio e mantenuta, come sempre, in costante agitazione alla temperatura ambiente, risalta, in accordo con quanto più sopra documentato, che il tufo verde, che contiene come termine zeolitico predominante: l'*analcime* è assai meno reattivo del tufo giallo, che contiene invece: l'*herschelite*.

Infatti, in identiche condizioni sperimentali, il tufo giallo napoletano risultò fissare oltre il 30% di calce dopo 29 giorni ed oltre il 50% dopo 90 giorni di contatto, laddove, come può ora constatarsi, il tufo verde fissa solo il 14% di calce dopo 28 giorni e solo il 28% dopo 90 giorni di contatto.

* * *

A conferma di quanto sottolineato nel precedente lavoro a proposito del meccanismo che presiede alla fissazione della calce da parte dei minerali della famiglia delle zeoliti¹¹⁾, abbiamo, anche questa volta, creduto interessante procedere al raffronto fra la quantità di CaO, che, per ogni singola esperienza, risulta fissabile da parte dell'*analcime* e del tufo verde, rispettivamente, e la corrispondente quantità di alcali che viene invece ceduta alla soluzione di contatto — fino all'istante in cui in quest'ultima l'idrossido di calcio scompare come corpo di fondo — in virtù del semplice scambio di ioni.

I dati relativi a tale raffronto sono raccolti in tab. IV.

Può constatarsi che, in armonia con quanto già abbiamo posto in luce, la quantità di calce che risulta fissabile in totale da entrambi i materiali in istudio è, per ogni singola esperienza, di tutt'altro ordine di grandezza di quella che è invece ricavabile trasformando il quantitativo di alcali ceduti in grammi di CaO fissati.

Non sussistendo pertanto la necessaria equivalenza fra la calce fissata e gli alcali ceduti, si può escludere che, nel processo in istudio, spetti al semplice scambio di ioni un ruolo che non sia puramente marginale.

Sulla base di quest'ultima considerazione — la quale, nel precedente e già citato lavoro, ci spinse a cercare di rilevare la morfologia, e possibilmente la costituzione, di eventuali composti di neoformazione nella reazione fra l'*herschelite* e la soluzione satura d'idrossido di calcio, così come, in identiche

¹¹⁾ SERSALE R. e SABATELLI V. — L. c. a nota ¹⁾, pag. 271.

— SERSALE R. — *Analogies de genèse et de constitution entre les tufs volcaniques à comportement « pouzzolanique »*, Silicates Industriels, n. 11, pp. 499-509, Couillet (1960).

TABELLA IV.

Materiale di partenza	Rapporto percentuale iniziale CaO/materiale	Grammi CaO fissati in totale	Tempo necessario alla fissazione (giorni)	Grammi Na + K passati in soluzione	Grammi CaO equivalenti ai gr. Na + K	Gr. CaO fissati in totale meno quelli equivalenti agli alcali ceduti
Analcime	20 %	10,80	18	0,98	1,20	9,60
Analcime	40 %	31,90	85	2,84	2,84	29,06
Tufo verde ischitano	20 %	10,80	18	0,77	0,94	9,86
Tufo verde ischitano	40 %	(*)	85	1,97	—	—
Tufo verde ischitano	40 %	31,10	132	2,88	2,64	28,46

(*) Essendo dopo 85 gg. la soluzione di contatto ancora satura di Ca(OH)_2 , manca il presupposto per il calcolo del valore che corrisponde alla calce fissata.

(In questa tabella, i grammi di CaO fissati, nonchè quelli di alcali ceduti, si riferiscono a 100 gr. di materiale di partenza).

condizioni, per il tufo giallo napoletano, consentendoci di constatare, in armonia con le nostre supposizioni, la loro presenza e, ad un tempo, la loro identità morfologica con i prodotti osservati da GRUDEM¹²⁾ nell'idratazione del *clinker* di portland — abbiamo, anche questa volta, creduto interessante seguire sistematicamente la reazione: analcime/soluzione satura d'idrossido di calcio e tufo verde ischitano/soluzione satura d'idrossido di calcio, mediante osservazioni in microscopia elettronica. Esse vengono descritte e documentate nel seguito della nota.

Le micrografie riportate in tav. I, si riferiscono tutte, fatta eccezione per la n. 1, all'osservazione dei corpi di fondo di sospensioni acquose: analcime/idrossido di calcio, a rapporto percentuale iniziale CaO/analcime uguale al 20%. La micrografia n. 1, al contrario, riproduce l'osservazione dei granelli di analcime, macinati e stacciati fino a non lasciar residuo sullo staccio da 9.450 maglie/cm² (luce netta: 0,063 mm/maglia), sospesi in acqua all'atto dell'allestimento del preparato (*), e mai prima venuti in contatto con acqua o con soluzione d'idrossido di calcio. Si noti il bordo altamente frastagliato, tipico di polveri ottenute per macinazione di sostanze cristalline.

La micrografia n. 2 mostra come si presentano i medesimi granelli che invece sono stati dibattuti per 48 ore con soluzione satura d'idrossido di calcio. La soluzione di contatto ne è ancora satura.

Il bordo dei granelli appare, questa volta, quasi uniformemente circondato da prodotti di neo-formazione: semitrasparenti ed opachi. Fra quelli semitrasparenti, qualcuno, meno minuto, denuncia un *habitus* decisamente esagonale. Quelli opachi appaiono invece costituiti da fini fibre od aghetti che si irradiano dai granelli originari e risultano frammisti a quelli semitrasparenti.

Le micrografie n.ri 3 e 4 ripetono l'osservazione della medesima sospensione, trascorsi 14 giorni di costante agitazione. La soluzione di contatto è ancora satura d'idrossido di calcio. Sono più chiaramente riconoscibili i cristalli di neo-formazione, di *habitus* esagonale, semitrasparenti ed interfogliati, nonchè cristalli, a sezione rombica, d'idrossido di calcio¹³⁾.

¹²⁾ GRUDEM^o A. — *The microstructure of hardened paste*. Fourth Int. Symposium on the Chemistry of Cement, Washington (1960) (advance copy).

— GRUDEM[■] A. — *An electronographic study of the morphology and crystallization properties of calcium silicate hydrates*. Proc. Swed. Cement and concrete Res. Inst., n. 26 (1955).

(*) Per le modalità relative all'allestimento dei preparati da sottoporre alle osservazioni in microscopia elettronica, cfr. la precedente memoria, citata a nota ¹⁾, pag. 272. L'ingrandimento delle micrografie è rilevabile conoscendo la distanza interna tra i due segni di riferimento — in basso a sinistra di ciascuna immagine — che è uguale ad 1 micron.

¹³⁾ SERSALE R. e GIORDANO-ORSINI P. — L. c. a nota ⁷⁾, pag. 9.

Le micrografie n.ri 5 e 6 si riferiscono all'esame di preparati allestiti dopo 32 giorni di costante agitazione della medesima sospensione.

La soluzione non è più satura di idrossido di calcio (tenore di $\text{CaO} = \approx 13,00 \text{ mMoli/lit}^{\circ}$).

La micrografia n. 5 mette in evidenza la presenza di cristalli di *habitus* esagonale, ormai chiaramente delineati. La micrografia n. 6 pone, invece, in luce l'irradiazione, dai granelli originari, di strutture fibrose, sovrapposte ed inframezzate ai cristalli di *habitus* esagonale, semitrasparenti.

I caratteri morfologici dei prodotti di neo-formazione appaiono pertanto simili a quelli da noi stessi riscontrati nella reazione: herschelite - idrossido di calcio e riportati nella già citata memoria, nella quale sottolineammo altresì che i prodotti di neo-formazione in oggetto erano, a loro volta, morfologicamente simili a quelli osservati dal GRUDEM¹⁴⁾ fra i prodotti d'idratazione del *clinker* di portland.

Ci limiteremo qui a ricordare, per comodità del lettore, che qualificammo i suddetti prodotti di neo-formazione come appresso: i cristalli di *habitus* esagonale, semitrasparenti, come *alluminati di calcio idrati*¹⁵⁾ e le strutture fibrose od aghiformi, come *tobermorite*.

Le micrografie riportate in tav. II riproducono sempre le osservazioni di corpi di fondo di sospensioni acquose: analcime - idrossido di calcio. Le micrografie n.ri 7, 8 e 9 si riferiscono a sospensioni a rapporto percentuale iniziale calce/analcime uguale al 40%, mentre le micrografie n.ri 10, 11 e 12 sono state ottenute da sospensioni per le quali quest'ultimo rapporto è pari al 60%.

La micrografia n. 7 è stata ottenuta dopo 7 giorni dalla preparazione della sospensione, trascorsi, come al solito, in costante agitazione.

Molto chiaramente riconoscibili i cristalli di *habitus* esagonale, semitrasparenti ed interfogliati ed i soliti cristalli a sezione rombica, di idrossido di calcio, poichè la soluzione ne contiene ancora come corpo di fondo.

La micrografia n. 8 riproduce l'osservazione eseguita dopo 14 giorni. La soluzione è sempre satura d'idrossido di calcio. Sono, anche questa volta, riconoscibili: cristalli di *habitus* esagonale e cristalli a sezione rombica.

La micrografia n. 9 è stata ottenuta dopo 32 giorni dalla preparazione della stessa sospensione. La soluzione è ancora satura d'idrossido di calcio. Il processo di attacco dei granelli originari di minerale zeolitico è notevolmente progredito ed appare assai profondo. I nuclei originari di detti granelli

(*) Si tiene conto, evidentemente, dell'influenza che esercita la presenza in soluzione degli alcali sulla solubilità dell'idrossido di calcio.

¹⁴⁾ GRUDEM A. — L. c. a nota ¹²⁾.

¹⁵⁾ SERSALE R. — *Habitus cristallino degli alluminati di calcio idrati*. La Ric. Sc.-XXVII, 3, pp. 777-790. Roma (1957).

— JONES F. E. — *Hydration of calcium aluminates and ferrites*. Fourth Int. Symposium on the Chemistry of Cement. Washington (1960) (advance copy).

sono pressocchè irricognoscibili ed al loro posto è subentrata abbondante materia gelatinosa¹⁶). Quest'ultima, piuttosto spessa al centro e più sottile in periferia, si raccoglie in masse a contorno esagonale rilevabile con tutta evidenza.

La micrografia n. 10 è stata ottenuta dopo 7 giorni dalla preparazione della sospensione. La soluzione è ancora satura di idrossido di calcio.

Visibili i soliti cristalli di *habitus* esagonale, nonchè quelli a sezione rombica. I granelli originari, alla cui periferia si delineano i cristalli di *habitus* esagonale, appaiono, questa volta, in più avanzato stato di disfacimento (cfr. corrispondente microgr. n. 7).

La micrografia n. 11 ripete la medesima osservazione dopo 14 giorni. I cristalli di *habitus* esagonale si sono ispessiti ed appaiono anche meno ben delineati. La soluzione di contatto è ancora satura d'idrossido di calcio. Abbondante la materia gelatinosa, precedentemente sottolineata.

La micrografia n. 12 riproduce l'osservazione eseguita dopo 32 giorni. La soluzione è ancora satura d'idrossido di calcio. I cristalli di *habitus* esagonale appaiono sempre meno netti ed è invece più abbondante la materia gelatinosa, originatasi per disfacimento dei granelli di minerale, sotto l'attacco della soluzione d'idrossido di calcio.

Le micrografie riportate in tav. III si riferiscono tutte, fatta eccezione per la n. 13, ad osservazioni di sospensioni acquose: tufo verde ischitano — macinato e passante, come sempre, allo staccio da 9450 maglie/cm² — e idrossido di calcio. Le sospensioni dalle quali sono stati allestiti i preparati di cui alle micrografie 14 e 15, hanno rapporto percentuale iniziale calce/tufo verde pari al 20%; per le micrografie n.ri 16, 17 e 18 quest'ultimo rapporto è, invece, pari al 40%.

La micrografia n. 13 mostra come si presentano i granelli di tufo verde, sospesi in acqua all'atto dell'allestimento del preparato e mai prima venuti in contatto con acqua o con soluzione d'idrossido di calcio.

Si noti, anche questa volta, il contorno frastagliato dei granelli.

La micrografia n. 14 si riferisce ad un'osservazione effettuata dopo 48 ore, trascorse in costante agitazione, dalla preparazione della sospensione.

La soluzione contiene ancora idrossido di calcio nel corpo di fondo. Sono pertanto riconoscibili cristalli a sezione rombica, disposti in prossimità dei granelli di tufo. Può constatarsi inoltre l'irradiarsi di strutture aghiformi dai granelli originari.

La micrografia n. 15 si riferisce all'osservazione della sospensione in parola, trascorsi 7 giorni dal suo allestimento. La soluzione è sempre satura d'idrossido di calcio. Lo si riconosce altresì dalla presenza dei soliti cristalli a sezione rombica. I granelli originari appaiono adesso contornati da cristalli assai piccoli e semitrasparenti. Quelli di dimensioni non eccessivamente minute rivelano, ad un'attento esame, un *habitus* esagonale. Sono inoltre

¹⁶) SERSALE R. e SABATELLI V. — L. c. a nota ¹), pag. 273.

scomparse le strutture aghiformi e sono riconoscibili, invece, quelle fibrose, assai più numerose, ma anche di dimensioni notevolmente inferiori.

La micrografia n. 16 è stata eseguita dopo 7 giorni dall'allestimento della sospensione: La soluzione è ancora satura di idrossido di calcio.

Sono più chiaramente riconoscibili i cristalli di *habitus* esagonale, semi-trasparenti, e comincia ad osservarsi la presenza di materia gelatinosa, originatasi per effetto della disgregazione del tufo per azione della soluzione di idrossido di calcio.

La micrografia n. 17, eseguita dopo 14 giorni, mostra i cristalli di *habitus* esagonale, precedentemente segnalati, ora assai ben formati e talvolta interfogliati. Si notano ancora: cristalli a sezione rombica d'idrossido di calcio, poichè la soluzione ne è ancora satura, nonchè strutture fibrose che s'irradiano dai granelli.

La micrografia n. 18, eseguita dopo 32 giorni, mostra i medesimi cristalli di *habitus* esagonale, ormai notevolmente ispessiti, nonchè cristalli a sezione rombica, poichè la soluzione è ancora satura d'idrossido di calcio, ed una massa gelatinosa che ha preso il posto dei granelli originari.

Come può constatarsi, non sussistono differenze di comportamento, da un punto di vista strettamente qualitativo, fra il minerale zeolitico, a partire dal quale si è indagato, ed il corrispondente « tufo zeolitico » allorchè cimentati con soluzione inizialmente satura d'idrossido di calcio. Ciò è, ad un tempo, conferma: della reattività verso la soluzione d'idrossido di calcio da parte dell'*analcime*, così come della natura zeolitica del tufo verde ischitano, compiutamente posta in luce nella già citata memoria ¹⁷⁾.

* * *

Abbiamo creduto utile raccogliere qui di seguito le notizie che la letteratura fornisce circa il comportamento verso la soluzione d'idrossido di calcio, sia dei minerali della famiglia delle zeoliti, sia dei tufi vulcanici, nella massa di fondo dei quali i costituenti zeolitici sono stati supposti presenti od accertati.

Facciamo base pertanto su quanto è contenuto nel trattato di H. KÜHL ¹⁸⁾, riferendoci, in particolare, al *trass* renano che rappresenta il tufo vulcanico « cripto-zeolitico » ¹⁹⁾ da più tempo conosciuto e studiato ²⁰⁾.

¹⁷⁾ SERSALE R. — L. c. a nota ²⁾.

¹⁸⁾ KÜHL H. — *Zement-Chemie*. Vol. I, II, III, Veb. Verlag Technik. Berlin (1956), (1958), (1952).

¹⁹⁾ SERSALE R. — *Sulla natura zeolitica del tufo « carpato » della regione vulcanica del Monte Vulture*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., [4], XXVII, pag. 543. Napoli (1960).

²⁰⁾ TANNHÄUSER F. — *Der Hydratwassergehalt im Trass*. Bautechnische Gesteinsuntersuchungen, 2, (I), 34 (1911).

— MALQUORI G. e SERSALE R. — *Analogie costituzionali fra il trass renano e il*

Alcuni Autori hanno attribuita la sua reattività con la calce al contenuto di costituenti zeolitici, altri, invece, alla comparsa di un termine zeolitico a seguito della reazione con la calce.

Fra i primi, ricordiamo G. LUNGE²¹⁾, il quale attribuì l'attività idraulica del *trass* alla presenza di un minerale zeolitico che, in base a ricerche analitiche, indicò nell'*analcime*. Una tale opinione fu più tardi condivisa da A. STEOPOE²²⁾ e da K. BIEHL e W. WITTEKINDT²³⁾.

H. HART²⁴⁾ ha invece frazionato il *trass*, per gravità, in cinque frazioni di differente peso specifico, rilevando che: perdita alla calcinazione, titolo di alcali ed aliquota di silice solubile, decrescono al crescere del peso specifico della frazione esaminata.

Le frazioni più leggere sono quelle idraulicamente più attive; la reattività verso la calce si suppone determinata dalla tendenza alla formazione di un termine zeolitico: la *phillipsite* $(Ca, K_2)_3[Al_6Si_9O_{30}]H_2O$.

Altri Autori, basandosi sul fatto che lo scambio delle basi lascia inalterata la struttura reticolare dei minerali zeolitici, nonchè sul preteso mancato indurimento delle miscele di taluni termini zeolitici tipici, come: *cabasite*, *heulandite*, ecc., con l'idrossido di calcio²⁵⁾, negano la possibilità che ai costituenti zeolitici del *trass* renano possano esser attribuite le proprietà pozzolaniche del materiale, le quali sarebbero invece dovute alla frazione vetrosa, amorfa, tuttora presente in quel tufo vulcanico.

* * *

Le ricerche sperimentali elaborate presso questo Istituto permettono di chiarire molti aspetti di questo interessante problema²⁶⁾.

Nel lavoro più avanti citato, abbiamo sperimentalmente documentata la reattività dell'*herschelite* con la soluzione di idrossido di calcio.

Risultati e meccanismo di reazione, confermati da analoga ricerca eseguita a partire da un termine zeolitico più comune e meno reattivo: l'*analcime*, sono senz'altro estensibili anche al *trass* renano. A suo tempo²⁷⁾, infatti, fu

tufo giallo napoletano. L'ind. Ital. Cemento, XXIV, 5, pp. 115-121. Roma (1959).

— SCHWIETE H. E. e LUDWIG U. — *Der Tuff, seine Entstehung und Konstitution und seine Verwendung im Spiegel der Literatur*. Westdeutscher Verlag. Köln (1961).

²¹⁾ LUNGE G. — *Baumaterialkunde*, 10, 141 (1905).

²²⁾ STEOPOE A. — *The chemical reaction between trass and lime*. Tonind. Ztg. 52, 1609 (1928).

²³⁾ BIEHL K., WITTEKINDT W. — *The zeolitic nature of trass*. Tonind. Ztg. 58, 499-501 (1934).

²⁴⁾ HART H. — *The chemistry of Rhenish trass*. Tonind. Ztg., 55, 65-84 (1931).

²⁵⁾ KÜHL H. — L. c. a nota ¹⁸⁾, vol. III, pag. 183 (1952).

²⁶⁾ MALQUORI G. e SERSALE R. — L. c. a nota ²⁰⁾.

— SERSALE R. e SABATELLI V. — L. c. a nota ¹⁾.

²⁷⁾ MALQUORI G. e SERSALE R. — L. c. a nota ²⁰⁾, pag. 118.

individuato nell'*herschelite* il termine zeolitico predominante nella massa di fondo, cementante, del campione di *trass* renano da noi studiato, e pertanto ciò che successivamente è stato da noi messo a punto per il singolo minerale zeolitico: l'*herschelite* e per il « tufo zeolitico » flegreo corrispondente: il tufo giallo napoletano²⁸⁾, è da ritenersi valido anche per il *trass*. È stato infatti chiarito il meccanismo che presiede alla reattività dei termini zeolitici nei confronti dell'idrossido di calcio, in quanto, come già ammesso da precedenti studiosi²⁹⁾ e da noi quantitativamente valutato, detto meccanismo non consiste in un semplice scambio di basi ma, più propriamente, riposa sulla reattività particolarmente alta, delle zeoliti e prende le mosse dalla possibilità che, in virtù di tale reattività, l'idrossido di calcio, il quale determina la distruzione della loro originaria struttura, dia origine a prodotti di neo-formazione, morfologicamente simili a quelli osservati nell'idratazione del *clinker*³⁰⁾.

Siamo in grado inoltre di dimostrare che *non* è da ritenersi valida la pregiudiziale relativa all'incapacità d'indurimento delle paste confezionate con *herschelite*, o con *analcime*, e calce idrata³¹⁾.

Una volta dimostrata l'attitudine dei singoli minerali zeolitici, nonché quella dei tufi vulcanici corrispondenti, a reagire con l'idrossido di calcio nella maniera più sopra indicata, è giusto criterio assumere ad indice della qualità di quei materiali a comportamento « pozzolanico » — nei quali i costituenti zeolitici, il più spesso « diffusi » e pertanto non rilevabili per via ottica, siano stati accertati con altri mezzi di indagine e siano presenti in non trascurabile quantità — il tenore di acqua stabilmente fissata. Il ragionamento è limitato, s'intende, a materiali nei quali gli stessi mezzi di indagine prima invocati, hanno esclusa la presenza di « minerali delle argille » in quantità determinante.

Uno di noi in una precedente ricerca³²⁾ ha posto in luce e, successivamente sottolineato in più occasioni³³⁾, che tufi vulcanici, non « argillificati », paragonati con le corrispondenti pozzolane — dalle quali hanno preso origine per fenomeni di autometamorfismo — risultano caratterizzati da un tenore di acqua, stabilmente fissata, assai più alto, da un residuo all'attacco

²⁸⁾ SERSALE R. e SABATELLI V. — L. c. a nota ¹⁾.

²⁹⁾ LEA F. M. — *The Chemistry of Pozzolanas*. Proc. Symposium on the Chemistry of Cements, pag. 469. Stockholm (1938).

³⁰⁾ CRUDEMO A. — L. c. a nota ¹²⁾.

³¹⁾ SERSALE R. e SABATELLI V. — L. c. a nota ¹⁾, pag. 275 e, questo lavoro, pag. 61.

³²⁾ SERSALE R. — *Genesi e costituzione del tufo giallo napoletano*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., [4], XXV, pag. 191. Napoli (1958).

³³⁾ SERSALE R. — L. c. a nota ¹¹⁾.

— SERSALE R. — *Ricerche sperimentali sulla costituzione, sulla genesi e sul comportamento chimico dei tufi vulcanici*. Rend. Soc. Mineral. Ital., XVII, pp. 499-536. Pavia (1961).

acido-basico assai più basso e, sostanzialmente, da un'attività « pozzolanica », in generale, più elevata.

Al convincimento che l'acqua stabilmente fissata sia un elemento di giudizio positivo per stabilire il valore idraulico di un *trass* si ispirano, ad esempio, le Norme Tedesche ³⁴⁾ quando prescrivono per il *trass* un contenuto d'acqua stabilmente fissata non inferiore al 7% sul secco a 98°C fino a peso costante, valutato mediante blando trattamento termico al calor rosso.

Vien tollerato però, anche un tenore del 6%, a patto che il campione in esame, in miscela con calce idrata, adempia ad altre prescrizioni e, in particolare, raggiunga i prescritti valori di resistenza meccanica.

Il surricordato elemento di giudizio è causa di perplessità da parte dei tecnici ³⁵⁾ e le opinioni sono spesso discordanti.

HAMBLOCH ³⁶⁾ e TETMAJER ³⁷⁾, ad esempio, non sono i soli a sostenere che il *trass*, sottoposto a trattamento termico, perde la sua attività idraulica. Il primo ha stabilito che il *trass*, una volta disidratato, per trattamento a 200°, non riprende più l'acqua d'idratazione (^o). Entrambi trovano perciò giusto valutare la suddetta attività proprio a mezzo della perdita al fuoco.

Al contrario, BURCHARTZ ³⁸⁾ sostiene che il contenuto di acqua stabilmente fissata non esercita alcuna influenza sulle proprietà idrauliche del *trass*. Asserisce, infatti, di aver eseguite prove meccaniche su malte confezionate con clinker di portland e con *trass*, sia termicamente trattato, sia tal quale, e di aver ottenuto i migliori risultati con *trass* sottoposto a trattamento termico.

Dello stesso avviso sono A. STEOPOE ³⁹⁾ e H. TEODURU ⁴⁰⁾, i quali riferiscono di non aver osservate sostanziali variazioni in un campione di *trass* rumeno riscaldato a 200°, 500° e 1000°C, anzi, di aver osservato un migliorato comportamento dopo moderato arrostitimento.

Il fatto che il *trass*, allorchè sottoposto a trattamento termico e disidratato non perda affatto le sue proprietà idrauliche ⁴¹⁾, come osserva il KÜHL ⁴²⁾, non è in antitesi con la teoria dell'acqua di costituzione quale espressione del valore idraulico di un *trass*, in quanto è presumibile che a seguito della distruzione, per effetto del trattamento termico dell'assetto reticolare del materiale attivo originario, prenda origine una nuova struttura

³⁴⁾ Deutschen Trassnormen DIN 1043/44, foglio 2, pag. 13.

³⁵⁾ KÜHL H. — L. c. a nota ¹⁸⁾, vol. III, pag. 184 (1952).

— SCHWIETE H. E. e LUDWIG U. — L. c. a nota ²⁰⁾, pag. 20.

³⁶⁾, ³⁷⁾ e ³⁸⁾ Cfr. SCHWIETE H. E. — L. c. a nota ²⁰⁾, pag. 20.

³⁹⁾ e ⁴⁰⁾ cfr. KÜHL H. — L. c. a nota ¹⁸⁾, pag. 185.

⁴¹⁾ BURCHARTZ H. — Tonind. Ztg. 48, 1221 (1924).

⁴²⁾ KÜHL H. — L. c. a nota ¹⁸⁾, vol. II, pag. 722 (1958).

(^o) Si consultino a tale proposito le esperienze di F. ZAMBONINI su alcune zeoliti. ZAMBONINI F. — *Ricerche su alcune zeoliti*. Atti Acc. Lincei, 5, Cl. sc. fis. mat. e nat., V, pp. 343-374. Roma (1905).

reattiva. Noi stessi in una precedente ricerca ⁴³⁾, limitata al minerale zeolitico: *herschelite* ed al « tufo zeolitico » flegreo corrispondente, abbiamo rilevato un'identità di comportamento, per quanto attiene a velocità e ad entità di fissazione della calce da soluzioni costantemente sature d'idrossido, fra minerale e « tufo zeolitico » sottoposti a disidratazione completa (500°C) e, per l'*herschelite*, abbiamo rilevata una diminuzione, ma non una scomparsa, dell'attività fissatrice della calce, attività che rimane sempre apprezzabile, dopo trattamento termico più spinto (900°C), trattamento che non si limita alla semplice disidratazione, ma che comporta, invece, la distruzione della originaria struttura.

Attribuendo quindi all'« acqua zeolitica » un indubbio significato diagnostico ai fini del valore idraulico di un *trass* o di un tufo vulcanico in generale, possiamo condividere a pieno, e far nostra, l'opinione di KÜHL ⁴⁴⁾ il quale ritiene che nei tufi vulcanici ad elevato tenore di acqua stabilmente fissata, sono i componenti zeolitici i maggiori responsabili dell'attività « pozzolanica ». In quei materiali a comportamento « pozzolanico » nei quali, invece, detto contenuto d'acqua è modesto — materiali che risultano anche a noi meno reattivi — predomina il ruolo della frazione vetrosa. È chiaro che in termini intermedi, in quei termini, cioè, più o meno intensamente zeolitizzati, l'attività « pozzolanica » si deve in parte ai componenti zeolitici ed in parte alla frazione vetrosa, in ragione delle rispettive quantità.

* * *

Prima di passare alle conclusioni, desideriamo sottolineare che, non avendo potuto procedere alla preparazione di provini regolamentari per il rilevamento delle resistenze meccaniche di malte confezionate sostituendo la tipica pozzolana con il minerale zeolitico in istudio: l'*analcime* — date le modeste quantità di cui abbiamo potuto disporre, trattandosi, come prima precisato, di un minerale della Collezione Generale del Museo di Mineralogia — abbiamo, anche questa volta, proceduto alla preparazione di cilindretti di cm. 3 di altezza e cm. 2 di diametro — mescolando a calce idrata, nelle proporzioni del 50%, della polvere, passante allo staccio da 9450 maglie/cm², ricavata per macinazione di una aliquota del campione di *analcime* in istudio.

Abbiamo, anche questa volta ⁴⁵⁾, constatato che i provini acquistano consistenza lapidea già dopo qualche settimana di stagionatura in ambiente saturo di vapor d'acqua.

Facciamo infine risultare che si è necessariamente dovuto rinunciare al rilevamento delle curve cinetiche di fissazione della calce a partire dal mede-

⁴³⁾ SERSALE R. e SABATELLI V. — L. c. a nota ¹⁾, pag. 276 e seg.

⁴⁴⁾ KÜHL H. — L. c. a nota ¹⁸⁾, vol. II, pag. 722 (1958).

⁴⁵⁾ SERSALE R. e SABATELLI V. — L. c. a nota ¹⁾, pag. 275.

simo campione di *analcime*, previamente sottoposto a trattamento termico di disidratazione completa, in considerazione, sempre, del limitato quantitativo di minerale a nostra disposizione. Non ci pare, però, che ciò possa rappresentare una lacuna, in quanto è presumibile che le considerazioni da noi tratte dall'analoga sperimentazione condotta sulla *herschelite* e sul tufo giallo ⁴⁶⁾ siano, con tutta probabilità, estensibili anche al minerale ed al « tufo zeolitico » di cui alla ricerca presente.

* * *

Le risultanze della sperimentazione della quale si è dato conto nel corso di questa ricerca convergono nell'indicare che:

A) Anche l'*analcime* — al pari del tufo verde flegreo, del quale costituisce il termine zeolitico predominante nella massa di fondo — possiede attività « pozzolanica ». La velocità con cui detto minerale zeolitico fissa la calce, da soluzioni costantemente sature d'idrossido, risulta però, in condizioni normalizzate, notevolmente inferiore a quella relativa all'altro minerale precedentemente studiato: l'*herschelite* e, più o meno, dell'ordine di quella rilevata per la pozzolana del 2° periodo flegreo, sempre, s'intende, a parità di condizioni sperimentali.

B) La suddetta attività « pozzolanica » — conformemente a quanto già stabilito in una precedente ricerca — è da addebitarsi alla facilità — derivante dall'elevata reattività dei minerali zeolitici — con cui la soluzione d'idrossido di calcio può determinare la distruzione della struttura originaria del minerale, con conseguente comparsa di prodotti di neo-formazione.

C) I prodotti di neo-formazione originatisi a seguito della reazione dell'*analcime* con la soluzione d'idrossido di calcio, osservati in microscopia elettronica, risultano morfologicamente simili a quelli rilevati a partire dall'*herschelite*, cimentata in identiche condizioni, e pertanto simili, a loro volta, a quelli osservati a seguito della reazione della soluzione d'idrossido di calcio: con il tufo giallo flegreo, con il tufo verde ischitano, con la pozzolana flegrea, rispettivamente. I suddetti prodotti di neo-formazione risultano altresì morfologicamente simili a quelli osservati da GRUDEMÒ nell'idratazione del *clinker* di portland.

Sulla base della presente sperimentazione che conforta e completa i risultati da noi finora ottenuti, riteniamo pertanto che l'argomento: attività « pozzolanica » delle zeoliti o dei « tufi zeolitici », possa *passare in giudicato*.

Ci auguriamo invece di poter al più presto dar conto dei risultati conseguiti con lo scopo di approfondire le conoscenze in riguardo ai prodotti di neo-formazione che prendono origine nella reazione dei singoli minerali o dei

⁴⁶⁾ SERSALE R. e SABATELLI V. — L. c. a nota ¹⁾, pag. 276.

« tufi zeolitici » con l'idrossido di calcio, dei quali prodotti di neo-formazione abbiamo finora, quasi sempre, rilevato il solo carattere morfologico.

Ringraziamo il Prof. Paolo GIORDANO-ORSINI per il valido aiuto offertoci nelle osservazioni in microscopia elettronica.

Napoli, Istituto di Chimica Industriale dell'Università.

RIASSUNTO. — A complemento di una precedente ricerca — eseguita con lo scopo di valutare l'« attività pozzolanica » di singoli minerali zeolitici, scelti fra quelli la cui presenza più frequentemente abbiamo riscontrata nella massa di fondo di una numerosa serie di tufi vulcanici di differente tipo mineralogico e chimico — vien dato conto dei risultati conseguiti valutando la reattività dell'*analcime* con la soluzione di idrossido di calcio.

Si stabilisce che l'*analcime*, al pari dell'*herschelite*, possiede apprezzabile attività « pozzolanica » e si dimostra che la velocità con cui il primo termine zeolitico può fissare l'idrossido di calcio da soluzioni che ne sono costantemente sature, è notevolmente inferiore a quella riscontrata, in identiche condizioni, per il secondo.

Attività « pozzolanica » del pari apprezzabile possiede il tufo verde flegreo, in cui il termine zeolitico predominante nella massa di fondo è appunto l'*analcime*. Velocità ed entità di tale fissazione, in armonia con quanto sopra, risultano anche questa volta notevolmente inferiori a quelle riscontrate per il tufo giallo napoletano, che è invece zeolitizzato ad *herschelite*.

Si conferma inoltre quanto stabilito in una ricerca consimile e cioè che la suddetta attività « pozzolanica », nel caso dei singoli minerali zeolitici o dei « tufi zeolitici » è sostanzialmente da attribuirsi alla loro reattività, in virtù della quale, a seguito della reazione con l'idrossido di calcio, si determina la distruzione della struttura originaria, e, conseguentemente, la comparsa di prodotti di neo-formazione. Questi ultimi, morfologicamente simili tanto a partire da *herschelite*, quanto da *analcime*, mantenuti in contatto con soluzione satura d'idrossido di calcio, sono simili, a loro volta, a quelli segnalati dalla letteratura nell'idratazione del *clinker* di portland.

Si sottolinea ancora che nel caso di « tufi zeolitici », esenti da « argillificazione » e non sottoposti a trattamento termico, — i quali hanno preso origine dalle corrispondenti pozzolane, per effetto di fenomeni di autometamorfismo — il contenuto d'acqua stabilmente fissata che, com'è ovvio, cresce al crescere della percentuale dei termini zeolitici presenti nella loro massa di fondo, è sicuro e positivo elemento di giudizio ai fini della valutazione della loro attività « pozzolanica ».

Si pone infine in luce che i medesimi « tufi zeolitici », sottoposti a trattamento termico *fino a disidratazione*, non perdono codesta attività, cioè conservano inalterata la loro reattività verso l'idrossido di calcio.

SUMMARY. — For the sake of completing the preceding investigations concerning the evaluation of « pozzolanic » activity of single zeolitic minerals, selected among those which predominate in the groundmass of a numerous series of different volcanic tuffs, we report now the results obtained by evaluating the reactivity of *analcite*, treated, after being powdered, with saturated lime solution.

It has been stated that *analcite*, like *herschelite*, shows considerable « pozzolanic » activity and it has been shown that the rate of combining with lime, in standardized conditions, is lower for *analcite* than for *herschelite*.

It has been emphasized that green phlegraean tuff, too, shows « pozzolanic » activity, owing to the presence in its groundmass of « diffuse » *analcite*, but the

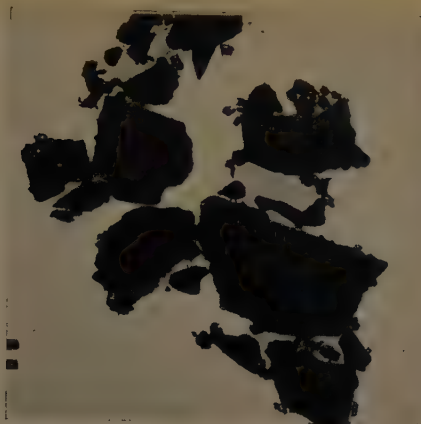
rate of this reaction with lime and the amount of combined lime are, in turn, lower than those that we have found starting from napolitan yellow tuff, which contains « diffuse » *herschelite* as zeolitic term.

It has been also confirmed, according to the results of a similar research, that the above mentioned « pozzolanic » activity — for single zeolitic minerals and for « zeolitic tuffs » — is to be fundamentally attributed to their reactivity, on account of which, under the action of saturated lime solution, the original structural arrangement is destroyed, with production of newly-formed compounds. The last, whose morphology is similar both from *herschelite* and from *analcite*, are, in turn, similar to those originated in the portland *clinker* hydration.

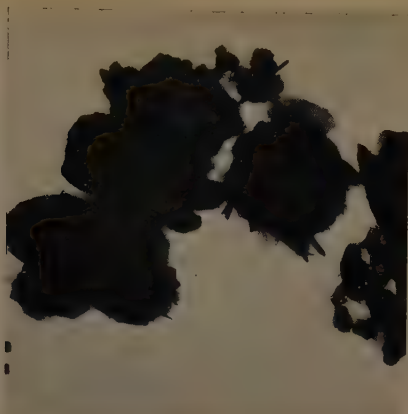
It has been emphasized, too, that with reference to « zeolitic tuffs » free from « argillization » and not thermally treated, which have been originated from the corresponding pozzolanas because of autometamorphism phenomena, *the amount of the bound water*, whose increase is, of course, proportional to the amount of the zeolitic minerals present in the cementing groundmass, *is an important and conclusive factor* for evaluating their « pozzolanic » activity.

It has been after all thrown light upon « pozzolanic » activity of thermally treated « zeolitic tuffs » and zeolitic minerals and it has been remarked that them both, after being dehydrated, are still able to react with saturated lime solution, that's to say that both keep unaltered their « pozzolanic » activity.

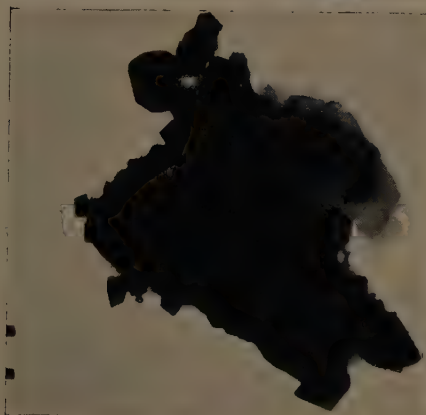
1)



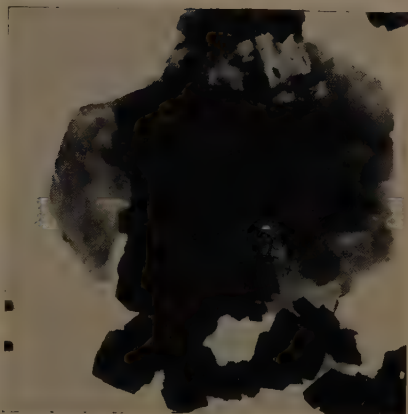
2)



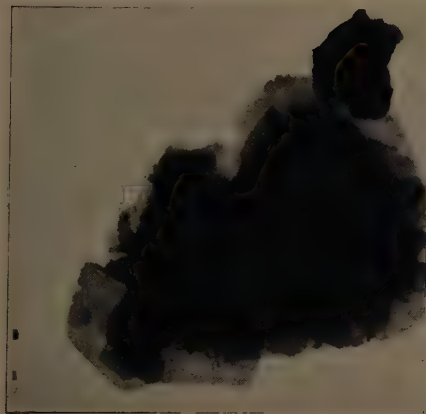
3)



4)



5)



6)



t = tempo intercorso tra la preparazione della sospensione e l'osservazione.

T = titolo di CaO della soluzione di contatto, al momento dell'allestimento del preparato, in mMoli/lit.

1) $t = 0$; $T = 0$.

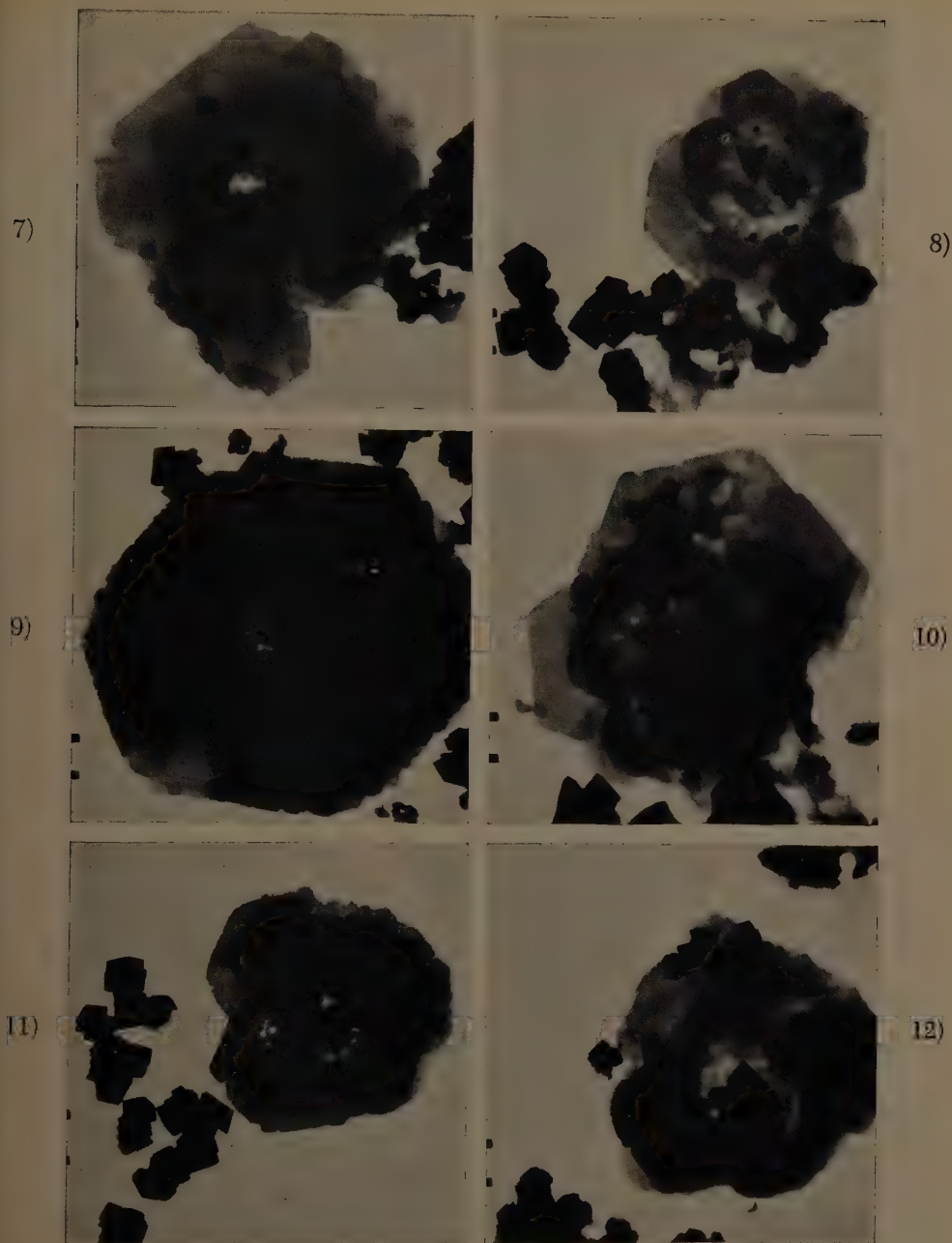
3) $t = 14$ giorni; $T = \sim 18,57$.

5) $t = 32$ giorni; $T = \sim 13,00$.

2) $t = 48$ ore; $T = \sim 19,40$.

4) $t = 14$ giorni; $T = \sim 18,57$.

6) $t = 32$ giorni; $T = \sim 13,00$.



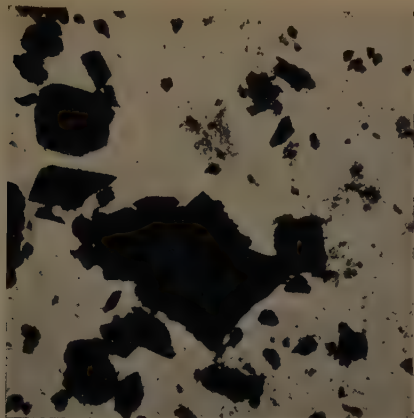
(Per t e T , cfr. Tav. I).

7) $t = 7$ giorni; $T = 18,90$.
 9) $t = 32$ giorni; $T = 17,50$.
 11) $t = 14$ giorni; $T = 18,65$.

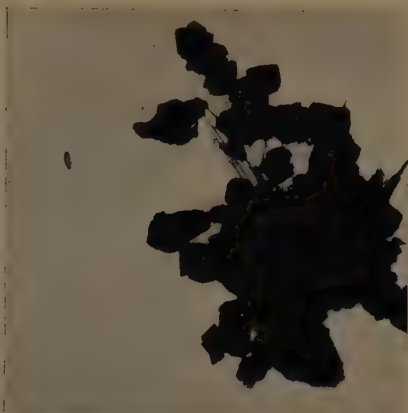
8) $t = 14$ giorni; $T = 18,30$.
 10) $t = 7$ giorni; $T = 19,10$.
 12) $t = 32$ giorni; $T = 17,82$.



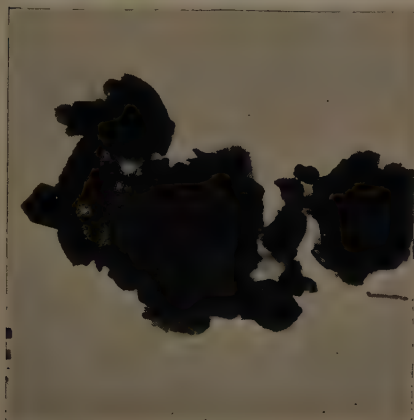
13)



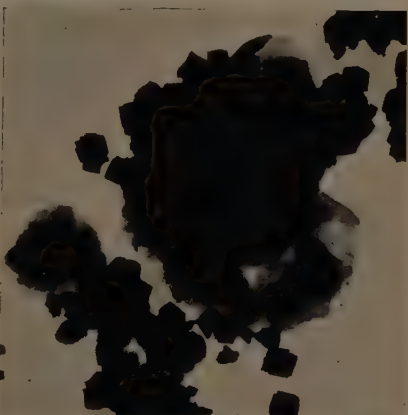
14)



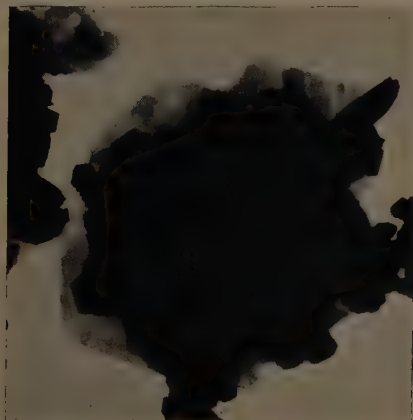
15)



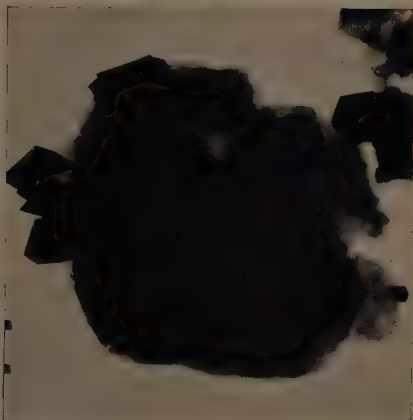
16)



17)



18)



(Per t e T , cfr. Tav. I).

- 13) $t = 0$; $T = 0$.
 15) $t = 7$ giorni; $T = \sim 18,75$.
 17) $t = 14$ giorni; $T = \sim 18,90$.

- 14) $t = 48$ ore; $T = \sim 19,10$.
 16) $t = 7$ giorni; $T = \sim 19,10$.
 18) $t = 32$ giorni; $T = \sim 17,30$.

Studio topologico di una superficie iperellittica di rango 3 dotata di torsione

Nota del prof. Antonino Lo Voi, presentata dal socio Alfredo Franchetta

(Adunanza del dì 7 gennaio 1961)

Al Convegno di Matematica di Taormina dell'Ottobre 1958 ho comunicato lo studio di una superficie iperellittica di rango 2 dotata di torsione mettendo in evidenza, con metodo puramente combinatorio, le proprietà topologiche, e la comunicazione apparirà negli atti del Convegno. Il concetto della comunicazione era precisamente il seguente:

Considerata [1] la ben nota superficie iperellittica F_1 di rango 1 relativa alla tabella di periodi primitivi

$$\begin{array}{c} u \\ v \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \omega' \end{array} \right\|.$$

di cui si ha una riemanniana facendo il prodotto topologico delle due superficie toriche relative ai parallelogrammi (di periodi) $\|1, \omega\|$ e $\|1, \omega'\|$, la F_2 ivi studiata è immagine della involuzione $u' = u + \frac{1}{2}$, $v' = -v$ sostenuta da F_1 ⁽¹⁾.

Se si considera il parallelogramma $\|1, \omega'\|$ relativo alla v e su di esso si costruisce il prisma retto sulla cui altezza, lunga $\frac{1}{2}$, si pensano invece rappresentati i valori reali di u (con $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$), tale prisma è la rappresentazione reale di una varietà aperta γ_3 di F_1 ; alla quale, sull'immagine F_2 dell'involuzione, corrisponde un ciclo (chiuso) a tre dimensioni (reali) γ'_3 ; anzi, una riemanniana dell'intera F_2 si ottiene semplicemente facendo il prodotto topologico del ciclo γ'_3 con il ciclo lungo cui la u prende il rimanente periodo (non reale) ω . Lo studio topologico di F_2 era così ridotto a quello della varietà γ'_3 rappresentata dal detto prisma di cui si identificavano le facce opposte. Anche ora ci ridurremo allo studio di una varietà

¹⁾ Sullo stesso argomento: A. Lo Voi, *Sui cicli lineari di una superficie algebrica dotata di torsione*. Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. LXV, fasc. XVI-XVIII, 1932. Alla fine di tale lavoro si legga « $A \rightarrow \gamma \curvearrowright a + b$ ». Importa rilevare che lo studio fatto nel lavoro citato dà per la prima volta un esempio concreto di cicli lineari di torsione su superficie algebriche; il che fa uscire la teoria in discorso dal puro campo ipotetico nel quale si è venuta a trovare.

rappresentata da un prisma di cui identificheremo le facce opposte tenendo conto, e della periodicità, e della corrispondenza nella involuzione.

Precisamente [1] la superficie iperellittica F_3 di cui vogliamo occuparci è l'immagine dell'involuzione

$$(1) \quad u' = u + \frac{1}{3}, \quad v' = \varepsilon v, \quad (\text{con } \varepsilon \text{ radice prim. cubica di } 1)$$

sostenuta dalla superficie iperellittica F_1 di rango I relativa alla tabella di periodi primitivi

$$(2) \quad \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \parallel \begin{array}{cccc} 1 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon \end{array}$$

E ben noto che si ha una riemanniana V_4 di F_1 costruendo il prodotto topologico delle due superficie toriche ottenute, al solito modo, dai due parallelogrammi dei periodi relativi rispettivamente alle due curve ellittiche $\|1, \tau\|$ e $\|1, \varepsilon\|$ della superficie stessa F_1 ; essendo τ , al pari di ε , un numero essenzialmente immaginario.

2. Come accennato nel § precedente, per studiare i cicli di F_3 ci baseremo sulla osservazione che sulla F_1 relativa alla tabella (2) l'involuzione (1) muta in sè il ciclo γ_3 ottenuto facendo il prodotto topologico della superficie torica relativa alla v ($u = \text{cost.}$) per il ciclo in cui u prende valori reali (e $v = \text{cost.}$). Si otterrà sulla F_3 , immagine della involuzione, un ciclo chiuso γ'_3 in corrispondenza alla terza parte del ciclo γ_3 ; e precisamente, a quella parte ottenuta facendo variare la u nell'intervallo reale $(0, \frac{1}{3})$, anzicchè $(0, 1)$.

Sia il ciclo γ'_3 sulla F_3 che la varietà aperta corrispondente sulla F_1 , hanno i punti in corrispondenza biunivoca e continua con i punti del prisma qui accanto disegnato, se si fa eccezione delle facce del prisma stesso.

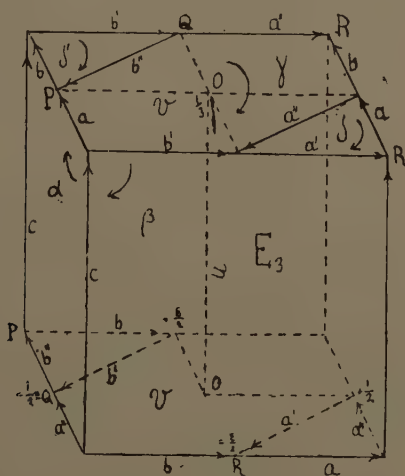
Denotiamo con α e β due facce laterali consecutive; e poi, spezziamo, come in figura, ciascuna delle basi, in un esagono regolare, che denoteremo con γ , e in due triangoli equilateri che denoteremo con δ e δ' . Orienteremo tutti questi cinque poligoni in modo che dall'esterno del prisma gli orientamenti appaiono in senso orario.

Denoteremo con c lo spigolo laterale del prisma orientato positivamente dalla base inferiore verso la base superiore.

A partire da quelli della base inferiore, denotiamo con a, a', a'' i lati del triangolo δ e con b, b', b'' i lati del triangolo δ' , tutti orientati come in figura, e cioè in modo che gli orientamenti per la base superiore tengano conto, e dell'involuzione (1), che come ora vedremo associa tali segmenti, e della periodicità relativa alla tabella (2).

E precisamente, l'operazione $u' = u + \frac{1}{3}$ fa passare dalla base inferiore alla base superiore, mentre l'operazione $v' = \varepsilon v$ fa subire: all'esagono una rotazione di 120 gradi in senso antiorario attorno al proprio centro O , e ai triangoli δ e δ' una analoga rotazione che, a meno del periodo ε (sottrazione di ε per δ , e addizione di ε per δ'), equivale alla rotazione antioraria di ciascuno dei triangoli δ e δ' di 120 gradi attorno al proprio centro.

3. Nella figura vengono così denotati (e le frecce ne indicano l'orientamento) con una stessa lettera due lati quando, o si corrispondono nella



involuzione considerata, o differiscono per una traslazione di periodo, e quindi, in ogni caso sono da identificarsi se dal prisma disegnato si vuole ricavare il ciclo chiuso γ'_{ε} della F_3 .

Per quanto riguarda i vertici dei cinque poligoni (zero-celle tutte poste sul contorno delle facce laterali) basta limitarci a considerare le basi di due facce laterali consecutive α e β .

Dopo la detta identificazione tali zero-celle si riducono a tre soltanto, e in figura sono denotate con le lettere P, Q, R .

4. La matrice d'incidenza relativa alle dimensioni 3 e 2 non occorre scriverla, perchè formata di una riga di zeri, e l'unica 3-cella E_3 dà luogo all'unico 3-ciclo γ'_{ε} nella topologia della varietà γ'_{ε} stessa. Se ci riferiamo ad una suddivisione simpliciale di tale varietà, suddividendo le celle sopra considerate, la 3-cella, E_3 , le 2-celle $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \delta'$, le 1-celle $c, a, a', a'', b, b', b''$, e le 0-celle P, Q, R , costituiscono [2] una base di blocchi di celle (simplessi), e solo per brevità si parla di celle anzicchè dei corrispondenti blocchi di simplessi.

Se si scrive la matrice d'incidenza (o si guarda direttamente la figura) fra le 1-celle $a, a', a'', b, b', b'', c$ le 0-celle P, Q, R , si ricava subito la prima delle seguenti tre tabelle, che possiamo ritenere equivalente alla:

detta matrice d'incidenza essendoci limitati a fare una sottrazione o una addizione della riga relativa alla c da qualcuna delle altre righe.

	P	Q	R	P	Q	R-P	P-Q	Q	R-P
$a + c$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$a' - c$	+ 1	- 1	0	+ 1	- 1	0	1	0	0
a''	- 1	+ 1	0	- 1	+ 1	0	- 1	0	0
$b - c$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$b' + c$	- 1	+ 1	0	- 1	+ 1	0	- 1	0	0
b''	+ 1	- 1	0	+ 1	- 1	0	+ 1	0	0
c	- 1	0	+ 1	0	0	+ 1	0	0	+ 1

Ricordiamo [2] che una trasformazione elementare sulle celle (blocchi di celle) di dimensione maggiore, si effettua in modo identico sulle righe corrispondenti della matrice d'incidenza, mentre, se alla r -esima cella di dimensione minore, P , si sottrae la s -esima cella Q , è la s -esima colonna che viene ad accrescersi della r -esima colonna della matrice d'incidenza.

Dall'ultima tabella si ha subito la forma normale; a noi ci interessa: il fatto che la caratteristica è 2, che $a' - c$ e c sono catene aperte, che $a'' + a' - c$, $(c + b') + (a' - c) = a' + b'$, $a' - c - b''$, $a + c$, $b - c$, sono cinque cicli, e che tutte queste sette catene formano una base per le I -catene di γ'_3 .

Delle due matrici che seguono, la prima è dedotta dalla figura, mentre la seconda è la sua forma normale, ottenuta dalla prima con le due trasformazioni elementari: cambiare una riga (o colonna) di segno; aggiungere ad una riga (colonna) un'altra delle rimanenti righe (colonne).

	c	a	a'	a''	b	b'	b''							
α	0	- 1	0	+ 1	- 1	0	+ 1	0	0	0	3	0	0	0
β	0	- 1	+ 1	0	- 1	+ 1	0	0	0	0	0	1	0	0
γ	0	+ 1	+ 1	+ 1	- 1	- 1	- 1	0	0	0	0	0	1	0
δ	0	- 1	- 1	- 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
δ'	0	0	0	0	+ 1	+ 1	+ 1	0	0	0	0	0	0	0

Dall'ultima si deduce che la caratteristica è 4, e quindi, dai 5 cicli a una dimensione di cui sopra, si deve poter passare ad una base costituita da un ciclo ($5 - 4 = 1$) non divisore dello zero, per es. $c + a$, e da quattro cicli divisori dello zero, di cui uno solo ha il coefficiente maggiore di 1; e, precisamente, ha il coefficiente di torsione 3.

Individueremo quest'ultimo ciclo direttamente, considerando che una base per i cicli nulli su γ'_3 si ottiene considerando le frontiere delle 2-celle $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \delta'$.

Ma intanto, nella penultima tabella, avendosi 5 righe e la caratteristica 4, rimane un solo ciclo a 2-dimensioni (numero di righe meno caratteristica) ed esso è $\gamma + \delta + \delta'$ come si vede subito dalla tabella stessa; ed esso non è divisore dello zero, perchè la matrice d'incidenza fra la 3-celle E_3 e le 2-celle $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \delta'$ ha, come si è detto, la caratteristica nulla. L'unico ciclo a due dimensioni di γ'_3 è dunque rappresentato dalla base del nostro prisma. Tralasciando pertanto la frontiera di γ , restano a formare base per le omologie le quattro seguenti

$$\begin{aligned} \alpha &\longrightarrow (a'' + b'') - (a + b) \sim 0, & \beta &\longrightarrow (a' + b') - (a + b) \sim 0, \\ -\delta &\longrightarrow a + a' + a'' \sim 0, & \delta' &\longrightarrow b + b' + b'' \sim 0. \end{aligned}$$

Da cui si ricava $a + b \sim a' + b' \sim a'' + b''$; $3(a + b) \sim 0$.

Che invece $a + b$ (e quindi anche $2(a + b)$) non sia omologo a zero, risulta dal fatto che da $\lambda(a + b) = \lambda_1[(a'' + b'') - (a + b)] + \lambda_2[(a' + b') - (a + b)] + \lambda_3[a + a' + a''] + \lambda_4[b + b' + b'']$, in numero interi per le $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ si ha solo soluzione per λ multiplo di 3.

5. Una riprova del risultato che il ciclo $c + a$ non è un divisore dello zero si ha nel fatto che lungo esso u ha un periodo non nullo e, passando da F_1 ad F_3 , mentre l'integrale v si perde, l'integrale u rimane l'unico integrale di PICARD di prima specie della F_3 .

Analogamente dicasi del ciclo $c + b$ che, come $c + a$, passa per il punto P ; ma, la loro differenza è un divisore dello zero.

I cicli di F_3 si deducono dalla topologia del prodotto $\gamma'_3 \times d$, essendo d il ciclo sulla F_3 lungo cui u ha il periodo τ . La F_3 ha così due cicli a tre dimensioni, γ'_3 e $\gamma_2 \times d$, ove γ_2 denota il ciclo a due dimensioni di γ'_3 trovato nel § precedente. I cicli ad una dimensione (indipendenti) di F_3 sono $c + a$ e d . I cicli a due dimensioni (non divisori dello zero) indipendenti sono γ_2 e $(c + a) \times d$; mentre il ciclo divisore dello zero (a coefficiente > 1) a due dimensioni è $(a + b) \times d$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. BAGNERA e M. DE FRANCHIS. *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti*. Memorie di Matematica e di Fisica della Società delle Scienze, serie III, tomo XV, pp. 251-343. 1908.
- [2] H. SEIFERT UND W. THRELFALL. *Lehrbuch der Topologie*. Chelsea Publishing Company, New York, 1947.

RIASSUNTO. — L'Autore studia esaurientemente la topologia di una superficie iperellittica, e, in particolare, ne individua i cicli di torsione ad una e a due dimensioni.

SUMMARY. — The Author wakes an exhaustive study of the Topology of a hyperelliptic surface, and, in particular, he individualizes the onedimensional and twodimensional torsion cycles of it.

Reazioni dei cheteni - Nota V. Reazioni fra cheteni e chetenacetali.

Nota della prof. Rachele Scarpati e del dott. Donato Sica, presentata dal socio corr. Rodolfo Alessandro Nicolaus

(Adunanza del 4 febbraio 1961)

Lo spiccato carattere nucleofilo dei chetenacetali, dimostrato nelle precedenti note ¹⁾ ²⁾ ³⁾, faceva presupporre una grande reattività fra queste sostanze ed i cheteni, composti notoriamente elettrofili.

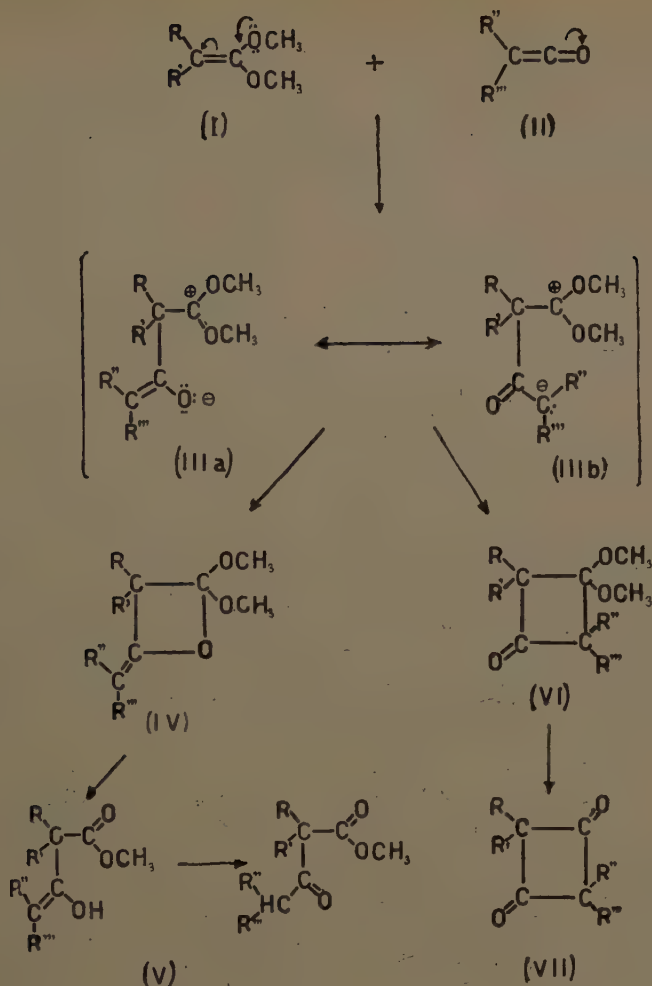
In base alla polarizzazione delle molecole delle due sostanze si potevano prevedere, attraverso la formazione dell'intermedio (III a)-(III b), due diversi andamenti per la reazione; il primo dei quali avrebbe condotto ad ortoesteri ciclici non saturi del tipo (IV) che, per idrolisi, si sarebbero trasformati nei β -chetoesteri (V) fornendo un nuovo metodo per la sintesi di questi composti: il secondo avrebbe condotto ai monoacetali di ciclobutandioni del tipo (VI), non noti, che per idrolisi avrebbero portato ai ciclobutandioni corrispondenti (VII) ⁴⁾. Inoltre, non era da escludere che l'intermedio (III a)-(III b) potesse ulteriormente reagire con una molecola di chetene o di chetenacetale portando a composti a struttura più complessa.

¹⁾ SCARPATI R., SPERONI G. *Reazioni dei cheteni - Nota I - Reazione tra nitrilossidi e chetenacetali: sintesi degli acetali degli isossazoloni-5*. Gazz. Chim. Ital., **89**, 1511 (1959).

²⁾ SCARPATI R. *Reazioni dei Cheteni - Nota III - Azione del fenilisocianato sul fenilchetene-dimetilacetale e sul chetene-dietilacetale*. Rend. Acc. Soc. Fis. e Mat., Napoli, [4], **25**, 223 (1958).

³⁾ SCARPATI R., DEL RE G., MAONE T. *Reazioni dei cheteni - Nota IV - Sul meccanismo della reazione tra alcuni derivati chetenacetalici e il fenilisocianato*. Rend. Acc. Soc. Fis. e Mat., Napoli, [4], **26**, 405 (1959).

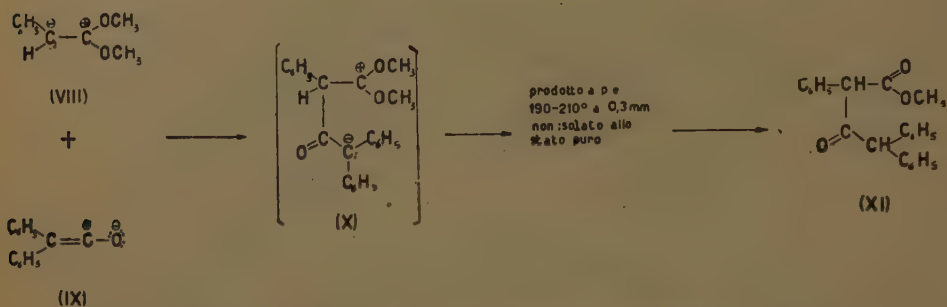
⁴⁾ Non ci risulta che, per la sintesi dei ciclobutandioni, siano stati utilizzati metodi diversi della dimerizzazione dei cheteni bisostituiti che portano, naturalmente, a ciclobutandioni simmetrici.



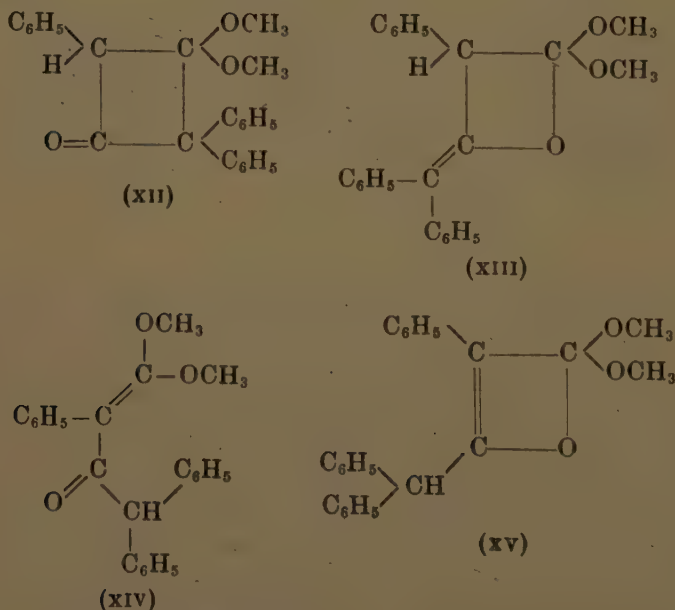
Queste considerazioni ci hanno suggerito di indagare su questo tipo di reazioni; nella presente nota riferiamo sui risultati ottenuti nello studio della reazione fra il fenilchetene dimetil-acetale (VIII) ed il difenilchetene (IX).

Se si mescolano quantità equimolecolari dei due prodotti la reazione, a temperatura ambiente, procede molto lentamente e pertanto è opportuno riscaldare per un'ora a 85°. In queste condizioni si forma un liquido denso di colore giallo che, per distillazione a pressione ridotta, lascia separare una prima frazione costituita da difenilchetene e fenilcheteneacetale; a 190-210° a 0,3 mm distilla, con rese del 30%, una frazione costituita da un olio viscoso giallo. Questo, sottoposto a successive distillazioni, condotte allo scopo di migliorare la purificazione, si rapprende parzialmente in un

solido identificato con il prodotto ottenuto dalla idrolisi dell'olio in esame. L'impossibilità di una soddisfacente purificazione di questo olio ci ha impedito di effettuarne l'analisi quantitativa; ci siamo perciò limitati a sottoporlo ad una blanda idrolisi ottenendo un solido a p. f. 118-119°, al quale, in base ai risultati analitici ed alle proprietà, si deve attribuire la struttura di metilestere dell'acido 2,4,4-trifenilacetacetico (XI).



Riguardo alla struttura del componente principale dell'olio a p. e. 190-210° a 0,3 mm, sopra descritto — componente che dovrebbe derivare dall'assemblamento dell'intermedio (X) — oltre alle strutture (XII) e (XIII), corrispondenti alle generiche (VI) e (IV), nel caso in esame si possono prevedere la (XIV) e la (XV) derivanti dall'intermedio (X) per migrazione di un protone.

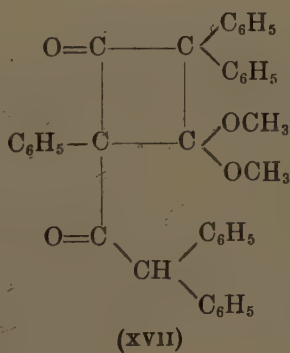
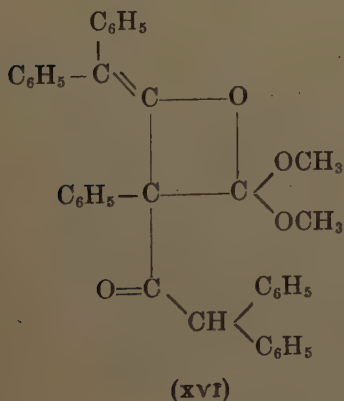


Il problema dell'assegnazione di queste possibili strutture è analogo a quello della costituzione dei dimeri degli aldocheteni; recentemente, me-

dianete gli spettri di risonanza magnetica protonica, è stato stabilito⁵⁾ che la struttura fondamentale del dichetene è quella di 3-buten- β -lattone, ma non sono stati studiati, con questo metodo, dimeri di altri aldocheteni. In base alla tendenza all'idrolisi che il prodotto da noi ottenuto presenta, possiamo escludere la struttura (XII); le altre tre strutture (XIII), (XIV) e (XV) differiscono fra loro per la posizione di un protone o per la presenza di un ciclo di tipo lattoneico in luogo di un sistema aperto. Viene perciò spontaneo di ritenere che la trasformazione di una nell'altra sia molto facile, e si può addirittura pensare ad un equilibrio fra le tre forme.

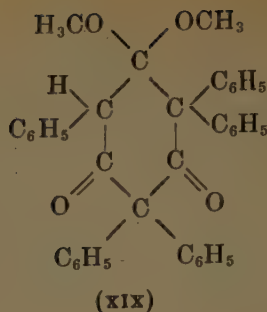
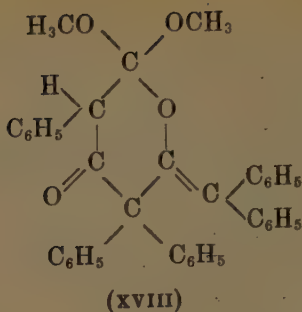
Nel tentativo di migliorare le rese della reazione, abbiamo riscaldato la miscela dei due reattivi per due ore a 90°; le rese in prodotto distillato non erano migliori di quelle ottenute nel primo tentativo, ma la quantità di teste era molto più esigua, mentre, come residuo della distillazione, restava un abbondante prodotto pecioso. Ci è parso pertanto opportuno effettuare la reazione protraendo il tempo di riscaldamento a 7 ore ed utilizzando due equivalenti di difenilchetene per ogni equivalente di fenilcheteneacetale⁶⁾; si è così ottenuto un solido bianco che cristallizza da ligroina in aghi a p. f. 184-185°. Questa sostanza può essere preparata anche dal prodotto a p. e. 190-210° a 0,3 mm per riscaldamento a 90-100° per 3 ore con un secondo equivalente di difenilchetene.

In base al metodo di preparazione è possibile attribuire al prodotto in esame una delle quattro strutture (XVI), (XVII), (XVIII), (XIX).

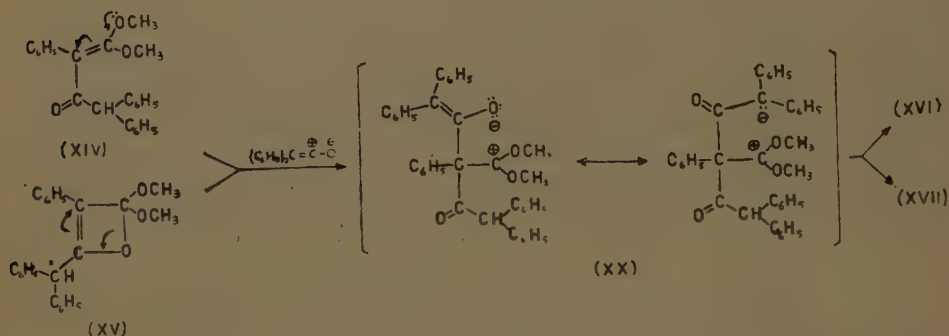


⁵⁾ BADER A. R., GUTOWSKY H. S., WILLIAMS G. A., YANKWICH P. E. *The Proton Magnetic Resonance Spectrum and Structure of Diketene*. J. Am. Chem. Soc., **78**, 2385 (1956).

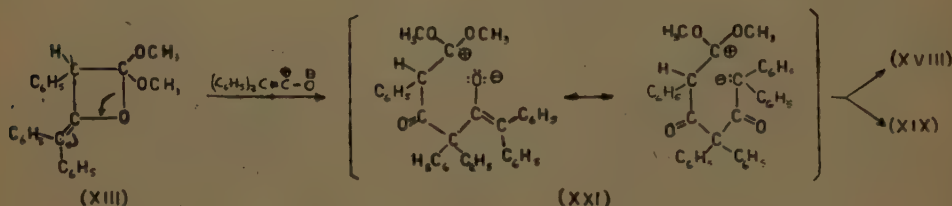
⁶⁾ Se si usano due equivalenti di fenilchetene-acetale ed uno di difenilchetene si ottiene il medesimo prodotto con rese notevolmente più basse.



Infatti se l'olio a p. e. 190-210° a 0,3 mm presentasse una delle strutture (XIV) o (XV) dalla successiva reazione con il difenilchetene si formerebbe l'intermedio (XX) che potrebbe stabilizzarsi nelle forme (XVI) o (XVII):

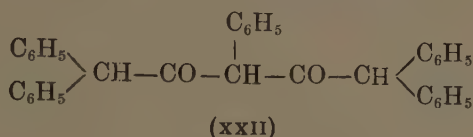


se presentasse invece la struttura (XIII) dalla successiva reazione con il difenilchetene si formerebbe l'intermedio (XXI) che potrebbe stabilizzarsi nelle forme (XVIII) o (XIX):



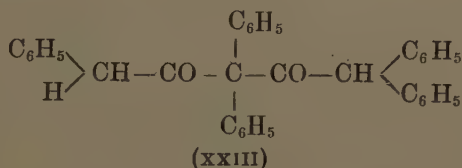
I dati analitici del prodotto a p. f. 184-185°, conformemente alle previsioni, corrispondono alla formula $C_{36}H_{25}O_2(OCH_3)_2$; la sostanza per riscaldamento in soluzione diossanica con il 5% di HCl conc., si trasforma in un solido bianco a p. f. 187° che differisce dal primitivo per la trasformazione del gruppo acetale in gruppo carbonilico. Il solido a p. f. 187° per successivo riscaldamento in ambiente acido (diossano con il 40% di HCl conc.) o

in ambiente alcalino (NaOH metilalcolica al 1%), conduce ad un prodotto a p.f. 147° al quale, in base ai risultati delle analisi, al fatto che per scissione in ambiente basico in condizioni più drastiche della precedente dà origine ad acido difenilacetico ed a trifenilacetone, ed al fatto che dà colorazione rosso ciliegia con una soluzione alcoolica di FeCl₃, deve essere attribuita la struttura di 1,1,3,5,5-pentafenilpentandione-2,4 (XXII).



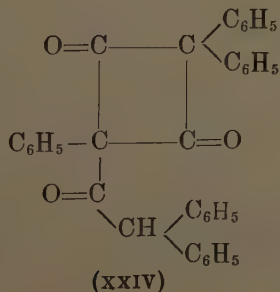
Il prodotto a p.f. 184-185°, per riscaldamento in ambiente alcalino, non viene sensibilmente alterato.

Nè il prodotto a p.f. 184-185°, nè quello a p.f. 187° in soluzione acetonica decolorano una soluzione diluita di KMnO₄; questo permette di escludere, per il composto in esame, le strutture (XVI) e (XVIII), d'altra parte una struttura β-lattonica del tipo (XVI) si aprirebbe anche per idrolisi blanda ed il composto (XVIII) porterebbe, per apertura del ciclo al 1,3,3,5,5-pentafenilpentandione-2,4 (XXIII).



La struttura (XIX) dovrebbe essere esclusa in base al fatto che il prodotto a p.f. 187° non dà colorazione con una soluzione alcoolica di FeCl₃ ed in base al fatto che operando la scissione in varie condizioni si ottiene sempre il dichetone (XXII) con punto di fusione abbastanza netto già dopo la prima cristallizzazione, così che sembra improbabile che nel prodotto ottenuto possa essere presente il dichetone (XXIII).

Al prodotto a p.f. 184-185° può essere quindi attribuita la struttura (XVII) di 1,1,3-trifenil-3-difenilacetilciclobutandione-2,4 dimetilacetale-2 ed al prodotto a p.f. 187° la struttura di 1,1,3-trifenil-3-difenilacetilciclobutandione-2,4 (XXIV).



Sia il composto (XVII), sia il composto (XXIV), come anche il dichetone (XXII), non reagiscono con gli usuali reattivi dei gruppi carbonilici probabilmente a causa dell'ingombro da parte dei fenili.

Il differente modo di stabilizzarsi dell'intermedio (X) rispetto all'intermedio (XX) trova riscontro in quanto è stato osservato nel caso della reazione dei chetenacetali mono e disostituiti con fenilisocianato ²⁾ ³⁾. I due intermedi differiscono esclusivamente per l'atomo di idrogeno dell'intermedio (X) che, nel (XX), è sostituito da un raggruppamento acilico; poichè questo atomo di idrogeno è reso mobile dalla particolare configurazione dell'intermedio, è giustificato pensare che, nel caso del (X) si possa verificare la migrazione del protone con formazione di un composto a struttura (XV) o, più probabilmente a struttura (XIV) di fenildifenilacetilchetene dimetilacetale. Nel caso dell'intermedio (XX), derivante dalla forma eccitata di un chetenacetale bisostituito, si può verificare unicamente la chiusura del ciclo. Ciò è stato confermato studiando il comportamento dei dialchilchetenacetali rispetto al difenilchetene; in questa reazione si formano i monoacetali dei ciclobutandioni tetrasostituiti, come sarà riferito in una prossima nota sullo argomento.

Concludendo possiamo dire che per reazione con i cheteni bisostituiti i chetenacetali monosostituiti formano un intermedio probabilmente con struttura del tipo (XIV), il quale per idrolisi porta a β -chetoesteri difficilmente preparabili per altra via. I chetenacetali bisostituiti portano invece al monoacetale di un ciclobutandione-1,3 asimmetrico.

PARTE SPERIMENTALE.

REAZIONE FRA DIFENILCHETENE E FENILCHETENE-DIMETILACETALE NEL RAPPORTO 1 : 1.

Si aggiungono g 4 di difenilchetene ⁷⁾ (0,021 moli) a g 3,4 di fenilchetene-dimetilacetale ⁸⁾ (0,021 moli) e si riscalda la miscela omogenea per 1 ora a 80-85°, quindi si distilla il liquido denso ottenuto. Nelle teste passano il difenilchetene ed il fenilchetenacetale che non hanno reagito. Fra 190 e 210° a 0,3 mm distillano g 2,2 (rese 30%) di un olio giallo, molto viscoso, non cristallizzabile che viene facilmente idrolizzato dalla umidità atmosferica.

⁷⁾ Organic Syntheses Vol. III, Wiley J. e Sons, Inc., New York, 1955, pag. 356.

⁸⁾ Mc ELVAIN S. M., VENERABLE J. T. *Ketene Acetals* - XXI - *The Dealculation of Orthoesters. Dimethylketene Dimethylacetal*. J. Am. Chem. Soc., **72**, 1661 (1950).

Idrolisi dell'olio a p. e. 190-210° a 0,3 mm: 2,4,4-trifenilacetato di metile (XI).

L'olio viscoso ottenuto dalla reazione precedente, conservato all'aria, si trasforma in 2-3 giorni ⁹⁾ quantitativamente in un solido bianco a carattere neutro, insolubile in acqua, molto poco solubile in ligroina ed etanolo, solubile in benzolo, diossano, acetato di etile, acetone che, cristallizzato da ligroina, si presenta in aghi a p. f. 118-119°. Analisi:

	trov. %:	C	80,23;	H	6,02;	OCH ₃	9,06;
per C ₂₃ H ₂₀ O ₃	calc. :		80,21;		5,85;		9,01.

L'estere (XI) in soluzione alcoolica dà con FeCl₃ una colorazione rosso cupo; riscaldato a ricadere per 6 ore in soluzione di KOH idrometilalcoolica (9 parti di metanolo 1 parte di acqua) al 5% ¹⁰⁾ porta, con buone rese, ad acido difenilacetico ed acido fenilacetico che sono stati separati in base alla loro diversa solubilità in acqua ed identificati mediante punto di fusione in miscela con campioni autentici. Riscaldato a ricadere per 10 ore in una soluzione diossanica di HCl conc. (5 : 4) ¹⁰⁾ porta, con buone rese, al 1, 1, 3-trifenilacetone a p. f. 80-81° ¹¹⁾ identificato anche attraverso la formazione della ossima a p. f. 134-135° ¹¹⁾.

REAZIONE FRA DIFENILCHETENE E FENILCHETENE-DIMETILACETALE NEL RAPPORTO 2 : 1. 1,1,3-trifenil-3-difenilacetilciclobutandione-2,4 dimetilacetale-2 (XVII).

Si aggiungono g 5 (0,026 moli) di difenilchetene a g 2,1 (0,013 moli) di fenilchetene-dimetilacetale e si riscalda il liquido omogeneo a 90-95°. Dopo circa due ore si nota la formazione di un solido in seno al liquido e, continuando il riscaldamento, la miscela si rapprende gradatamente. Dopo 7 ore ¹²⁾ la massa, quasi completamente solidificata, viene raffreddata e filtrata per setto poroso. Il solido ottenuto viene lavato con poco etere; nel solvente passano le ultime tracce di olio unitamente a poco prodotto. Si ottengono g 2,55 (resa 36%) di un solido bianco, a carattere neutro, insolubile in acqua, poco solubile in ligroina, etanolo, acido acetico; solubile in diossano, acetato di etile, benzolo, etere, acetone. Il prodotto, per cristallizzazione da ligroina si presenta in aghi a p. f. 184-185°; in soluzione alcoolica

⁹⁾ L'idrolisi dell'olio a p. e. 190-210° a 0,3 mm a 2, 4, 4-trifenilacetato di metile può essere realizzata più rapidamente per ebollizione a ricadere in soluzione diossanica.

¹⁰⁾ La dissoluzione avviene solamente a caldo.

¹¹⁾ ORÉKHOFF A. *Recherches sur les transpositions moléculaires chez les α-glycols* (2^e mémoire. Produit de déshydratation du triphényl-1, 2, 3-propane-diol-1,2). Bull. Soc. Chim. France, [4], 25, 109 (1919).

¹²⁾ Se si protrae ulteriormente il riscaldamento non si nota un sensibile miglioramento delle rese della reazione.

satura non dà colorazione con FeCl_3 , ed in soluzione acetonica non decolora una soluzione diluita di KMnO_4 ; non reagisce con i comuni reattivi dei gruppi carbonilici. Per riscaldamento a ricadere per 7 ore con KOH alcoolica al 3% ¹⁰), o per 12 ore con KOH idrodiossanica al 18% sotto agitazione, non subisce notevole alterazione ed è possibile recuperare quasi totalmente il prodotto inalterato. Analisi:

	trov. %:	C 82,74;	H 5,99;	OCH_3 11,19;
per $\text{C}_{33}\text{H}_{32}\text{O}_4$	calc. :	82,58;	5,84;	11,23.

peso molecolare (crioscopia in benzolo): trov. 534;
calc. 552.

L'acetale (XVII) è stato ottenuto, con rese del 22%, dall'olio a p. e. 190-210° a 0,3 mm per riscaldamento a 90-100° per 3 ore con un equivalente di difenilchetene.

In Fig. 1 è riportato lo spettro I. R. del 1,1,3-trifenil-3-difenilacetilciclobutandione-2,4 dimetilacetale-2 (XVII). Lo spettro è stato eseguito con uno spettrofotometro Perkin-Elmer, mod. 13C a doppio raggio, equipaggiato con un prisma di LiF nella zona 3600-2800 cm^{-1} e con un prisma di NaCl nella zona 2000-600 cm^{-1} . La sostanza è stata esaminata sotto forma di film (fra due finestre di NaCl) allo stato liquido o solido.

Blanda idrolisi del ciclobutandione dimetilacetale (XVII): 1,1,3-trifenil-3-difenilacetilciclobutandione-2,4 (XXIV).

Grammi 0,5 del ciclobutandione dimetilacetale (XVII), sciolti in 13 cc di diossano, sono addizionati con 0,6 cc di HCl conc. e riscaldati con bagno a 85°. Dopo 3 ore si allontana il solvente a bassa pressione, si riprende con acqua e si filtra. Si ottengono g 0,4 di un solido bianco, a carattere neutro, insolubile in acqua, poco solubile in etanolo e ligroina, solubile in benzolo, diossano, acetone, cloroformio, che, per cristallizzazione da ligroina si presenta in aghi a p. f. 187°. In soluzione etanolica satura non dà colorazione con FeCl_3 , in soluzione acetonica non decolora una soluzione diluita di KMnO_4 ; non reagisce con i comuni reattivi dei gruppi carbonilici. Analisi:

	trov. %:	C 85,31;	H 5,20;
per $\text{C}_{36}\text{H}_{26}\text{O}_3$	calc. :	85,35;	5,17.

Scissione del ciclobutandione (XXIV): 1,1,3,5,5-pentafenilpentandione-2,4 (XXII).

Grammi 0,4 del ciclobutandione (XXIV) si sciolgono in una miscela costituita da 2,8 cc di diossano e 2 cc di HCl conc. ¹⁰) e si riscalda la soluzione a ricadere. Dopo 7 ore si allontana il solvente a bassa pressione e si

riprende il solido residuo con acetato di etile. La soluzione ottenuta si dibatte con Na_2CO_3 2N, si secca su MgSO_4 e si allontana il solvente a bassa pressione si ottengono g 0,3 di un solido bianco insolubile in acqua, poco solubile in etanolo e ligroina, solubile in benzolo, diossano, etere, acetone che, per cristallizzazione da etanolo, si presenta in aghi a p.f. 147-148°. È insolubile in NaOH 2N, in soluzione alcoolica satura dà colorazione rosso ciliegia con FeCl_3 . Analisi:

	trov. %:	C	87,31;	H	5,96;
per $\text{C}_{35}\text{H}_{28}\text{O}_2$	calc. :		87,47;		5,87.

Il dichetone (XXII) per riscaldamento a 80° per 4 ore in soluzione di NaOH N diluita con eguale volume di diossano¹⁰ si scinde in acido difenilacetico e trifenilacetone; quest'ultimo può essere separato dal dichetone (XXII), inalterato, mediante cristallizzazione frazionata da etanolo, nel quale è più solubile. I due prodotti della scissione chetonica sono stati identificati mediante punto di fusione in miscela con campioni autentici di acido difenilacetico e trifenilacetone.

Il dichetone (XXII) a p.f. 147-148° può essere ottenuto con ottime rese, per riscaldamento a lento ricadere per 15 minuti con NaOH metilalcoolica all'1% del ciclobutandione (XXIV) o anche dall'acetale (XVII) operando nelle condizioni descritte per la scissione del ciclobutandione (XXIV).

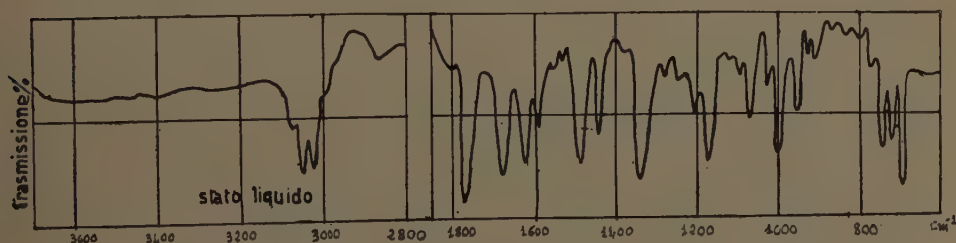


Fig. 1.

Napoli, Istituto di Chimica Organica dell'Università, febbraio 1961.

RIASSUNTO. — Dalla reazione fra il difenilchetene ed il fenilchetene dimetilacetale si ottiene un olio altobollente, che probabilmente presenta la struttura di fenil-difenilacetilchetene dimetilacetale (XIV), facilmente idrolizzabile a 2,4,4-trifenilacetacetato di metile.

Se la reazione viene condotta in condizioni diverse si ottiene 1,1,3-trifenil-3-difenilacetilciclobutandione-2,4 dimetilacetale-2 che, per blanda idrolisi in ambiente acido,

si trasforma nel trichetone corrispondente. Questo, per successivo trattamento con acidi o con alcali, porta al 1,1,3,5,5,5-pentafenilpentandione-2,4.

Si discutono i meccanismi delle reazioni e si dimostrano le strutture dei prodotti ottenuti.

SUMMARY. — From the reaction between the diphenylketene and the phenylketene dimethylacetal an oil with high boiling point is obtained, which probably presents the phenyl-diphenylacetylketene dimethylacetal (XIV) structure, easily hydrolyzable to methyl 2,4,4-triphenylacetoacetate.

If the reaction is carried out in different conditions the 1,1,3-triphenyl-3-diphenylacetylcyclobutandione-2,4 dimethylacetal-2 is obtained, which gives through weak acid hydrolysis, the corresponding triketone. The latter, through successive treatment with acids or basis, yields the 1,1,3,5,5-pentaphenylpentandione-2,4.

The mechanisms of the reactions are discussed and the structures of the products obtained are explained.

Vibrazioni libere e forzate di un corpo rigido in un mezzo elastico.

*Nota del dr. ing. Giovanni Menditto,
presentata dal socio corrisp. E. Giangreco*

(Adunanza del dì 4 marzo 1961)

1. - PREMESSE.

Consideriamo un blocco B di fondazione poggiato su un mezzo elastico (terreno). Il sistema è olonome e ad uno spostamento locale

$$n = n(P)$$

$$t = t(P)$$

di un suo elementino dA rispettivamente nel piano normale e tangente il vincolo di olonomia (terreno) oppone una reazione di componenti:

$$(1) \quad \begin{aligned} dR_n &= C \, n \, dA \\ dR_t &= D \, t \, dA \end{aligned}$$

con C e D funzioni locali caratterizzanti l'elasticità normale e tangenziale del suolo, di valori pressochè eguali e di scarsa influenza nella valutazione degli sforzi [1].

Assunta una terna trirettangola $Oxyz$ con origine nel baricentro O di B rispetto alla quale n e t abbiano rispettivamente coseni direttori α_i e β_i ($i = 1, 2, 3$), scelti come gradi di libertà del sistema i tre spostamenti u_i del baricentro O secondo x, y, z e le tre rotazioni p_i di B intorno ai predetti assi, se con s_n ed s_t si indicano le componenti secondo n e t dello spostamento rototraslatorio infinitesimale di P si ha, ricordando le espressioni cartesiane del prodotto scalare e misto [2]:

$$(2) \quad \begin{aligned} s_n &= \left[s + \omega \wedge (P - O) \right] \cdot n = \sum_{i=1}^{i=3} u_i \alpha_i + \Phi \\ s_t &= \left[s + \omega \wedge (P - O) \right] \cdot t = \sum_{i=1}^{i=3} u_i \beta_i + \Psi \end{aligned}$$

con ω vettore rotazione di componenti p_i e con

$$(3) \quad \Phi = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ x & y & z \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$\Psi = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ x & y & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Le espressioni delle energie potenziali e cinetiche risultano:

$$(4) \quad V = \frac{1}{2} \left[\int_{\Delta} s_n^2 (P) C dA + \int_{\Delta} s_t^2 (P) D dA \right]$$

$$T = \frac{1}{2} \left[M \sum_{i=1}^3 \dot{u}_i^2 + \sum_{i=1}^3 A_i \dot{p}_i^2 \right]$$

essendo M la massa del blocco B ed A_i il suo momento d'inerzia rispetto al generico asse della terna scelta. Le equazioni di LAGRANGE per i sistemi olonomi nel caso particolare in cui la sollecitazione attiva è posizionale e conservativa si scrivono:

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = 0$$

con

$$(6) \quad \mathcal{L} = T - U$$

funzione di LAGRANGE che sintetizza la natura del sistema materiale e la sua sollecitazione conservativa [3].

Le (5), stante le (2) e (4), si esplicitano in:

$$(7) \quad M \ddot{u}_i + \int_{\Delta} \left(\sum_{i=1}^3 u_i \alpha_i + \sum_{i=1}^3 \Phi_i p_i \right) \alpha_i C dA + \int_{\Delta} \left(\sum_{i=1}^3 u_i \beta_i + \sum_{i=1}^3 \Psi_i p_i \right) \cdot \beta_i D dA = 0$$

$$A_i \ddot{p}_i + \int_{\Delta} \left(\sum_{i=1}^3 u_i \alpha_i + \sum_{i=1}^3 \Phi_i p_i \right) \Phi_i C dA + \int_{\Delta} \left(\sum_{i=1}^3 u_i \beta_i + \sum_{i=1}^3 \Psi_i p_i \right) \cdot \Psi_i D dA = 0$$

con Φ_i e Ψ_i rispettivamente minori del secondo ordine dei determinanti (3) calcolati mediante la seconda riga.

Scelto per le u_i e p_i soluzioni del tipo:

$$(8) \quad \begin{aligned} u_i &= \sum_{i=1}^{i=3} \bar{u}_i (a'_i \sin \lambda'_i t + b'_i \cos \lambda'_i t) \\ p_i &= \sum_{i=1}^{i=3} \bar{p}_i (a''_i \sin \lambda''_i t + b''_i \cos \lambda''_i t) \end{aligned}$$

le (5) forniscono un sistema di sei equazioni algebriche lineari ed omogenee. Affinchè si abbiano soluzioni non nulle è necessario e sufficiente che sia nullo il determinante dei coefficienti, condizione questa che conduce all'equazione secolare delle frequenze ed agli autovalori.

2. - CASO DEL PROBLEMA PIANO.

Nel caso particolare del problema piano ($u_1 = u$, $u_2 = v$, $p_3 = r$ ed $u_3 = p_1 = p_2 = 0$) pensando che a mezzo di un certo vincolo un punto materiale $P(\xi, \eta)$ di massa m sia collegato al blocco B, la funzione (6) e le equazioni di LAGRANGE nell'ipotesi che siano preponderanti le sole componenti orizzontali dello spostamento del blocco e della massa m , si scrivono:

$$(9) \quad \begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 - \sigma_1^2 q_1^2 + \dot{q}_2^2 - \sigma_2^2 q_2^2) \\ \ddot{q}_1 + \sigma_1^2 q_1 &= Q_1 \\ \ddot{q}_2 + \sigma_2^2 q_2 &= Q_2 \end{aligned}$$

con:

$$(10) \quad \begin{aligned} Q_i &= F_i \frac{\partial u}{\partial q_i} + F_4 \frac{\partial \bar{u}}{\partial q_i} \quad (*) \quad (i = 1, 2) \\ u &= \frac{1}{\sqrt{M}} (q_1 \cos \omega + q_2 \sin \omega) \\ \bar{u} &= \frac{1}{\sqrt{M}} (q_1 \sin \omega - q_2 \cos \omega) \end{aligned}$$

Le σ_i si identificano con le pulsazioni proprie del sistema e le q_i sono nuove coordinate che compaiono al posto delle u_i e p_i al fine di avere le equazioni di LAGRANGE in forma separata [4].

*) Con F_h indichiamo le componenti della sollecitazione attiva.

3. - Le (9) consentono di pervenire alla conoscenza della caratteristica flessionale \mathfrak{M} al piede di un piedritto, perfettamente elastico, di densità trascurabile, ad un estremo del quale sia applicata una massa concentrata m e con l'altro estremo incastrato nel blocco di fondazione, sottoposto ad un moto sismico ondulatorio (*).

Com'è noto [5] il moto sismico può interpretarsi ricorrendo all'analisi armonica; conviene partire da due semplici moti sinusoidali:

$$(11) \quad \begin{aligned} s_0 &= r \operatorname{sen} \alpha t \\ s_0 &= r (1 - \cos \alpha t) \end{aligned}$$

che si tengono distinti poichè il primo investe il blocco con velocità iniziale nulla ($\dot{s}_0 = 0$, movimento sismico ad « inizio dolce »), il secondo con la massima delle sue velocità ($\dot{s}_0 = r \alpha$).

4. - In altro studio [4] è stato affrontato il problema partendo dalla prima delle (11) e pervenendo alla seguente espressione di

$$(12) \quad \mathfrak{M} = a_0 \pi n (\sqrt{Mn} \operatorname{sen} \omega \cos \omega + m \operatorname{sen}^2 \omega)$$

con:

a_0 = massima accelerazione sismica;

n = numero delle oscillazioni all'istante t .

In questa nota ci proponiamo di trovare l'espressione di \mathfrak{M} a partire dalla seconda delle (11).

5. - Nell'ipotesi allora che il blocco di fondazione venga investito da un'onda del tipo (11₂), le forze d'inerzia che nascono in conseguenza di quest'effetto sismico sono date da:

$$(13) \quad \begin{aligned} F_1 &= -M \ddot{s}_0 = M (r \alpha^2 \cos \alpha t) \\ F_2 &= -m \ddot{s}_0 = m (r \alpha^2 \cos \alpha t) \end{aligned}$$

e le componenti lagrangiane, stante (10), valgono:

$$\begin{aligned} Q_1 &= F_1 \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{1}{\sqrt{M}} (q_1 \cos \omega + q_2 \cos \omega) \right] + \\ &+ F_2 \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{1}{\sqrt{m}} (q_1 \operatorname{sen} \omega - q_2 \cos \omega) \right] = \\ &= \frac{M r \alpha^2 \cos \alpha t}{\sqrt{M}} \cos \omega + \frac{m r \alpha^2 \cos \alpha t}{\sqrt{m}} \operatorname{sen} \omega = \\ &= r \alpha^2 (\sqrt{M} \cos \omega + \sqrt{m} \operatorname{sen} \omega) \cos \alpha t = r \alpha^2 D_1 \cos \alpha t \end{aligned}$$

*) Quest'ultima ipotesi, per la natura del moto, consente di riferirci alle sole componenti orizzontali dello spostamento del blocco.

$$\begin{aligned} Q_2 &= F_1 \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{1}{\sqrt{M}} (q_1 \cos \omega + q_2 \sin \omega) \right] + \\ &+ F_2 \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{1}{\sqrt{m}} (q_1 \sin \omega - q_2 \cos \omega) \right] = \\ &= r \alpha^2 (\sqrt{M} \sin \omega - \sqrt{m} \cos \omega) \cos \alpha t = r \alpha^2 D_2 \cos \alpha t \end{aligned}$$

Le equazioni di LAGRANGE relative al moto forzato divengono:

$$(14) \quad \begin{aligned} \ddot{q}_1 + \sigma_1^2 q_1 &= r \alpha^2 D_1 \cos \alpha t \\ \ddot{q}_2 + \sigma_2^2 q_2 &= r \alpha^2 D_2 \cos \alpha t \end{aligned}$$

In condizioni di risonanza supposto $\sigma_1 < \sigma_2$ bisogna porre $\alpha = \sigma_1$; quindi l'integrale generale della (14) vale:

$$(15) \quad \begin{aligned} q_1 &= C_1 \sin \sigma_1 t + \frac{1}{2} r D_1 \sigma_1 t \sin \sigma_1 t = (C_1 + \frac{r D_1}{2} \sigma_1 t) \sin \sigma_1 t \\ q_2 &= C_2 \sin \sigma_2 t + \frac{r D_2 \sigma_1^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \cos \sigma_1 t \end{aligned}$$

assumendo quali condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= \dot{q}_1(0) = 0 \\ q_2(0) &= \dot{q}_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Le (15) diventano:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2} r D_1 \sigma_1 t \sin \sigma_1 t. \\ q_2 &= \frac{r D_2 \sigma_1^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \left(\frac{\sin \sigma_2 t}{\sigma_2} + \cos \sigma_1 t \right). \end{aligned}$$

Ripassando alle coordinate u e \bar{u}

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{M}} (q_1 \cos \omega + q_2 \sin \omega) \\ \bar{u} &= \frac{1}{\sqrt{m}} (q_1 \sin \omega - q_2 \cos \omega) \end{aligned}$$

e tenendo conto del solo termine dipendente linearmente dal tempo essendo gli altri trascurabili rispetto ad esso, si ha:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{M}} \frac{r D_1}{2} \sigma_1 t \sin \sigma_1 t \cos \omega. \\ u &\simeq \frac{r \sigma_1 D_1}{2 \sqrt{M}} (\sin \sigma_1 t + t \sigma_1 \cos \sigma_1 t) \cos \omega. \\ \bar{u} &\simeq \frac{r \sigma_1 D_1}{2 \sqrt{M}} (2 \sigma_1 \cos \sigma_1 t - t \sigma_1^2 \sin \sigma_1 t) \cos \omega. \end{aligned}$$

trascurando ancora il secondo termine per $\cos \sigma_1 t = 1$ si ha:

$$\ddot{u}_{max} = \frac{r \sigma_1 D_1}{2 \sqrt{M}} 2 \sigma_1 \cos \omega = \frac{r \sigma_1^2 D_1}{\sqrt{M}} \cos \omega.$$

Analogamente:

$$\ddot{u} \approx \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{r D_1}{2} \sigma_1 t \sin \sigma_1 t \sin \omega.$$

e quindi:

$$\ddot{u}_{max} = \frac{r \sigma_1^2 D_1}{\sqrt{m}} \sin \omega.$$

$$\begin{aligned} F_1 &= M \ddot{u}_{max} = \sqrt{M} r \sigma_1^2 D_1 \cos \omega = \sqrt{M} r \sigma_1^2 \cos \omega (\sqrt{M} \cos \omega + \\ (16) \quad &+ \sqrt{m} \sin \omega) = r \sigma_1^2 (M \cos^2 \omega + \sqrt{Mn} \sin \omega \cos \omega) = \\ &= \alpha_0 (M \cos^2 \omega + \sqrt{Mn} \sin \omega \cos \omega) \end{aligned}$$

$$F_2 = m \ddot{u}_{max} = \alpha_0 (\sqrt{Mn} \sin \omega \cos \omega + m \sin^2 \omega)$$

Trascurando il valore di F_1 ed indicando con h l'altezza del piedritto si ha:

$$(17) \quad M = \alpha_0 [\sqrt{Mn} \sin \omega \cos \omega + m \sin^2 \omega]$$

Volendo tener conto del termine $\cos \sigma_1 t$, l'estremante di \ddot{u} si ricerca imponendo la condizione $\ddot{\ddot{u}} = 0$; operando si trova:

$$-\frac{\sigma_1 t}{3} = \operatorname{tg} \sigma_1 t$$

da cui risolvendo graficamente [6]

$$\sigma_1 t = 140^\circ 50' = 2,43 \text{ rad.}$$

con che:

$$\ddot{u}_{max} = \frac{1,54}{\sqrt{M}} r \sigma_1^2 D \cos \omega.$$

$$F_1 = 1,54 \sqrt{M} r \sigma_1^2 D \cos \omega.$$

ed analogamente:

$$\ddot{u}_{max} = 1,54 r \sigma_1^2 D_1 \frac{\sin \omega}{\sqrt{m}}.$$

$$F_2 = 1,54 \sqrt{m} r \sigma_1^2 D_1 \sin \omega.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] KRALL Giulio. *Vibrazioni di un corpo rigido in sospensione elastica*. Annali di matematica 1930, vol. I. *I problemi statici delle costruzioni marittime*. o. c., 1934.
- [2] FINZI Bruno. *Meccanica Razionale*, vol. I. Bologna, Zanichelli, 1959, pag. 132.
- [3] FINZI Bruno. *Ibidem*, vol. II, pagg. 265-266.
- [4] GIANGRECO Elio. — *Vibrazioni libere e forzate di un corpo rigido in un mezzo elastico, con una applicazione all'asismica*. Rend. Acc. Sc. Fis. e mat., serie IV, vol. XXII. Napoli, 1950.
- [5] DANUSSO Arturo. *Sulla statica delle costruzioni asismiche*. Roma, Bardi, 1932, pag. 11.
- [6] KÁRMÁN e BIOT. *Metodi matematici nell'ingegneria*. Torino, Einaudi, 1951, pag. 372.

SOMMARIO. — Con riferimento ad un blocco di fondazione poggiato su un mezzo elastico e sottoposto ad uno spostamento locale secondo il piano normale e tangente al vincolo, assunti quali gradi di libertà del sistema lo spostamento e la rotazione del baricentro del blocco ed assegnate a queste grandezze convenienti espressioni, si scrivono le equazioni di LAGRANGE relative ai sistemi olonomi nel caso particolare che la forza attiva sia posizionale e conservativa. Successivamente si specializzano le equazioni di LAGRANGE al caso del problema piano e nell'ipotesi che al blocco sia collegata una massa materiale « m » e che risultano preponderanti le sole componenti orizzontali dello spostamento del blocco e della massa. Si opera infine un cambiamento di variabili per ottenere le equazioni di LAGRANGE in forma separata. Successivamente utilizzando l'analisi armonica per l'interpretazione del moto sismico, si determina la caratteristica flessionale al piede di un piedritto — perfettamente elastico e di densità trascurabile — ad un estremo del quale sia applicata la massa « m » e con l'altro estremo incastrato nel blocco di fondazione, nella duplice ipotesi che il moto sismico sia ad inizio dolce oppure investa il blocco con il valore massimo della sua velocità.

SUMMARY. — With reference to a foundation block laid on an elastic medium and subjected to a local displacement in accordance with the plane, normal and tangent to the support, assuming as the degrees of freedom of the system, the displacement and the rotation of the centroid of the block, and after having given to these quantities some convenient expressions, it is possible to write LAGRANGE's equations with reference to the « olonomi » systems, in the particular case that the active force is positional and conservative. Then, LAGRANGE's equations, are written relatively to the case of the plane problem, and in the hypothesis that the block is connected to a material mass « m » only the horizontal components of the displacement of the block and the mass are predominant. A variable change is then made to obtain LAGRANGE's equations in another form. Then using harmonic analysis for the interpretation of seismic movement it is possible to determine the flexional characteristic at the foot a column — perfectly elastic and of negligible density — to an end of which is applied the mass « m » and with the other end fixed into the foundation block, in the double hypothesis that the sysmic movement is initially smooth or invests the block with the maximum value of the speed.

Caratteristiche di una distribuzione continua dei piccoli ioni atmosferici, deducibili mediante l'uso dell'apparecchio Ebert-Mache.

Nota del dr. Gabriele Rago, presentata dal socio Giuseppe Imbò

(Adunanza del dì 1 aprile 1961)

Nelle misure di mobilità dei piccoli ioni atmosferici si adopera il condensatore EBERT-MACHE. Le osservazioni, eseguite con tale apparecchio, consistono nel determinare il numero di ioni per cm^3 all'EBERT, una prima volta col MACHE a potenziale zero ed una seconda volta col MACHE a potenziale non nullo.

Se nell'aria vi fossero ioni di una sola mobilità, tali osservazioni consentirebbero di dedurre quest'ultima mediante la formula;

$$(1) \quad k = \frac{N_e - N_i}{N_e \rho_m V_m} \quad \text{con} \quad \rho_m = \frac{4 C_m}{u (R^2 - r^2)}$$

ove si è posto:

N_e — ioni per cm^3 catturati dall'EBERT, col MACHE a potenziale zero.

N_i — ioni per cm^3 catturati dall'EBERT, col MACHE a potenziale $V_m \neq 0$.

C_m — capacità del MACHE.

R — raggio dell'armatura esterna comune ai due condensatori.

r — raggio dell'armatura interna comune ai due condensatori.

u = velocità di aspirazione.

Poichè, invece, è da supporre che nell'atmosfera esistano ioni di mobilità diverse, la (1) perde significato; oltre ad essere, in ogni caso, insufficiente per dare un'idea della distribuzione degli ioni rispetto alle mobilità.

Si richiede, pertanto, un più attento esame sia del significato da attribuire alla (1), che delle altre indicazioni, deducibili in base alla teoria dell'EBERT-MACHE.

Una prima indagine in tal senso è stata svolta dal Prof. Giuseppe IMBÒ,

considerando il solo caso di una distribuzione discontinua rispetto alle mobilità ¹⁾.

Per suggerimento dello stesso Prof. IMBÒ, viene ora fatta l'ipotesi che gli ioni abbiano una distribuzione continua.

Si ammette, in altri termini, che esiste una funzione $n(k)$, tale che il numero dN di ioni per cm^3 , compresi in un intervallo dk , sia dato dalla relazione:

$$dN = n(k) dk$$

ed il numero N , compreso tra le mobilità k_1 e k_2 , sia dato dall'integrale:

$$N = \int_{k_1}^{k_2} n(k) dk$$

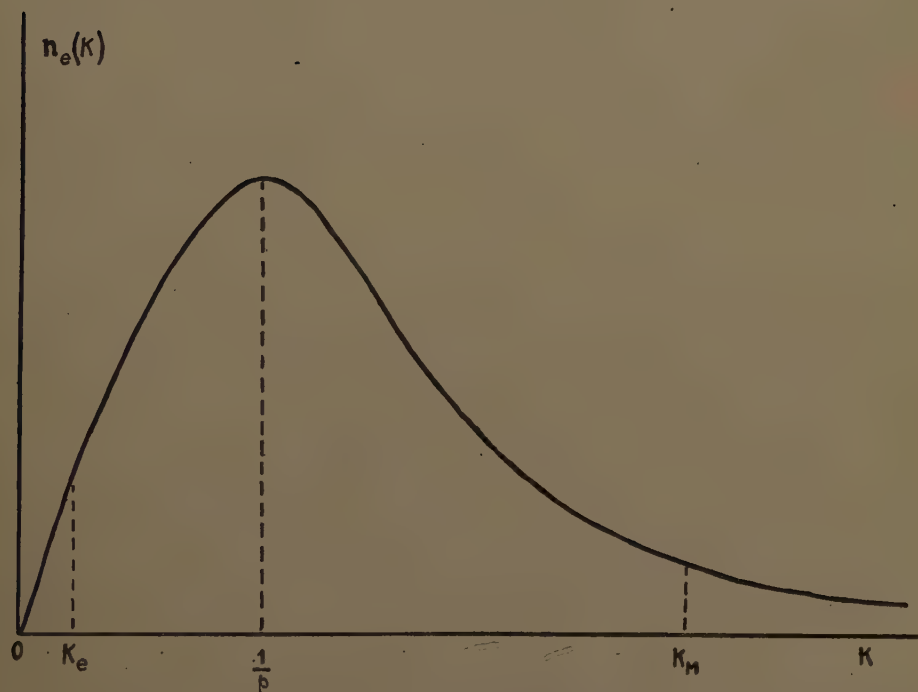


Fig. 1. — Legge di distribuzione che si postula relativamente a tutti gli ioni catturati dall'EBERT.

¹⁾ G. IMBÒ. *Ricerche sulla misura della mobilità dei piccoli ioni atmosferici, mediante l'apparecchio EBERT-MACHE*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., s. 4^a, vol. X. Napoli, 1940.

È immediato che, in tal caso, anche gli ioni catturati dai due apparecchi hanno una distribuzione continua, ma la loro legge di distribuzione coincide con la $n(k)$ soltanto negli intervalli di mobilità, per i quali si ha regime di saturazione. In condizioni di regime ohmico, dette k_e e k_m le mobilità che soddisfano le relazioni:

$$(2) \quad V_e = \frac{1}{k_e \rho_e} \quad V_m = \frac{1}{k_m \rho_m}$$

si hanno, rispettivamente per l'EBERT e per il MACHE, le due leggi di distribuzione:

$$(3') \quad n_e(k) = \lambda(k, k_e) n(k) \quad (3'') \quad n_m(k) = \lambda(k, k_m) n(k)$$

ove λ , intesa come funzione di k dipendente dal parametro k_e o k_m esprime, per ogni k , il rapporto tra gli ioni catturati e quelli effettivamente entrati nell'apparecchio.

Con facili considerazioni ²⁾ può mostrarsi ancora che:

$$(4') \quad \lambda(k, k_e) = \frac{k}{k_e} \quad (4'') \quad \lambda(k, k_m) = \frac{k}{k_m}$$

Delle tre distribuzioni continue sopra indicate, la $n(k)$ è quella che

²⁾ La funzione λ può ricavarsi prendendo in considerazione gli ioni di mobilità k che entrano nell'apparecchio nell'unità di tempo. Essendo per ipotesi $n(k)$ la densità degli ioni di mobilità k , tale numero è dato da:

$$N = n(k) \pi (R^2 - r^2) u$$

Di essi l'apparecchio cattura un numero N' dato da:

$$N' = n(k) \pi (y_0^2 - r^2) u$$

essendo y_0 il massimo raggio di ingresso che può avere uno ione di mobilità k catturato dall'apparecchio.

Facendo il rapporto tra N' ed N , si ha:

$$\frac{N'}{N} = \frac{y_0^2 - r^2}{R^2 - r^2}$$

e poichè sussistono le relazioni

$$y_0^2 - r^2 = 4k \frac{C_e V_e}{u} \quad y_0^2 - r^2 = 4k \frac{C_m V_m}{u}$$

oppure

$$R^2 - r^2 = 4k_e \frac{C_e V_e}{u} \quad R^2 - r^2 = 4k_m \frac{C_m V_m}{u}$$

risultano in definitiva la (4)' e (4)'.

meno si presta allo studio, in quanto tiene conto anche dei grossi ioni, che sfuggono al controllo dell'apparecchio.

Convienne, invece, fissare l'attenzione sulla distribuzione di tutti gli ioni catturati dall'EBERT, postulando che essa segua la legge:

$$(5) \quad n_e(k) = a k e^{-pk} \quad a > 0 \quad p > 0$$

con a e p costanti caratteristiche da determinare.

La funzione (5) è nulla per $k = 0$, nulla per $k = \infty$ e dotata di un unico massimo nel punto $\frac{1}{p}$ (Fig. I).

La mobilità $\frac{1}{p}$ ha un notevole significato fisico. Essa, infatti, rappresenta la mobilità più frequente fra quelle di tutti gli ioni catturati dall'EBERT, e, poichè l'apparecchio cattura quasi esclusivamente piccoli ioni, essa è anche la mobilità più frequente di questi ultimi.

La mobilità $\frac{1}{p}$ è ancora utile per stabilire un criterio di scelta del potenziale dell'EBERT. Se infatti la mobilità k_e , che, per la prima delle 2), corrisponde al V_E , verifica la condizione

$$(6) \quad k_e \ll \frac{1}{p}$$

è certo che l'EBERT stabilisce condizioni di saturazione per la quasi totalità dei piccoli ioni.

Condizioni di regime ohmico si hanno invece nell'intervallo $(0 - k_e)$, ove, per ciò che riguarda i piccoli ioni, la (5) dovrebbe gradualmente annullarsi alquanto prima dello zero.

In realtà, poi, la presenza dei pochi grossi ioni, catturati dall'apparecchio, giustifica l'annullarsi della (5) per $k = 0$.

Sulla (5) si potrebbe inoltre osservare che in realtà non esistono ioni con mobilità superiore ad un certo limite, e quindi la funzione dovrebbe risultare nulla per un valore di k finito. Tuttavia, a parte la trascurabilità dell'errore che si commetterebbe, ammettendo: $n_e(k) = 0$ per $k = \infty$, si può facilmente girare la difficoltà, limitando tutte le integrazioni della (5) ad un valore k_M che vale 1,63 volt/cm per gli ioni negativi e 1,36 volt/cm per quelli positivi³⁾.

Oltre che per il calcolo di $\frac{1}{p}$, la (5), quale buona approssimazione

³⁾ HESS, *The Electrical Conductivity in the atmosphere and its causes*. London, 1928.

della distribuzione reale, è utile tutte le volte che si vogliano calcolare delle correzioni. In particolare, il numero di grossi ioni, catturati dall'EBERT, si calcola, per eccesso, integrando la (5) tra zero e k_e .

Le costanti a e p possono essere facilmente dedotte, dalle osservazioni sperimentali, scrivendo due relazioni che leghino dette costanti all' N_e ed all' N_i .

La prima di esse si ottiene calcolando l'area, raccolta sotto la curva di equazione (5) nel tratto $0 - k_M$. Tale area è per definizione uguale all' N_e .

Quindi:

$$(7) \quad N_e = \frac{a}{p^2} \left[1 - e^{-pk_M} (pk_M + 1) \right]$$

Esplicitando poi la (3''), giovandosi della (4'') e della (5), ed integrando, si trova il numero N_M degli ioni catturati dal MACHE. Questo numero, sottratto dalla (7), consente di avere per N_i l'espressione: ⁴⁾.

$$(8) \quad N_i = \frac{a}{p^2} \left[1 - \frac{2}{k_M p} + e^{-pk_M} \left(\frac{2}{k_M p} + 1 \right) \right]$$

Eliminando $\frac{a}{p^2}$ dalla (7) e dalla (8), si ottiene infine:

$$(9) \quad \frac{N_i}{N_e} = \frac{k_M p - 2 + e^{-pk_M} (k_M p + 2)}{k_M p [1 - e^{-pk_M} (k_M p + 1)]}$$

ed il valore di p che la soddisfa, conduce immediatamente, per la (7), al valore di a o a quello di $\frac{a}{p^2}$, che più interessa nelle applicazioni.

Volendo calcolare la mobilità media dei piccoli ioni, si osserva che essa è definita dalla relazione:

$$(10) \quad \bar{k} = \frac{\int_{k_e}^{k_M} k n(k) dk}{\int_{k_e}^{k_M} n(k) dk}$$

La scelta dei limiti di integrazione è giustificata da un lato, per aver

⁴⁾ Per semplicità, si considerano l' N_{M_i} e l' N_i relativi al V_M definito dalla successiva formula (16).

ammesso l'esistenza di un limite massimo, dall'altro, per il fatto che gli eventuali piccoli ioni con mobilità inferiore a k_e sono trascurabili, se la (6) è verificata.

D'altra parte, nel seguito, verrà mostrato come, semprechè si verifichi la (6), i risultati siano praticamente indipendenti dal k_e . In ogni caso, non è possibile scegliere come limite inferiore lo zero, senza includere una certa aliquota di grossi ioni. Quindi, operando con la (10) sulla (5), si perviene alla formula:

$$(11) \quad \bar{k}_{\text{teor.}} = \frac{k_m^2 e^{-pk_m} - k_e^2 e^{-pk_e}}{e^{-pk_m} \left(k_m + \frac{1}{p} \right) - e^{-pk_e} \left(k_e + \frac{1}{p} \right)} + \frac{2}{p}$$

Per la determinazione sperimentale, o diretta, della stessa mobilità media, ci si può ricondurre alla (1), studiando sotto quali condizioni è valida.

A tal fine essa si può scrivere:

$$(12) \quad \bar{k}_{\text{per}} = \frac{k_m (N_e - N_i)}{N_e}$$

D'altronde, qualunque sia la $n(k)$, sussistono le relazioni:

$$(13) \quad \left. \begin{aligned} N_e &= \frac{1}{k_e} \int_0^{k_e} k n(k) dk + \int_{k_e}^{k_m} n(k) dk \\ N_m &= \frac{1}{k_m} \int_0^{k_m} k n(k) dk + \int_{k_m}^{k_e} n(k) dk \\ N_i &= N_e - N_m + q \end{aligned} \right\}$$

ove q rappresenta quella parte di ioni che vengono a trovarsi nel raggio di azione dell'EBERT, per effetto del restringimento della corrente ionica prodotto dal MACHE. Questo ultimo effetto, come è facile mostrare, si traduce nello spostamento del limite di saturazione dell'EBERT dalla mobilità k_e alla mobilità k_s , legata a k_e e k_m dalla relazione:

$$(14) \quad k_s = \frac{k_e k_m}{k_e + k_m}$$

Ciò premesso, in definitiva, la (1) si scrive:

$$(15) \quad \bar{k}_{\text{sp.}} = \frac{k_m \left[-\frac{1}{k_m} \int_0^{k_e} kn(k) dk + \frac{1}{k_m} \int_{k_e}^{k_m} kn(k) dk + \int_{k_m}^{k_M} n(k) dk - q \right]}{-\frac{1}{k_e} \int_0^{k_e} kn(k) dk + \int_{k_e}^{k_M} n(k) dk}$$

ove si è decomposto il primo integrale dell' N_m nella somma di altri due.

Il confronto della (10) con la (15) mostra che il valore, ottenuto mediante la (1), può interpretarsi come mobilità media dei piccoli ioni, solamente a condizione, che nella (15) si annullino tutti i termini che non compaiono nella (10).

L'unico accorgimento sperimentale che si può adottare a tal fine, è quello di mantenere il MACHE, durante la seconda osservazione, ad un potenziale che verifica la relazione:

$$(16) \quad V_M = \frac{1}{k_M \rho_M}$$

Con tale scelta del potenziale del MACHE, l'integrale nell'intervallo $(k_m - k_M)$ si annulla, e l'integrale nell'intervallo $(k_e - k_m)$ si estende ai limiti richiesti dalla (10).

Al contrario, i termini:

$$q \quad ; \quad \frac{1}{k_m} \int_0^{k_e} kn(k) dk \quad ; \quad \frac{1}{k_e} \int_0^{k_e} kn(k) dk$$

non eliminabili con accorgimenti sperimentali, possono essere calcolati mediante la (5). Tale calcolo potrebbe addirittura limitarsi all'ultimo di essi, in quanto i primi due, oltre a figurare nella (15) con segno opposto, sono evidentemente di ordine inferiore, rispetto al terzo.

Resta ora da stabilire se la scelta del potenziale dell'EBERT, entro certi limiti, influisce sui valori che si deducono per \bar{k} o per $\frac{1}{p}$.

Allo scopo serve innanzitutto la (12), che, anche senza la correzione al denominatore, può senz'altro ritenersi valida in prima approssimazione. Tenuto conto che le variazioni di V_E hanno come risultato una variazione nel numero di ioni catturati dall'EBERT, senza peraltro influire su quelle del MACHE, e che quindi sia l' N_e che l' N_i risultano variati nello stesso senso

e di una stessa quantità ΔN , segue, differenziando la (12), che:

$$(17) \quad \Delta \bar{k} = - \frac{\bar{k} \Delta N}{N_e}$$

D'altronde, la (11) mostra che la variazione di $\frac{1}{p}$ è dello stesso ordine di grandezza di quella del \bar{k} .

Il valore di ΔN , unica incognita, si può ora calcolare mediante la (5). Se, infatti, $\bar{k} - k_e$ è la variazione che, secondo la prima delle (2), corrisponde alla variazione di potenziale dell'EBERT, le formule:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta N_1 &= \frac{a}{p^2} \left[\frac{k_e}{\bar{k}} - 1 + e^{-p k_e} - \frac{k_e}{\bar{k}} e^{-p \bar{k}} \right] \\ \Delta N_2 &= \frac{a}{p^2} \left[1 - \frac{k_e}{\bar{k}} + e^{-p k_e} \left(\frac{2 k_e^2 p}{\bar{k}} + 3 \frac{k_e}{\bar{k}} + \frac{2}{\bar{k} p} \right) - \right. \\ &\quad \left. - e^{-p \bar{k}} \left(2 \bar{k} p + 3 + \frac{2}{\bar{k} p} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

stabiliscono i valori di ΔN , rispettivamente per un aumento o una diminuzione del potenziale dell'EBERT.

Dalle (18) è facile vedere, inoltre, che l'errore è tanto più piccolo, quanto più la (6) è soddisfatta.

Alla luce delle considerazioni fin qui svolte, sono state riesaminate le stesse osservazioni che, eseguite all'Osservatorio Vesuviano durante il periodo ottobre 1937-maggio 1938, furono a suo tempo analizzate con altra ipotesi ed in altro lavoro ⁵⁾.

Estraendo dai dati relativi a tali osservazioni quelli ottenuti come media dei valori più frequenti, si ottiene il quadro:

Ioni positivi:

$$\begin{array}{lll} V_E = 180 \text{ volt} & V_M = 0 & N_e = 2975 \\ V_E = 180 \text{ volt} & V_M = 10,7 & N_i]_{k_m = 1,36} = 2217 \end{array}$$

Ioni negativi:

$$\begin{array}{lll} V_E = 180 \text{ volt} & V_M = 0 & N_e = 2620 \\ V_E = 180 \text{ volt} & V_M = 8,9 & N_i]_{k_m = 1,63} = 1863 \end{array}$$

⁵⁾ Vedasi nota a p. 2.

Applicando le formule trovate e tenuto conto del diverso valore che assume il k_M per gli ioni dei due segni, si trova:

Ioni positivi	Ioni negativi
$\frac{1}{p} = 0,18$	$\frac{1}{p} = 0,24$
$\frac{a}{p^2} = 2989$	$\frac{a}{p^2} = 2643$
$\frac{1}{k_e} \int_0^{k_e} k n(k) dk = 82$	$\frac{1}{k_e} \int_0^{k_e} k n(k) dk = 42$
$\bar{k}_{per.} = 0,35$	$\bar{k}_{per.} = 0,48$
$\bar{k}_{teor.} = 0,35$	$\bar{k}_{teor.} = 0,48$

Risulta inoltre che, essendo $k_e = 0,046$, la condizione (6) può ritenersi soddisfatta.

È interessante notare che l'influenza dei grossi ioni è quasi trascurabile e che i valori di \bar{k} , calcolati mediante la (11), coincidono con quelli dedotti mediante la (1) corretta.

Supponendo ora di variare di ± 30 volt il potenziale dell'EBERT, applicando le (18), si deducono per il ΔN i seguenti valori:

Ioni positivi		Ioni negativi	
180 + 30	180 - 30	180 + 30	180 - 30
$\Delta N_1 = 6$	$\Delta N_2 = 51$	$\Delta N_1 = 2$	$\Delta N_2 = 29$

che risultano dello stesso ordine di grandezza dei ΔN trovati sperimentalmente per analoghe variazioni di potenziale ⁶⁾.

Pertanto, in base alla (17), le variazioni di k sono rispettivamente:

$$\Delta \bar{k}_1 = 0,0007; \quad \Delta \bar{k}_2 = 0,006$$

per gli ioni positivi e:

$$\Delta \bar{k}_1 = 0,0004; \quad \Delta \bar{k}_2 = 0,0044$$

⁶⁾ G. IMBÒ. *Densità ioniche all'Osservatorio e nel fondo del cratere vesuviano*. Bull. Volc., n. 27-30. Napoli, 1931.

per gli ioni negativi; e cioè tutti inferiori alla seconda cifra decimale. Per la (11) analogo ordine di grandezza hanno le variazioni di $\frac{1}{p}$.

Risulta quindi che, entro il campo 150-210 volta, per il potenziale dell'EBERT, i valori delle mobilità (media e prevalente) sarebbero accettabili. Sono tuttavia consigliabili per V_E i valori più alti, perchè anche i ΔN trovati mostrano come le variazioni siano tanto più piccole, quanto più la condizione (6) è soddisfatta.

Si può quindi concludere che:

a) è possibile conoscere una distribuzione approssimata dei piccoli ioni, mediante la quale si calcola, fra l'altro, la loro mobilità più frequente;

b) i calcoli, eseguiti sui dati sperimentali, mostrano che la mobilità più frequente degli ioni positivi è alquanto inferiore a quella degli ioni negativi; mentre, per ambedue i tipi di ioni, la mobilità più frequente è inferiore alla mobilità media;

c) le osservazioni si fanno con maggior profitto, portando il MACHE ad un potenziale che verifica la (16) e dando all'EBERT un potenziale sufficiente alto perchè sia verificata la (6), (in tali condizioni la (1), opportunamente corretta, serve al calcolo della mobilità media);

d) il contributo degli ioni a mobilità più bassa è trascurabile e le variazioni di potenziale dell'EBERT, entro limiti relativamente ampi, non influiscono che sulla terza cifra decimale⁷⁾.

RIASSUNTO. — Pustulando una conveniente distribuzione continua rispetto alle mobilità, si deducono, in base alla teoria dello EBERT-MACHE, i metodi da seguire per un più attendibile calcolo della mobilità media dei piccoli ioni atmosferici e per la ricerca della loro mobilità più frequente. Segue l'applicazione a dati sperimentali, già elaborati con altro metodo, e si trova che la mobilità più frequente degli ioni positivi è alquanto inferiore a quella degli ioni negativi. Si mostra inoltre che è trascurabile l'influenza degli ioni a mobilità più alta, e che le deduzioni sono, entro certi limiti, indipendenti dal potenziale dato all'EBERT.

SUMMARY. — Assuming a convenient and continuous distribution in respect of mobility, on the basis of EBERT-MACHE theory, methods of applying for a more probable calculation of the mean mobility of small atmospheric ions and for research on their most frequent mobility are deduced. The application to experimental data already elaborated with other methods follows, and it is found that the most frequent mobility of positive ions is somewhat less than that of the negatives ions. It is shown moreover that the influence of ions at a higher mobility is negligible and that deductions within certain limits are independent of the potential given by EBERT.

⁷⁾ Questo lavoro è stato fatto presso l'Istituto di Fisica Terrestre della Università di Napoli. Pertanto desidero ringraziare il Direttore dell'Istituto, prof. Giuseppe IMBÒ, non solo per avermi accolto, ma anche e soprattutto per avermi frequentemente consigliato durante lo svolgimento del lavoro medesimo.

Sulla concentrazione dell'acido ascorbico legato in poltiglie di semi di *Phaseolus vulgaris* poste ad incubare: influenza esercitata dai costituenti del complesso radichetta-piumetta.

*Nota del prof. Francesco Badolato e della dott. Iride Bucci
presentata dal socio ordinario Antonietta Orrù*

(Adunanza del dì 1° aprile 1961)

In note precedenti [1-2] riferimmo su numerose indagini che permisero di mettere in evidenza in semi di *Phaseolus vulgaris*, accanto all'acido ascorbico libero, anche una discreta quantità di acido ascorbico legato in forma di complesso, rivelabile e determinabile dopo idrolisi con acido cloridrico, in appropriate condizioni sperimentali.

Da tali indagini risultò che i valori dell'acido ascorbico legato, che per la maggior parte si trova nella forma ridotta, determinati sui semi interi e sui soli cotiledoni, sia nello stato naturale di umidità che dopo 24 h di imbibizione, seguono l'andamento già messo in evidenza sugli stessi semi per l'acido ascorbico libero e rivelano, anche in questo caso, un'interazione fra i costituenti presenti nel complesso radichetta-piumetta e quelli cotiledonari. Si osservò inoltre, che durante le prime fasi di germinazione dei semi fino a 144 h, l'acido ascorbico legato tende a mantenersi costante, mentre quello libero aumenta notevolmente [2].

Con la presente nota si riferiscono le ricerche intese a studiare, analogamente a quanto è stato fatto per l'acido ascorbico libero, l'entità dell'interazione esercitata dai costituenti del complesso radichetta-piumetta sulle concentrazioni dell'acido ascorbico legato nelle due forme ridotta e ossidata, presenti nei cotiledoni.

PARTE SPERIMENTALE.

Anche per le presenti indagini, come per quelle già pubblicate [1] [2], si usarono semi di *Phaseolus vulgaris*, varietà cannellini, provenienti però da annata agraria differente.

A) In una prima serie di esperienze si misero ad imbibire gruppi di semi interi (sempre di numero eguale e di peso noto) per 24 h. Al termine di tale periodo si separarono da ogni gruppo i cotiledoni (a) ed i complessi radichetta-piumetta (b) che, ridotti opportunamente in sottile poltiglia (con l'ausilio di sabbia di quarzo) si misero separatamente ad incubare per 24 h e 48 h.

A tale scopo le poltiglie ottenute furono poste in ditali di carta pressata (Whatman), inumiditi e disposti in appositi germinatoi, in camera calda termostata a 30°C, con grado di umidità dell'80% (per dettagli vedi [3]).

Su un certo numero di campioni, dopo 24 h di imbibizione, si eseguirono l'estrazione e la determinazione dell'acido ascorbico legato nelle due forme ossidata e ridotta; altri campioni si prelevarono dopo 24 h, altri ancora dopo 48 h di incubazione e anche su di essi si eseguirono le medesime determinazioni.

I risultati di queste esperienze sono riportati nella tabella I (colonne *a* e *b*) ove i valori dell'acido ascorbico sono sempre espressi in mg e riferiti a 100 g di semi nelle condizioni iniziali di umidità.

B) Per la seconda serie di esperienze, come si fece per l'acido ascorbico libero [3], si dovette stabilire il rapporto ponderale esistente tra i cotiledoni e il complesso radichetta-piumetta. Esso, nelle condizioni naturali di umidità dei semi in quiescenza risultò: per g 100 di cotiledoni g 0,472 di complessi radichetta-piumetta.

Da diversi gruppi di semi (di numero sempre eguale e di peso noto) si asportarono quindi, accuratamente con la punta di un bisturi, i complessi radichetta-piumetta facendo in modo che il tegumento di ogni seme fosse intaccato il meno possibile.

Da altri gruppi di semi, di numero eguale, o doppio, o triplo o quadruplo di quello usato precedentemente, si prelevarono quindi col solito sistema, i complessi radichetta-piumetta (in tal modo si ebbero a disposizione complessi radichetta-piumetta in quantità rispettivamente eguali, doppie, triple e quadruple di quelle normalmente esistenti nel seme).

Sia i semi privati del complesso r.p. (costituiti cioè dai soli cotiledoni col tegumento seminale) sia i complessi r.p. separati dai semi, si misero ad imbibire separatamente in acqua per 24 h a 30°C, nelle condizioni già descritte.

Allo scadere delle 24 h ad ogni gruppo di cotiledoni, (separati dal tegumento seminale e triturati in mortai di porcellana con polvere di quarzo che porta quasi al completo disfacimento cellulare), si aggiunsero i vari gruppi di complessi radichetta-piumetta più su indicati, anch'essi imbibiti per 24 h a 30°C e ben triturati. Si ottennero così tre serie di poltiglie costituite da quattro gruppi ciascuna, in cui il rapporto *complesso r.p. (b)/cotiledoni (a)* è: pari a quello esistente nel seme (1b:1a), o doppio (2b:1a), o triplo (3b:1a) o quadruplo (4b:1a).

Su una serie di queste poltiglie si eseguirono *subito* l'estrazione e la determinazione dell'acido ascorbico legato, secondo il solito metodo; le altre due serie furono poste ad incubare nelle stesse condizioni indicate in A) fino a 24 h per la seconda serie e 48 h per la terza serie.

Al termine di ognuno di tali periodi si prelevarono i singoli campioni

TABELLA I.

Valori dell'acido ascorbico legato totale, ridotto ed ossidato in miscele di poltiglie, in vari rapporti, di cotiledoni e di complessi r. p.

Tempo in ore	Forme dell'ac. ascorbico legato	Cotiledoni (a) mg. (%)	Complessi r.p. (b) mg. (%)	Miscele di cotiledoni e complessi r.p. nei rapporti:			
				1b: 1a mg	2b: 1a mg	3b: 1a mg	4b: 1a mg
Dopo le iniziali 24 h di imbibiz.	AT _i det.	4,27	0,45	3,02	3,22	3,52	3,78
	calc.			4,72	5,17	5,62	6,07
	AH _i det.	2,57	0,27	1,89	2,04	2,03	2,17
	calc.			2,84	3,11	3,38	3,65
	AD _i det.	1,70	0,18	1,13	1,17	1,49	1,61
	calc.			1,88	2,06	2,24	2,42
Dopo le successive 24 h di incubaz.	AT _i det.	3,85	0,56	2,74	3,14	3,68	4,00
	calc.			4,42	4,98	5,54	6,10
	AH _i det.	3,60	0,50	1,76	1,98	2,36	2,81
	calc.			4,10	4,60	5,10	5,60
	AD _i det.	0,25	0,06	0,94	1,15	1,32	1,19
	calc.			0,31	0,37	0,43	0,49
Dopo le successive 48 h di incubaz.	AT _i det.	4,25	0,59	2,80	3,07	3,22	3,37
	calc.			4,84	5,43	6,02	6,61
	AH _i det.	3,79	0,56	2,05	2,27	2,54	2,76
	calc.			4,35	4,91	5,47	6,03
	AD _i det.	0,46	0,03	0,74	0,80	0,68	0,61
	calc.			0,49	0,52	0,55	0,58

(%) Questi valori di base sono sempre riferiti ai cotiledoni o ai complessi r. p. presenti in 100 g di semi nelle condizioni naturali di umidità

e si procedette anche in questo caso all'estrazione e alla determinazione dell'acido ascorbico legato (per ogni gruppo si prepararono almeno quattro campioni, e su ogni campione furono eseguite tre determinazioni).

I valori medi così ottenuti, si riportano nella tabella I.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI E CONCLUSIONI.

I valori dell'acido ascorbico legato totale (AT_l) e nelle due forme ridotta (AH_l) e ossidata (AD_l), determinati sulle poltiglie di soli cotiledoni (a), di soli complessi radichetta-piumetta (b) e sulle mescolanze di esse nei vari rapporti 1b:1a, 2b:1a, 3b:1a, 4b:1a, già indicati, sono riferiti nella Tabella 1, ove si riportano anche i valori teorici calcolati sommando i valori di AT_l delle poltiglie di cotiledoni a quelli delle poltiglie di complessi r.p. presenti nelle miscele, nelle diverse proporzioni. (È possibile fare tale calcolo perchè i valori sono stati sempre riferiti o ai cotiledoni o ai complessi r.p. derivanti da 100 g di semi allo stato di umidità naturale).

Se non esistessero interazioni tra costituenti cotiledonari e del complesso r.p., questi valori teorici dovrebbero risultare eguali a quelli ottenuti direttamente dalle determinazioni sulle miscele. In effetti, i valori non coincidono.

Nella tabella II si riportano le differenze osservate.

Dai valori esposti nella tabella I è possibile dedurre quanto segue:

a) *per ciò che riguarda l'acido ascorbico totale legato (AT_l) qualunque sia la proporzione del complesso radichetta-piumetta posta ad incubare insieme ai cotiledoni, i valori ottenuti dalle determinazioni nelle miscele di poltiglie sono sempre inferiori a quelli calcolati per miscele con rapporti equivalenti, ed ai valori determinati sulle quantità di soli cotiledoni corrispondenti a 100 g di semi;*

b) *per ciò che riguarda la frazione di acido ascorbico legato che si trova allo stato ridotto (AH_l) si osserva un andamento simile: i valori ottenuti dalla determinazione sulle miscele, in varie proporzioni, di cotiledoni, e complessi r.p., sono sempre inferiori a quelli teorici calcolati per le stesse miscele ed a quelli presentati dai soli cotiledoni corrispondenti a 100 g di semi;*

c) *differente è invece il comportamento della frazione di acido ascorbico legato che si trova allo stato ossidato (AD_l).*

Dopo 24 h di imbibizione i valori ottenuti dalla determinazione sono ancora inferiori a quelli teorici calcolati ed a quelli dei soli cotiledoni; ma dopo 24 h e 48 h di incubazione il fenomeno si inverte, e cioè i valori calcolati sono sempre inferiori a quelli ottenuti dalle determinazioni eseguite sulle varie miscele e sui soli cotiledoni.

Le massime differenze si osservano dopo 24 h di incubazione; da questo punto di vista il comportamento, dell'acido ascorbico legato, allo stato ossidato, è diverso dal comportamento dell'acido ascorbico libero allo stato ossidato, già riferito in una nota precedente [3];

d) i valori delle differenze, riportati nella tabella II, mettono in evi-

denza che l'effetto esercitato dai complessi r.p. sull'acido ascorbico legato totale e nella forma ridotta, va aumentando con l'aumentare delle quantità di tali componenti del seme, ma non è ad essi proporzionale. L'effetto esercitato sull'acido ascorbico legato nella forma ossidata, varia molto meno col variare delle proporzioni di complessi r.p. nelle miscele.

In conclusione, si può affermare che anche per quanto riguarda la frazione di acido ascorbico legato sottoforma di complesso, esiste un'interazione

TABELLA II.

Δ tra i valori calcolati e quelli determinati ricavati dalla Tabella I.

Tempo	Forme dell'acido ascorbico legato	Miscele di cotiledoni (a) e complessi r.p. (b) nei rapporti			
		1b: 1a	2b: 1a	3b: 1a	4b: 1a
24 h imbibiz.	AT _i	+ 1,70	+ 1,95	+ 2,10	+ 2,29
24 h incubaz.		+ 1,68	+ 1,84	+ 1,86	= 2,10
48 h incubaz.		+ 2,04	+ 2,36	+ 2,80	+ 3,24
24 h imbibiz.	AH _i	+ 0,95	+ 1,07	+ 1,35	+ 1,48
24 h incubaz.		+ 2,34	+ 2,62	+ 2,74	+ 2,79
48 h incubaz.		+ 2,30	+ 2,64	+ 2,93	+ 3,27
24 h imbibiz.	AD _i	+ 0,75	+ 0,89	+ 0,75	+ 0,81
24 h incubaz.		— 0,63	— 0,78	— 0,89	— 0,70
48 h incubaz.		— 0,25	— 0,28	— 0,13	— 0,03

zione fra i costituenti cotiledonari ed i costituenti del complesso radichetta-piumetta.

Tale interazione aumenta con l'aumentare della proporzione di questa parte del seme, ma si manifesta in maniera inversa per le due forme di acido ascorbico legato.

Per ciò che riguarda la forma ridotta si osserva un valore inferiore a quello che dovrebbe aversi dalla somma dell'AH_i presente nei cotiledoni e nei complessi r.p. mescolati, mentre per la forma ossidata si ha un valore maggiore allorchè le miscele sono poste ad incubare per 24 h-48 h. Predo-

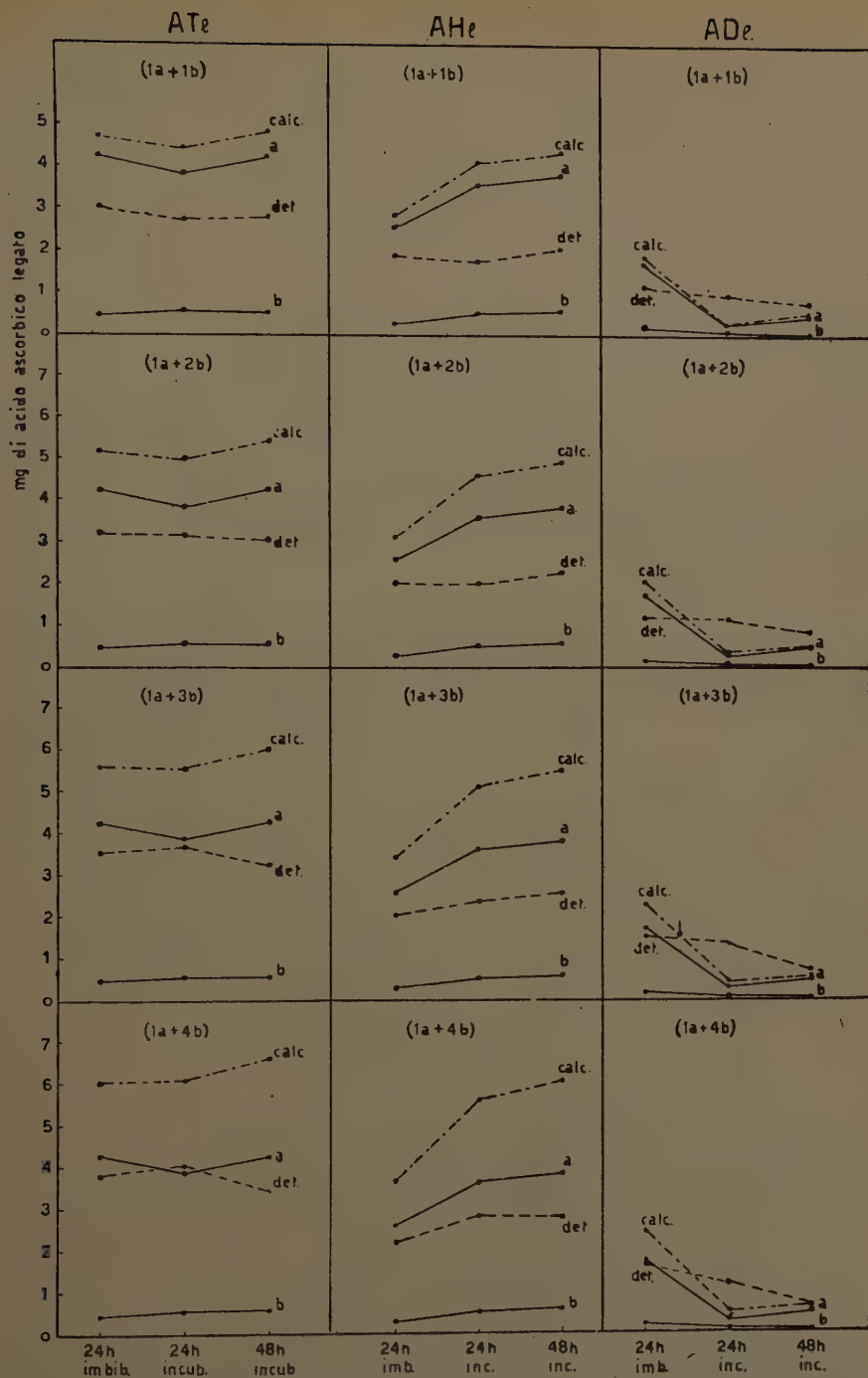


Fig. 1. — Valori dell'acido ascorbico legato, nei cotiledoni *a*, negli embrioni *b*, provenienti da 100 g di semi nelle condizioni naturali di umidità, e nelle mescolanze di essi a varie proporzioni (*det.* = Valori determinati; *calc.* = valori calcolati).

mina comunque il primo fenomeno per cui l'acido ascorbico totale, determinato nelle miscele, è sempre inferiore a quello teorico ed a quello derivante dalle sole quantità di cotiledoni presenti.

Sono in corso esperienze che tendono a definire i costituenti del complesso r.p. che intervengono in tale fenomeno, ed a stabilire il loro meccanismo di azione.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BADOLATO F. e BUCCI I. La Ric. Scient., **30**, 97 (1960).
- [2] BADOLATO F. e BUCCI I. La Ric. Scient., **30**, 207 (1960).
- [3] ORRÙ A., BADOLATO F. e DE LEO T. Rend. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, s. 4, a. 25 (1958).

RIASSUNTO. — Si conferma l'esistenza di un'interazione tra costituenti cotiledonari ed embrionali dei semi di *Phaseolus vulgaris*, che è messa in evidenza dai valori dell'acido ascorbico legato sottoforma di complesso. Tale interazione, che aumenta con l'aumentare dei costituenti embrionali, si manifesta in maniera inversa per l'acido ascorbico legato nelle forme ridotta e ossidata.

SUMMARY. — An interaction between cotyledon and embryo constituents of the seeds of *Phaseolus vulgaris* has been confirmed. Such an interaction, emphasized by the values of ascorbic acid bound in a complex form, increases with the increasing of embryo constituents, reveals itself in a reversed manner for the reduced and oxidized forms of this bound ascorbic acid.

Alcune considerazioni sulla instabilità flessio-torsionale delle travi alte.

Nota del dott. ing. Guido Sarà, presentata dal socio corrisp. E. Giangreco

(Adunanza del dì 6 maggio 1961)

I. — GENERALITÀ.

È ben noto l'interesse sempre crescente che vanno assumendo i problemi di instabilità dell'equilibrio elastico a mano a mano che la tecnica costruttiva progredisce e si affina realizzando strutture sempre più ardite.

Come nel campo delle strutture a traliccio è fondamentale lo studio della instabilità per carico di punta, così i problemi costruttivi connessi alla esecuzione di travi alte, in acciaio o in conglomerato cementizio armato o precompresso, dipendono essenzialmente dalla sicurezza che tali strutture presentano ai fenomeni di instabilità flessio-torsionale.

Numerosi Autori si sono già occupati dell'argomento, sia in campo elastico che in campo elasto-plastico, utilizzando metodi diversi e, pur con lo stesso metodo, procedimenti diversi.

È sembrato perciò opportuno, data l'importanza teorica e pratica del problema, apportare alcune precisazioni sulla convenienza del procedimento da seguire e sulla rispondenza dei risultati all'analisi qualitativa e quantitativa del fenomeno.

Lo studio è svolto utilizzando il metodo energetico in conformità del teorema di Dirichlet e quindi fissando la condizione dell'equilibrio indifferente in una delle forme:

$$(1) \quad \delta_2 E_0 = 0$$

$$(2) \quad \delta_1 (\delta_2 E_0) = 0$$

in cui sono:

E_0 : l'energia potenziale della struttura nella configurazione « principale » assunta in seguito all'azione dei carichi applicati;

$\delta_2 E_0$: la variazione seconda dell'energia potenziale totale al passaggio dalla configurazione principale a quella « secondaria » assunta arbitrariamente¹⁾ col solo rispetto delle condizioni ai vincoli;

¹⁾ Il carico critico è tuttavia determinato con una approssimazione tanto maggiore quanto più la configurazione secondaria si avvicina ad una reale configurazione deformata determinatasi in seguito a fenomeni di instabilità.

$\delta_1 (\partial_2 E_0)$: la variazione prima della grandezza $\partial_2 E_0$ per ogni possibile variazione dello stesso ordine della configurazione secondaria e cioè delle componenti dello spostamento u , v e w .

La $\partial_2 E_0$ che compare nelle (1) e (2) si può esplicitare scrivendo:

$$(3) \quad \partial_2 E_0 = \Phi + \lambda L_2 - \lambda L'_2$$

in cui sono:

Φ : l'energia potenziale elastica acquisita dalla struttura nel passaggio della configurazione principale a quella secondaria;

L_2 : il lavoro compiuto dalle tensioni associate ad una distribuzione unitaria dei carichi realmente agenti per effetto delle componenti di deformazione del secondo ordine;

L'_2 : il lavoro compiuto dalla distribuzione dei carichi realmente agenti per effetto delle componenti dello spostamento del secondo ordine;

λ : un moltiplicatore della distribuzione di carichi considerata.

La (3) soddisfa le (1) e (2) quando λ assume il particolare valore $\lambda = \lambda_{\text{critico}}$.

Si prende in esame una trave alta appoggiata alle estremità e con le sezioni terminali impedito di ruotare nel loro piano (fig. 1).

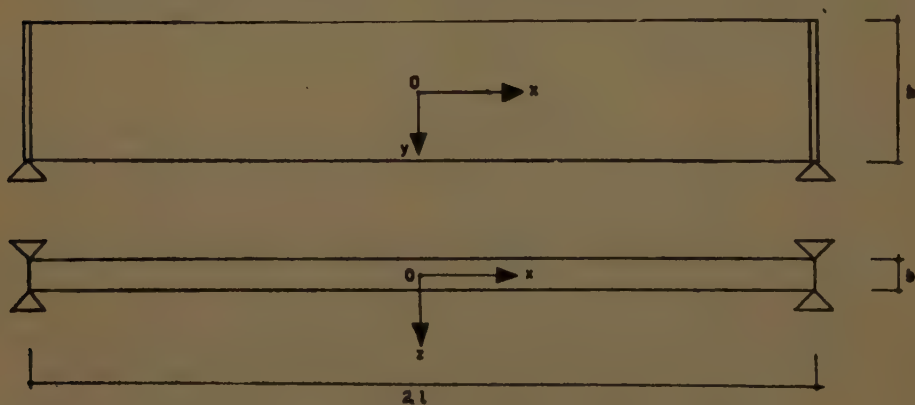


Fig. 1.

Ci si riferisce inoltre a condizioni simmetriche di carico sia assiale che trasversale.

La terna u, v, w delle componenti dello spostamento, che porta la struttura dalla configurazione principale a quella secondaria, va scelta, dato il tipo di instabilità in esame, in modo da realizzare una deformazione flessio-torsionale, nel rispetto delle condizioni ai vincoli.

Convienne, per semplificare i calcoli, scegliere terne per le quali si verifichi:

$$(4) \quad L_2 \neq 0; \quad L'_2 = 0$$

oppure:

$$(5) \quad L_2 = 0; \quad L'_2 \neq 0.$$

L'espressione di $\delta_2 E_0$ nei due casi risulta allora così semplificata:

$$(6) \quad \delta_2 E_0 = \Phi + \lambda L_2$$

$$(7) \quad \delta_2 E_0 = \Phi - \lambda L'_2.$$

Le (4) sono verificate dalla terna ²⁾:

$$(8) \quad u = 0; \quad v = 0; \quad w = \bar{w}_0 + \bar{\beta}_0 y$$

Le (5), per trave caricata assialmente, dalla terna:

$$(9) \quad u \neq 0; \quad v = 0; \quad w = \bar{w}_0 + \bar{\beta}_0 y$$

per trave caricata trasversalmente, dalla terna:

$$(10) \quad u = 0; \quad v \neq 0; \quad w = \bar{w}_0 + \bar{\beta}_0 y$$

con u e v nelle (9) e (10) da scegliersi opportunamente, come si vedrà al paragrafo II, ed infinitesimi del secondo ordine.

Nelle (8), (9) e (10) sono:

$$(11) \quad \bar{w}_0 = w_0 \cos \frac{\pi x}{2l}; \quad \bar{\beta}_0 = \beta_0 \cos \frac{\pi x}{2l}$$

con w_0 e β_0 costanti arbitrarie, quantità infinitesime del primo ordine, ed l semilunghezza della trave.

Le terne suddette soddisfano, come si può facilmente verificare, le condizioni ai vincoli già accennate.

²⁾ Le condizioni $u = 0$ e $v = 0$ fanno sì che le forze assiali secondo x e trasversali secondo y non compiano lavoro.

Si determina ora l'espressione delle grandezze che compaiono nella (3).

L'energia potenziale elastica si può calcolare come somma dell'energia potenziale elastica flessionale e di quella torsionale.

Si scrive:

$$(12) \quad \Phi = \Phi_f + \Phi_t = \frac{1}{2} \int_{\varphi(-l)}^{\varphi(+l)} M_\mu(x) d\varphi - \frac{1}{2} \int_{\vartheta(-l)}^{\vartheta(+l)} M_x(x) d\vartheta$$

dove sono:

$M_y(x) = EI \frac{d^2 \bar{w}_0}{dx^2}$: momento flettente interno attorno all'asse y ;

$M_x(x) = \frac{GI_p}{q} \frac{d \bar{\beta}_0}{dx}$: momento torcente interno;

$d\varphi = d \left(\frac{d \bar{w}_0}{dx} \right) = \frac{d^2 \bar{w}_0}{dx^2} dx$: rotazione flessionale intorno all'asse y ;

$d\vartheta = d \bar{\beta}_0 = \frac{d \bar{\beta}_0}{dx} dx$: rotazione torsionale.

Dalla (12) si perviene attraverso semplici passaggi matematici alla espressione:

$$(13) \quad \Phi = \frac{B\pi^4}{32 l^3} w_0^2 + \frac{C\pi^2}{8 l} \beta_0^2$$

in cui sono:

$B = EI$: rigidità flessionale;

$C = \frac{GI_p}{q}$: rigidità torsionale.

Quanto alle espressioni del lavoro compiuto dalle forze interne ed esterne, L_2 ed L'_2 , esse dipendono dal tipo di carico applicato.

Si può tuttavia scrivere, nel caso più generale, tenendo conto delle condizioni di carico che ci limitiamo a considerare per cui tra le componenti della sollecitazione sussistono solo la σ_x e la τ_{xy} :

$$(14) \quad L_2 = \int_V \sigma_x \epsilon_x^{(2)} dV + \int_V \tau_{xy} \gamma_{xy}^{(2)} dV$$

$$(15) \quad L'_2 = \Sigma N u^{(2)} + \Sigma F v^{(2)} + \int_{-l}^{+l} p v^{(2)} dx.$$

I valori di $\varepsilon_x^{(2)}$ e $\gamma_{xy}^{(2)}$ da introdurre nella (14) si determinano dalle espressioni generali delle componenti di deformazione:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right];$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

attribuendo ad u , v e w il loro valore ed individuando i termini del secondo ordine.

Si ha, per la terna (8):

$$(16) \quad \varepsilon_x^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2; \quad \gamma_{xy}^{(2)} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

per la terna (9);

$$(17) \quad \varepsilon_x^{(2)} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \gamma_{xy}^{(2)} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

e per la terna (10):

$$(18) \quad \varepsilon_x^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \gamma_{xy}^{(2)} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}.$$

L'espressione di $\delta_2 E_0$ cui si perviene introducendo nella (3) i valori di Φ , L_2 ed L'_2 ricavati dalle (13), (14) e (15) risulta essere funzione dei valori assunti per w_0 e β_0 .

La (2), che conviene in genere applicare piuttosto che la (1) per semplicità di calcoli, si può allora scrivere:

$$(19) \quad \delta_1 (\delta_2 E_0) = \frac{\partial (\delta_2 E_0)}{\partial w_0} dw_0 + \frac{\partial (\delta_2 E_0)}{\partial \beta_0} d\beta_0 = 0.$$

Poichè questa equazione deve essere soddisfatta per qualunque valore di w_0 e di β_0 infinitesimo del primo ordine bisogna che sia:

$$(20) \quad \frac{\partial (\delta_2 E_0)}{\partial w_0} = 0; \quad \frac{\partial (\delta_2 E_0)}{\partial \beta_0} = 0.$$

Le (20) costituiscono un sistema di due equazioni a due incognite, omogenee lineari a causa della forma quadratica delle incognite w_0 e β_0 , nell'espressione della $\varepsilon_2 E_0$.

L'annullamento del determinante dei coefficienti delle w_0 e β_0 , che costituisce la condizione di compatibilità del sistema, fornisce un'equazione di secondo grado le cui radici danno due valori critici del moltiplicatore λ , e dei quali va scelto, per la verifica alla instabilità, il valore più piccolo.

II. — SCELTA DELLA TERNA MINIMIZZANTE.

Si è visto come la scelta della terna minimizzante non è rigidamente definita in quanto intervengono considerazioni relative alla opportunità di mantenersi fedeli alla reale deformazione di instabilità nonchè alla opportunità di rendere il calcolo sufficientemente rapido.

Si considera pertanto, per le varie condizioni di carico, l'adottabilità delle diverse terne minimizzanti, la forma più opportuna da attribuire ad esse ed il valore del carico critico a cui portano.

1. — Trave soggetta a semplice carico assiale centrato.

Ci si riferisce allo schema di fig. 2.

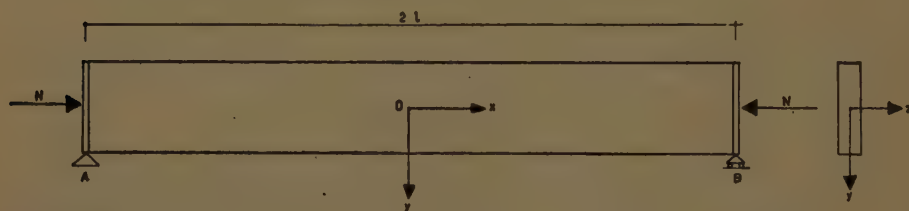


Fig. 2.

Le componenti di sollecitazione sono $\sigma_x = -\frac{N}{A}$; $\tau_{xy} = 0$, per cui tra le componenti di deformazione del secondo ordine interessa solo la $\varepsilon_x^{(2)}$.

Si deve tener conto che, nelle condizioni di carico considerate, non sussiste la instabilità torsionale avendosi di conseguenza $\bar{\beta}_0 = 0$.

Adottando la terna (8), che nel caso in esame si particolarizza in $u = 0$, $v = 0$, $w = \bar{w}_0 = w_0 \cos \frac{\pi x}{2l}$, riesce $\varepsilon_x^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2$ e si ha per i valori da introdurre nella (6), ricordando le (13), (14) e (16):

$$\Phi = \frac{B\pi^4}{32 l^3} w_0^2;$$

$$(21) \quad L_2 = \int_V - \frac{N}{A} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{w}_0}{dx} \right)^2 dV =$$

$$= - N \int_0^l \left(\frac{d\bar{w}_0}{dx} \right)^2 dx = - \frac{N \pi^2 w_0^2}{8 l}.$$

Facendo ricorso alla terna (9):

$$u \neq 0; \quad v = 0; \quad w = w_0 \cos \frac{\pi x}{2l}$$

e nell'ipotesi che l'elemento dx conservi presso-inflesso la propria lunghezza iniziale ³⁾, riesce:

$$u = - \int_0^x dx' = - \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx;$$

$$u_{AB} = - 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx = - \frac{\pi^2 w_0^2}{8 l}.$$

ambedue quantità infinitesime del secondo ordine dove il segno negativo è dovuto alla compressione e con u_{AB} si è indicato lo spostamento relativo nella direzione x del punto B rispetto al punto A (fig. 3).

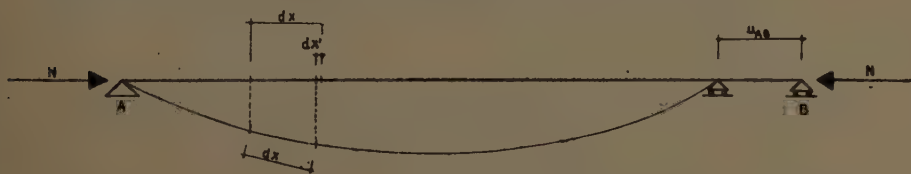


Fig. 3.

Tenendo conto che è in questo caso [cfr. la (17)]:

$$\varepsilon_x^{(2)} = \frac{du}{dx} + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 = - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 = 0$$

³⁾ In questa ipotesi riesce per dx' , differenza di lunghezza tra l'elemento dx e la sua proiezione sull'asse indeformato:

$$dx' = dx \left[1 - \cos \frac{dw}{dx} \right] \cong dx \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2$$

e quindi $L_2 = 0$, si ha allora:

$$(22) \quad \Phi = \frac{B\pi^4}{32 l^3}$$

$$L'_2 = N u_{AB} = \frac{N\pi^2 w_0^2}{8 l}.$$

Sostituendo nella (6) i valori delle (21), oppure nella (7) quelli delle (22), si ottiene la stessa espressione di $\delta_2 E_0$:

$$(23) \quad \delta_2 E_0 = \frac{B\pi^4}{32 l^3} w_0^2 - \lambda \frac{N\pi^2 w_0^2}{8 l}$$

ed, in definitiva, attraverso l'applicazione della (2):

$$(24) \quad N_{crit} = \frac{B\pi^2}{4 l^2}$$

ritrovandosi la nota equazione di Eulero.

L'identità dei valori trovati per la $\delta_2 E_0$ deriva dall'eguaglianza tra il lavoro $L_2 = \int_V \sigma_x \varepsilon_x^{(2)} dV$ della terna (8) ed il lavoro $L'_2 = N u_{AB}$ della terna (9).

Tale eguaglianza sussiste, richiamandosi al principio dei lavori virtuali, se $\varepsilon_x^{(2)}$ si può interpretare come componente della deformazione del primo ordine ⁴⁾ $\bar{\varepsilon}_x^{(1)}$ della componente dello spostamento u infinitesimo del secondo ordine. Cioè se è:

$$(25) \quad \varepsilon_x^{(2)} + \bar{\varepsilon}_x^{(1)} = 0.$$

In riferimento alla terna (8) si ha:

$$\varepsilon_x^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2;$$

per la terna (9):

$$u = -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx; \quad \bar{\varepsilon}_x^{(1)} = \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2$$

⁴⁾ Il principio dei lavori virtuali, come è noto, è applicabile solo facendo riferimento alle componenti di deformazione del primo ordine.

riuscendo così immediatamente soddisfatta la (25).

2. — Trave soggetta a semplice carico trasversale.

Le componenti di sollecitazione risultano:

$$(26) \quad \sigma_x = \frac{M}{I} y; \quad \tau_{xy} = \frac{Q}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Si esegue lo studio successivamente con la terna (8) e con la terna (10).

a) Scelta della terna (8).

Circa l'espressione del lavoro delle forze interne si può scrivere ricordando la (14), le (16) e le (26):

$$\begin{aligned} L_2 &= \int_V \sigma_x \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dV + \int_V \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dV = \\ &= \int_V \frac{My}{I} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{w}_0}{dx} + y \frac{d\bar{\beta}_0}{dx} \right)^2 dV + \\ &+ \int_V \frac{Q}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \bar{\beta}_0 \left(\frac{d\bar{w}_0}{dx} + y \frac{d\bar{\beta}_0}{dx} \right) dV = \\ &= 2 \int_0^l M \frac{d\bar{w}_0}{dx} \frac{d\bar{\beta}_0}{dx} dx + 2 \int_0^l Q \bar{\beta}_0 \frac{d\bar{w}_0}{dx} dx = \\ &= 2 \int_0^l \frac{d\bar{w}_0}{dx} \frac{d}{dx} (M\bar{\beta}_0) dx = 2 \left| M\bar{\beta}_0 \frac{d\bar{w}_0}{dx} \right|_0^l - 2 \int_0^l M\bar{\beta}_0 \frac{d^2\bar{w}_0}{dx^2} dx \end{aligned}$$

ed, in definitiva, annullandosi il termine finito, si ha:

$$(27) \quad L_2 = - 2 \int_0^l M\bar{\beta}_0 \frac{d^2\bar{w}_0}{dx^2} dx.$$

In effetti a causa della rotazione $\bar{\beta}_0$ esiste anche una componente dello

spostamento del secondo ordine nella direzione y dei punti non giacenti sull'asse della trave:

$$(28) \quad v^{(2)} = - \frac{\bar{\beta}_0^2 y}{2}$$

la quale dà luogo a un termine $\frac{\partial v}{\partial x}$ del secondo ordine da introdurre nella espressione di $\gamma_{xy}^{(2)}$ ed ancora ad una componente dello spostamento $v_f^{(2)}$ in corrispondenza dei carichi applicati.

Mentre L_2 non subisce alcun incremento risultando:

$$\begin{aligned} \Delta L_2 &= \int_V \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} dV = \int_V \frac{Q}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} dV = \\ &= - \int_V \frac{Q}{2I} \frac{h^2}{4} \bar{\beta}_0 \frac{d\bar{\beta}_0}{dx} y dV + \int_V \frac{Q}{2I} y^2 \bar{\beta}_0 \frac{d\bar{\beta}_0}{dx} y dV = 0 \end{aligned}$$

il lavoro L'_2 dovuto alla v_f risulta invece nullo soltanto nel caso di carichi applicati sulla generatrice mediana della trave (asse x), mentre è diverso da zero per carichi applicati sulla generatrice superiore o inferiore.

La scelta della terna (8), con $v = 0$, corrisponde quindi a considerare i carichi applicati lungo la generatrice mediana.

Si determina ora il valore del carico critico per alcune particolari condizioni di carico.

$\alpha)$ Carico concentrato in mezzeria.

Si considerano tre casi: carico applicato superiormente (con ordinata $y = -\frac{h}{2}$), sulla mediana ($y = 0$), inferiormente ($y = +\frac{h}{2}$), e lo si indica rispettivamente con F_s , F_m ed F_i .

Nella condizione di carico in esame, essendo $M = \frac{F}{2}(l-x)$, la (27) si scrive:

$$(29) \quad L_2 = F w_0 \beta_0 \frac{\pi^2 + 4}{16}.$$

Essendo ancora $L'_2 = F \cdot v_F$, con $v_F = -\frac{\beta_0^2 y}{2}$, e tenendo conto

delle (13) e (29), la (3) si scrive nei tre casi:

$$\begin{aligned} \delta_2 E_0 &= \frac{B\pi^4}{32 l^3} w_0^2 + \frac{C\pi^2}{8 l} \beta_0^2 + \lambda \left(F_s w_0 \beta_0 \frac{\pi^2 + 4}{16} - \frac{F_s \beta_0^2 h}{4} \right) \\ (30) \quad \delta_2 E_0 &= \frac{B\pi^4}{32 l^3} w_0^2 + \frac{C\pi^2}{8 l} \beta_0^2 + \lambda F_m w_0 \beta_0 \frac{\pi^2 + 4}{16} \\ \delta_2 E_0 &= \frac{B\pi^4}{32 l^3} w_0^2 + \frac{C\pi^2}{8 l} \beta_0^2 + \lambda \left(F_i w_0 \beta_0 \frac{\pi^2 + 4}{16} + \frac{F_i \beta_0^2 h}{4} \right) \end{aligned}$$

dalle quali, prendendo in considerazione le sole radici positive, si perviene rispettivamente ai seguenti valori dei carichi critici:

$$\begin{aligned} (31) \quad F_{s\ cr} &= \frac{-R + \sqrt{R^2 + S}}{T} \\ F_{m\ cr} &= \frac{\sqrt{S}}{T} \\ F_{i\ cr} &= \frac{R + \sqrt{R^2 + S}}{T} \end{aligned}$$

dove:

$$R = \frac{\pi^4}{32} \frac{Bh}{l^3}; \quad S = \frac{\pi^6 (\pi^2 + 4)^2}{16^3} \frac{BC}{l^4}; \quad T = \frac{2 (\pi^2 + 4)^2}{16^2}.$$

Confrontando tra loro le (31) si nota che riesce ⁵⁾:

$$(32) \quad F_{s\ cr} < F_{m\ cr} < F_{i\ cr}$$

essendo $F_{m\ cr}$ come si ricava dalla seconda delle (31):

$$(33) \quad F_{m\ cr} = \frac{2 \pi^3}{\pi^2 + 4} \frac{\sqrt{BC}}{l^2} = 4,468 \frac{\sqrt{BC}}{l^2}$$

⁵⁾ Si ha infatti:

$$F_{s\ cr} = \frac{-R + \sqrt{R^2 + S}}{T} < \frac{-R + (\sqrt{R^2} + \sqrt{S})}{T} = \frac{\sqrt{S}}{T} = F_{m\ cr}$$

$$F_{i\ cr} = \frac{R + \sqrt{R^2 + S}}{T} > \frac{\sqrt{S}}{T} = F_{m\ cr}$$

Dalle (31) si nota ancora che solo nel caso di carico applicato superiormente o inferiormente il carico critico è funzione dell'altezza h .

Per carico inferiore la maggiore altezza ha effetto stabilizzante; per carico superiore, notando che il termine $(-R + \sqrt{R^2 + S})$ che compare al numeratore della prima delle (31) tende a zero per R , e quindi per h , tendente all'infinito, si deduce che l'effetto è instabilizzante.

β) Carico uniformemente ripartito.

Si suppone che il carico p sia applicato lungo la generatrice mediana.

Nella condizione di carico in esame, essendo $M = \frac{Pl}{2} (l^2 - x^2)$, la (27) si scrive:

$$(34) \quad L_2 = pw_0 \beta_0 l \frac{\pi^2 + 3}{12}.$$

La (13) e la (34) introdotte nella (6) permettono di scrivere:

$$(35) \quad \delta_2 E_0 = \frac{B\pi^4}{32 l^3} w_0^2 + \frac{C\pi^2}{8 l} \beta_0^2 + \lambda pw_0 \beta_0 l \frac{\pi^2 + 3}{12}$$

e quindi:

$$(36) \quad p_{cr} = \frac{\pi^3}{\pi^2 + 3} \frac{\sqrt{BC}}{l^3} = 3,611 \frac{\sqrt{BC}}{l^3}.$$

b) Scelta della terna (10).

Occorre anzitutto determinare il valore da attribuire alla componente dello spostamento v . Si osserva che, come la u nel caso di sforzo assiale, la v nasce come effetto secondario dello spostamento principale w .

Per facilitare i calcoli si suppone fissa la sezione di mezzeria O della trave e spostabili le due estremità A e B risultando in definitiva, agli effetti della deformazione, l'identità fra i due schemi di figura 4.

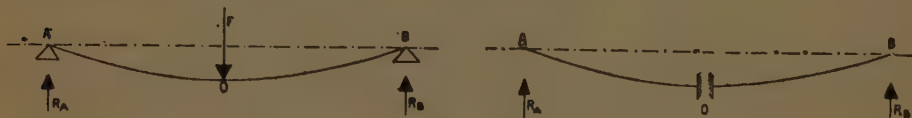


Fig. 4.

In questa ipotesi le (11) vanno corrette:

$$\bar{w}_0 = w_0 \left(\cos \frac{\pi x}{2l} - 1 \right); \quad \bar{\beta}_0 = \beta_0 \cos \frac{\pi x}{2l}.$$

L'asse della trave si sposta infatti per la instabilità flessionale nella posizione $A O' B$ e per quella torsionale nella posizione $A O'' B$ (fig. 5).

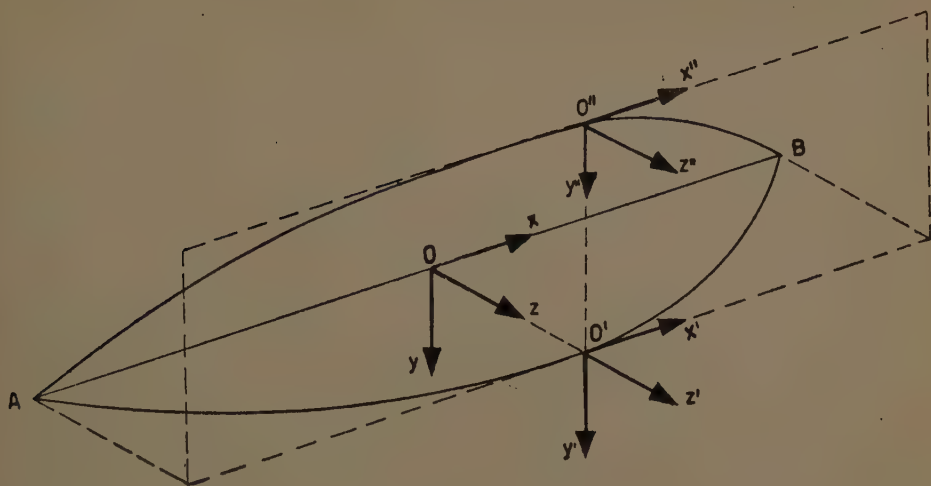


Fig. 5.

All'origine O'' ed agli assi x'' , y'' , z'' si fa riferimento nelle successive considerazioni.

Indicando con S' (fig. 6) la generica sezione di ascissa x' e con dx' il tronco elementare successivo, si ha che a causa dello spostamento \bar{w}_0 le due facce di ascissa x' ed $x' + dx'$ ruotano tra loro intorno all'asse η dell'angolo $d\chi = d \left(\frac{d\bar{w}_0}{dx'} \right) = \frac{d^2 \bar{w}_0}{dx'^2} dx'$.

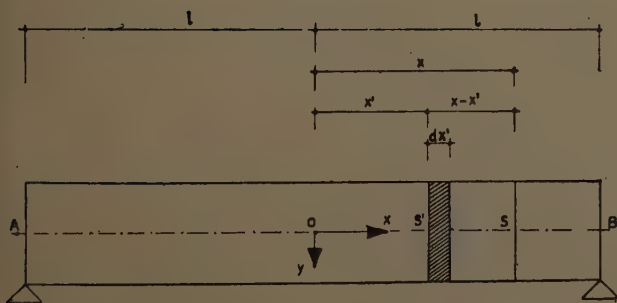
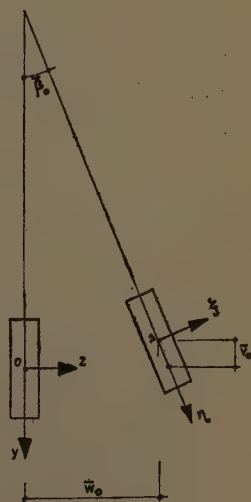


Fig. 6.



A causa di questa rotazione il punto S di ascissa x si sposta nella direzione ζ della quantità $d\zeta = d\chi (x - x')$.

La componente di questo spostamento di S rispetto ad O nella direzione y , dovuto alla elasticità del solo tronco dx' , è :

$$v = d\zeta \cdot \sin \bar{\beta}_0 \cong d\vartheta \cdot \bar{\beta}_0 = \frac{d^2 \bar{w}_0}{dx'^2} dx' (x - x') \bar{\beta}_0.$$

Considerando l'elasticità dell'intero tratto da O ad S (da $x' = 0$ ad $x' = x$) si ha:

$$(37) \quad v(x) = - \int_0^x \bar{\beta}_0 \frac{d^2 \bar{w}_0}{dx'^2} (x - x') dx'$$

nella quale il segno negativo è dovuto al risultare $v(x)$ positivo quando sono $\bar{\beta}_0$ positivo e $\frac{d^2 \bar{w}_0}{dx'^2}$ negativo.

Ad integrazione effettuata riesce, per le assegnate espressioni di \bar{w}_0 e $\bar{\beta}_0$:

$$(38) \quad v(x) = w_0 \bar{\beta}_0 \frac{\pi^2}{4 l^2} \left[\frac{x^2}{4} + \frac{l^2}{2 \pi^2} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right) \right]$$

quantità infinitesima del secondo ordine.

La componente dello spostamento v così trovata differisce da quella precedentemente considerata $v = - \frac{\bar{\beta}_0 y}{2}$ in quanto interessa anche i punti situati sull'asse delle trave e di conseguenza fa sì che riesca $L'_2 \neq 0$ anche nel caso di carico applicato sulla mediana.

Adottare la terna (8) al posto della (10) corrisponde in realtà ad imporre all'intera trave, deformata secondo la terna (10), un supplementare spostamento $-v$ del secondo ordine.

La terna in esame si scrive in definitiva:

$$(39) \quad \begin{aligned} u &= 0; & v &= w_0 \bar{\beta}_0 \frac{\pi^2}{4 l^2} \left[\frac{x^2}{4} + \frac{l^2}{2 \pi^2} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right) \right]; \\ w &= \bar{w}_0 + \bar{\beta}_0 y. \end{aligned}$$

Si può ora determinare l'espressione del lavoro delle forze interne.

Ricordando la (14) e la (18), si scrive:

$$L_2 = \int_V \sigma_x \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dV + \int_V \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dV + \int_V \tau_{xy} \frac{dv}{dx} dV$$

la quale differisce dalla corrispondente espressione scritta per la terna (8) per l'aggiunta del termine

$$\int_V \tau_{xy} \frac{dv}{dx} dV = \int_V \frac{Q}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \frac{dv}{dx} dV.$$

Ricordando che è $Q = -\frac{F}{2}$ per carico concentrato e $Q = -px$ per carico uniformemente ripartito, si è calcolato il valore del termine aggiuntivo ora indicato.

Sommando questo valore alla restante parte dell'espressione di L_2 già calcolata [cfr. le (29) e (34)], si ottiene per tutte le condizioni di carico $L_2 = 0$.

E' utile osservare che, a differenza del caso del carico assiale nel quale l'annullamento della L_2 con la terna (9) era diretta conseguenza dell'annullarsi della $\varepsilon_x^{(2)}$ e quindi della deformazione, in questo caso l'annullamento della L_2 è dovuto all'assumere lo stesso valore, al passaggio dalla terna (8) alla (10), il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni normali $\int_V \sigma_x \varepsilon_x^{(2)} dV$ e quello compiuto dalle sollecitazioni di taglio $\int_V \tau_{xy} \gamma_{xy}^{(2)} dV$ a causa dell'incremento che subisce quest'ultimo integrale per l'aggiunta di un ulteriore termine.

Si determina ora il valore del carico critico per particolari condizioni di carico.

a) Carico concentrato in mezz'era.

Il lavoro delle forze esterne risulta⁶⁾:

$$L'_2 = -2 \frac{F}{2} v_B$$

dove v_B va ricavato dalla (38) per $x = l$:

$$v_B = w_0 \beta_0 \frac{\pi^2 + 4}{16}.$$

⁶⁾ Il segno negativo deriva dall'essere la reazione $\frac{F}{2}$ diretta verso l'alto e quindi negativa.

Si ha quindi:

$$(40) \quad L'_2 = - F w_0 \beta_0 \frac{\pi^2 + 4}{16}.$$

Introdotti nella (7) i valori di Φ ed L'_2 si ritrova per $\partial_2 E_0$ la stessa espressione ottenuta con la terna (8) e di conseguenza lo stesso valore del carico critico dato dalla (33).

β) Carico uniformemente ripartito.

Il lavoro delle forze esterne risulta:

$$(41) \quad L'_2 = 2 \left[\int_0^l p v(x) dx - p l v(l) \right] = - p w_0 \beta_0 l \frac{\pi^2 + 3}{12}.$$

Scrivendo l'espressione di $\partial_2 E_0$ e del carico critico risulta anche questa volta l'eguaglianza di questi valori con quelli determinati con la terna (8).

γ) Trave soggetta contemporaneamente a carico assiale e trasversale.

Lo studio viene eseguito con la terna (8).

Tenendo conto che il caso in esame è combinazione dei casi precedentemente studiati di semplice carico assiale e semplice carico trasversale, si perviene, ricordando le formule già scritte per quelle condizioni di carico, alla seguente espressione del carico critico ⁷⁾:

$$(42) \quad F_{cr} = \frac{4,468}{l^2} \sqrt{C \cdot \left[B \pm N \left(\frac{2l}{\pi} \right)^2 \right]}$$

$$(43) \quad p_{cr} = \frac{3,611}{l^3} \sqrt{C \cdot \left[B \pm N \left(\frac{2l}{\pi} \right)^2 \right]}.$$

Confrontando queste formule con quelle scritte per semplice carico trasversale risulta evidente che l'applicazione di uno sforzo assiale di trazione o di compressione ha lo stesso effetto di un aumento o di una diminuzione della rigidità flessionale. Ciò porta ad una conseguente e corrispondente variazione del valore del carico critico, tanto più sensibile quanto maggiore è la lunghezza della trave.

⁷⁾ Il segno negativo o positivo dell'espressione in parentesi dipende dal considerare applicato uno sforzo assiale di trazione o compressione.

Ricavando dalle (42) e (43) N in funzione del carico si scrive:

$$(44) \quad N_{cr} = \frac{\pi^2}{4 l^2} \left(B - 0,0501 \frac{F^2 l^4}{C} \right)$$

$$(45) \quad N_{cr} = \frac{\pi^2}{4 l^2} \left(B - 0,0767 \frac{P^2 l^6}{C} \right).$$

Confrontando queste ultime formule con quelle scritte per semplice carico assiale, si nota che la presenza di un carico trasversale ha lo stesso effetto di una diminuzione della rigidità flessionale.

Di conseguenza si ha anche una diminuzione del valore del carico critico assiale tanto più sensibile quanto maggiore è la lunghezza della trave e quanto minore è la sua rigidità torsionale.

I risultati cui si è pervenuti appaiono chiaramente evidenti anche intuitivamente.

III. — SCELTA DI UNA TERNA DI SPOSTAMENTI DI MAGGIORE APPROSSIMAZIONE.

L'espressione dell'energia potenziale elastica si può determinare oltre che direttamente in funzione delle caratteristiche di sollecitazione, come già effettuato mediante la (12), anche in funzione delle componenti di deformazione.

Si può scrivere infatti ⁸⁾:

$$(46) \quad \begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \left(\sum_i \int_V \sigma_i^{(1)} \varepsilon_i^{(1)} dV + \sum_{ij} \int_V \tau_{ij}^{(1)} \gamma_{ij}^{(1)} dV \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_V E \varepsilon_x^{(1)2} dV + \int_V E \varepsilon_y^{(1)2} dV + \int_V E \varepsilon_z^{(1)2} dV + \right. \\ &\quad \left. + \int_V G \gamma_{xy}^{(1)2} dV + \int_V G \gamma_{yz}^{(1)2} dV + \int_V G \gamma_{zx}^{(1)2} dV \right]. \end{aligned}$$

Per questo calcolo le componenti di spostamento e di deformazione ottenute mediante le terne precedentemente prescelte non appaiono sufficientemente approssimate e vanno completate con l'aggiunta di ulteriori termini.

Attraverso quelle componenti si perviene infatti a valori di Φ molto

⁸⁾ Con $\sigma_i^{(1)}$ e $\tau_{ij}^{(1)}$ si sono indicate le generiche componenti di tensione del primo ordine generate dalla deformazione elastica impressa di generiche componenti del primo ordine $\varepsilon_i^{(1)}$ e $\gamma_{ij}^{(1)}$.

discosti da quelli determinati col già accennato procedimento e così per quanto concerne i valori del carico critico che riescono ad esempio uguali tra loro, per trave in cemento, solo nella condizione che riesca $l = 0,762 b$, cioè per trave estremamente corta.

Si è trovato:

$$\Phi = \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{G b h}{l} w_0^2 + \frac{1}{2} G b h l \beta_0^2$$

e per carico concentrato in mezzaria:

$$(47) \quad \bar{F}_{cr} = 1,812 G b h$$

pervenendo all'inaccettabile risultato di un carico critico indipendente dalla lunghezza della trave.

Ciò si spiega osservando che le terne suddette si riferiscono in effetti ad una instabilità di tipo torsio-tagliante in quanto, per la deformazione flessionale, si è preso in considerazione il solo spostamento normale al piano della trave e non la rotazione delle singole sezioni intorno all'asse y (x).

Si è proceduto ad un'analisi dettagliata delle componenti dello spostamento che vanno prese in considerazione.

Con riferimento alla fig. 7 si sono stabilite le seguenti grandezze caratteristiche della deformazione impressa:

$$(48) \quad \bar{\alpha}_0 = \alpha_0 \text{ sen } \frac{\pi x}{2l}; \quad \bar{\beta}_0 = \beta_0 \cos \frac{\pi x}{2l};$$

$$\bar{w}_0 = - \int_{-l}^x \bar{\alpha}_0 dx = \alpha_0 \frac{2l}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2l} = w_0 \cos \frac{\pi x}{2l}$$

tutte grandezze infinitesime del primo ordine e soddisfacenti le condizioni ai vincoli.

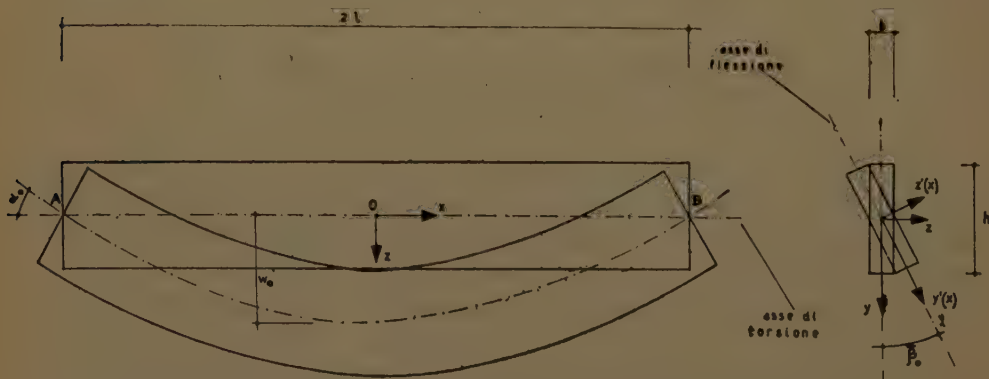


Fig. 7.

Le caratteristiche di deformazione espresse dalle (48) danno luogo a corrispondenti componenti dello spostamento che si immaginano determinarsi attraverso tre fasi successive: torsione della trave intorno all'asse x , relativo ingobbamento delle sezioni, successiva flessione intorno all'asse y' (x).

Ciascuna delle componenti dello spostamento nel punto generico della trave si può determinare come somma di tre termini, il primo funzione della sola x (e cioè relativo allo spostamento dell'asse della trave), gli altri due funzione rispettivamente delle coordinate y e z del punto considerato.

Indicando con gli indici x, y, z i tre termini su indicati e con gli indici t, i, f la deformazione torsionale, di ingobbamento, flessionale alla quale si fa riferimento, si ha:

per la torsione:

$$u_{xt} = 0; \quad v_{xt} = 0; \quad w_{xt} = 0;$$

$$u_{yt} = 0; \quad v_{yt} = -\frac{\bar{\beta}_0^2}{2} y; \quad w_{yt} = \bar{\beta}_0 y;$$

$$u_{zt} = 0; \quad v_{zt} = -\bar{\beta}_0 z; \quad w_{zt} = -\frac{\bar{\beta}_0^2}{2} z;$$

per l'ingobbamento:

$$u_i = -\frac{d\bar{\beta}_0}{dx} yz^2; \quad v_i = 0; \quad w_i = 0;$$

⁹⁾ Infatti è:

$$u_i = -q \frac{M_x}{GI_p} \psi = -q \frac{GI_p}{q} \frac{d\bar{\beta}_0}{dx} \frac{\psi}{GI_p} = -\frac{d\bar{\beta}_0}{dx} \psi.$$

Ricordando che è, per la sezione rettangolare:

$$\psi = yz - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \left(\frac{b}{2}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{sen} h(m_1 y) \operatorname{sen}(m_1 z)}{(2n-1)^3 \cos h\left(m_1 \frac{h}{2}\right)}$$

con $m_1 = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{b/2}$, e notando che in ogni addendo della sommatoria compare

$$\text{al denominatore il termine } \cos h\left(m_1 \frac{h}{2}\right) = \cos h\left(\frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{b/2} \frac{h}{2}\right)$$

che per trave alta ($h \gg b$) assume un valore elevatissimo, si può scrivere: $\psi = yz$

$$\text{e quindi } u_i = -\frac{d\bar{\beta}_0}{dx} yz.$$

per la flessione (che si suppone applicata successivamente alla torsione):

$$u_{xf} = 0; \quad v_{xf} = - \int_{-l}^x \bar{\beta}_0 d\bar{w}_0; \quad w_{xf} = \bar{w}_0;$$

$$u_{yf} = 0; \quad v_{yf} = 0; \quad w_{yf} = 0;$$

$$u_{zf} = \bar{\alpha}_0 z; \quad v_{zf} = \frac{\bar{\alpha}_0^2 z}{2} \bar{\beta}_0; \quad w_{zf} = - \frac{\bar{\alpha}_0^2 z}{2} \left(1 - \frac{\bar{\beta}_0^2}{2}\right).$$

Si hanno complessivamente i seguenti valori:

$$u = \bar{\alpha}_0 z - \frac{d\bar{\beta}_0}{dx} y z;$$

$$v = - \frac{\bar{\beta}_0^2 y}{2} - \bar{\beta}_0 z - \int_{-l}^x \bar{\beta}_0 d\bar{w}_0 + \frac{\bar{\alpha}_0^2 z}{2} \bar{\beta}_0;$$

$$w = \bar{\beta}_0 y - \frac{\bar{\beta}_0^2 z}{2} + \bar{w}_0 - \frac{\bar{\alpha}_0^2 z}{2} \left(1 - \frac{\bar{\beta}_0^2}{2}\right).$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al secondo e separando le componenti del primo ordine da quelle del secondo:

$$u = u^{(1)} = \left(\bar{\alpha}_0 z - \frac{d\bar{\beta}_0}{dx} y z \right);$$

$$(49) \quad v = v^{(1)} + v^{(2)} = - \bar{\beta}_0 z + \left(- \frac{\bar{\beta}_0^2 y}{2} - \int_{-l}^x \bar{\beta}_0 d\bar{w}_0 \right);$$

$$w = w^{(1)} + w^{(2)} = (\bar{\beta}_0 y + \bar{w}_0) + \left(- \frac{\bar{\beta}_0^2 z}{2} - \frac{\bar{\alpha}_0^2 z}{2} \right).$$

Si nota che annullando i termini contenenti la z (cioè per componenti dello spostamento indipendenti dal valore di z) si ottengono espressioni analoghe a quelle determinate con le terne del I paragrafo.

Dalle note espressioni generali delle componenti della deformazione ed

in base alle (49), una volta trascurati gli infinitesimi di ordine superiore al secondo e separate le componenti di primo e secondo ordine, si ha:

$$\epsilon_x = \epsilon_x^{(1)} + \epsilon_x^{(2)} = \frac{d\bar{\alpha}_0}{dx} z + \left[-\frac{d^2\bar{\beta}_0}{dx^2} y z + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\beta}_0}{dx} \right)^2 z^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\beta}_0}{dx} \right)^2 y^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{w}_0}{dx} \right)^2 + \frac{d\bar{\beta}_0}{dx} \frac{d\bar{w}_0}{dx} y \right];$$

$$\epsilon_y = \epsilon_y^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\beta}_0}{dx} \right)^2 z^2;$$

$$\epsilon_z = \epsilon_z^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{\beta}_0}{dx} \right)^2 y^2 - \bar{\alpha}_0 \frac{d\bar{\beta}_0}{dx} y;$$

(50)

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^{(1)} + \gamma_{xy}^{(2)} = -2 \frac{d\bar{\beta}_0}{dx} z + \left(-\frac{d\bar{\beta}_0^2}{dx} \frac{y}{2} - \frac{d}{dx} \int_{-i}^z \bar{\beta}_0 d\bar{w}_0 + \right. \\ \left. + \bar{\beta}_0 \frac{d\bar{\beta}_0}{dx} y + \bar{\beta}_0 \frac{d\bar{w}_0}{dx} + \frac{d\bar{\alpha}_0}{dx} \frac{d\bar{\beta}_0}{dx} z^2 - \frac{d^2\bar{\beta}_0}{dx^2} \frac{d\bar{\beta}_0}{dx} y z^2 \right);$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{yz}^{(2)} = -\bar{\alpha}_0 \frac{d\bar{\beta}_0}{dx} z + \left(\frac{d\bar{\beta}_0}{dx} \right)^2 y z;$$

$$\gamma_{zx} = \gamma_{zx}^{(1)} + \gamma_{zx}^{(2)} = \left(\bar{\alpha}_0 + \frac{d\bar{w}_0}{dx} \right) + \left(-\frac{d\bar{\beta}_0^2}{dx} \frac{z}{2} - \frac{d\bar{\alpha}_0^2}{dx} \frac{z}{2} + \right. \\ \left. + \bar{\beta}_0 \frac{d\bar{\beta}_0}{dx} z - \frac{d\bar{\alpha}_0}{dx} \frac{d\bar{\beta}_0}{dx} y z - \frac{d\bar{\alpha}_0}{dx} \frac{d\bar{w}_0}{dx} z + \right. \\ \left. + \frac{d^2\bar{\beta}_0}{dx^2} \frac{d\bar{\beta}_0}{dx} y^2 z + \frac{d^2\bar{\beta}_0}{dx^2} \frac{d\bar{w}_0}{dx} y z \right).$$

1. — Espressione dell'energia potenziale elastica.

Sostituendo nella (46) i valori di $\epsilon_i^{(1)}$ e $\gamma_{ij}^{(1)}$ dati dalle (50) si ottiene:

$$\Phi = \frac{E}{2} \alpha_0^2 \frac{\pi^2}{4 l^2} \int_V z^2 \cos^2 \frac{\pi x}{2 l} dV +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{G}{2} \left[4 \beta_0^2 \frac{\pi^2}{4 l^2} \int_V z^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{2 l} dV + \alpha_0^2 \int_V \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{2 l} dV + \right. \\
 & \left. + \alpha_0^2 \int_V \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{2 l} dV - 2 \alpha_0^2 \int_V \operatorname{sen}^2 \frac{\pi x}{2 l} dV \right] = \\
 & = E \frac{\pi^2}{8 l^2} \alpha_0^2 \frac{h b^3}{12} l + G \frac{\pi^2}{2 l^2} \beta_0^2 l h.
 \end{aligned}$$

Ricordando le espressioni della rigidità flessionale e torsionale si ha in definitiva:

$$(51) \quad \Phi = B \frac{\pi^2}{8 l} \alpha_0^2 + C \frac{\pi^2}{8 l} \beta_0^2$$

espressione che coincide con quella data dalla (13) e ricavata mediante il procedimento globale, essendo sufficiente sostituire nella (51) il valore di

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2 l} w_0 \text{ per ritrovarla.}$$

2. — *Espressioni del lavoro delle forze interne ed esterne.*

In base ai valori di $v^{(2)}$, $\varepsilon_x^{(2)}$, $\gamma_{xy}^{(2)}$ dati dalle (49''), (50') e (50'v) si è proceduto alla determinazione dei valori di L_2 ed L'_2 nelle condizioni di carico concentrato in mezzzeria e ripartito, supponendolo in ambedue i casi applicato in corrispondenza della generatrice mediana.

Si è trovato:

carico concentrato:

$$\begin{aligned}
 (52) \quad L_2 &= F w_0 \beta_0 \left(\frac{\pi^2 - 4}{16} + \frac{\pi^2}{96} \frac{b^2}{l^2} \right) \\
 L'_2 &= - F w_0 \beta_0 \cdot \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

carico ripartito:

$$\begin{aligned}
 (53) \quad L_2 &= p w_0 \beta_0 l \left(\frac{\pi^2 - 3}{12} + \frac{\pi^2}{96} \frac{b^2}{l^2} \right) \\
 L'_2 &= - p w_0 \beta_0 l \cdot \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

3. — Valore del carico critico.

La variazione seconda dell'energia si scrive nei due casi, ricordando la (3):

$$(54) \quad \delta_2 E_0 = \frac{B\pi^4}{32 l^3} w_0^2 + \frac{C\pi^2}{8 l} \beta_0^2 + \lambda F w_0 \beta_0 \left(\frac{\pi^2 + 4}{16} + \frac{\pi^2}{96} \frac{b^2}{l^2} \right)$$

$$(55) \quad \delta_2 E_0 = \frac{B\pi^4}{32 l^3} w_0^2 + \frac{C\pi^2}{8 l} \beta_0^2 + \lambda p w_0 \beta_0 l \left(\frac{\pi^2 + 3}{12} + \frac{\pi^2}{96} \frac{b^2}{l^2} \right)$$

Queste espressioni differiscono da quelle (30'') e (35) scritte con le terne del primo paragrafo per l'aggiunta in parentesi del termine $\frac{\pi^2}{96} \frac{b^2}{l^2}$.

Tenendo conto del termine correttivo suddetto si perviene alle seguenti espressioni del carico critico:

$$(56) \quad F_{cr} = \frac{2\pi^3}{(\pi^2 + 4) + \frac{\pi^2}{6} \frac{b^2}{l^2}} \frac{\sqrt{BC}}{l^2}$$

$$(57) \quad p_{cr} = \frac{3}{2} \frac{\pi^3}{(\pi^2 + 3) + \frac{\pi^2}{8} \frac{b^2}{l^2}} \frac{\sqrt{BC}}{l^2}$$

I valori del carico critico risultano, come si vede immediatamente da un confronto con le (33) e (36), minori di quelli determinati con le terne di tipo torsio-tagliante del primo paragrafo.

Per $b \gg l$ si nota facilmente che, risultando il rapporto b^2/l^2 molto piccolo, si hanno praticamente valori coincidenti.

IV. — ESEMPI NUMERICI.

Si riportano tre esempi numerici relativi a quanto detto precedentemente, supponendo sempre la trave sottoposta a carico concentrato in mezzzeria.

1. — *Valore di F_{cr} in funzione del punto di applicazione del carico* (cfr. paragrafo II. 2).

Si è presa in considerazione la trave in ferro avente le seguenti caratteristiche geometriche:

$$2l = 20 \text{ m}; \quad h = 0,50 \text{ m}; \quad b = 0,05 \text{ m};$$

e le caratteristiche elastiche:

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2; \quad G = 77 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2.$$

Si sono determinati di conseguenza i termini R, S e T che compaiono nelle (28), attraverso il calcolo delle grandezze:

$$I_y = 521 \text{ cm}^4; \quad \frac{I_p}{q} = 2083 \text{ cm}^4; \quad B = 1042 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$$

$$C = 160.391 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2.$$

Riesce in definitiva:

$$F_{s,cr} = 5474 \text{ Kg}; \quad F_{m,cr} = 5779 \text{ kg}; \quad F_{i,cr} = 5885 \text{ kg}.$$

La verifica statica, per trave appoggiata e per $\sigma = 1800 \text{ kg/cm}^2$ porta al valore ammissibile del carico: $F_{amm} = 7498 \text{ kg}$, maggiore di quello determinato con la verifica alla stabilità.

2. — *Valore di F_{cr} in funzione del diverso valore assunto da Φ , con le terne torsio-taglienti, seguendo il procedimento diretto e quello indiretto* (cfr. paragrafo III).

Ci si riferisce ad una trave in ferro avente le stesse caratteristiche geometriche ed elastiche di quella considerata nel precedente esempio.

Si sono presi in considerazione valori di $2l$ variabili.

Circa \bar{F}_{cr} riesce sempre:

$$\bar{F}_{cr} = 1,812 \text{ Gbh} = 348.810.000 \text{ kg}.$$

Circa F_{cr} si hanno i seguenti valori in funzione delle lunghezze $2l$:

$2l = 20 \text{ m}$	$F_{cr} = 4,468 \frac{\sqrt{BC}}{l^2} = 5776 \text{ kg}$
$2l = 10 \text{ m}$	$F_{cr} = 23055 \text{ kg}$
$2l = 2 \text{ m}$	$F_{cr} = 576.372 \text{ kg}$
$2l = 0,50 \text{ m}$	$F_{cr} = 9.221.950 \text{ kg}$
$2l = 0,076 \text{ m}$	$F_{cr} = 399.149.000 \text{ kg}$

Risulta confermato come solo per lunghezze minime si ha l'eguaglianza fra i due valori del carico critico.

3. — *Valore di F_{cr} determinato con la terna di nuova assunzione in funzione del rapporto b/l (cfr. paragrafo III. 3).*

Ci si riferisce ad una trave in ferro avente le caratteristiche geometriche ed elastiche dell'esempio 1.) e lunghezza variabile.

L'applicazione della (56) porta a valori del carico critico lievemente minori di quelli trovati con la (33).

Precisamente per rapporti b/l variabili da 0,005 a 0,050 si sono trovati gli scarti qui di seguito indicati:

$2l = 20 \text{ m}$	
$\frac{b}{l} = 0,0050$	$\Delta F_{cr} = 0,00035 F_{cr};$
$2l = 15 \text{ m}$	
$\frac{b}{l} = 0,0073$	$\Delta F_{cr} = 0,00097 F_{cr};$
$2l = 10 \text{ m}$	
$\frac{b}{l} = 0,0100$	$\Delta F_{cr} = 0,00130 F_{cr};$
$2l = 5 \text{ m}$	
$\frac{b}{l} = 0,0200$	$\Delta F_{cr} = 0,00476 F_{cr};$
$2l = 2 \text{ m}$	
$\frac{b}{l} = 0,0500$	$\Delta F_{cr} = 0,02944 F_{cr};$

I risultati numerici segnalano la minima entità dello scarto percentuale tra i valori di F_{cr} corrispondenti rispettivamente alle terne assunte al primo paragrafo ed alla terna di maggiore approssimazione assunta al paragrafo III.

RIASSUNTO. — Si espongono alcune considerazioni relative alla scelta della terna minimizzante nella risoluzione del problema dell'instabilità flessio-torsionale per travi alte in conformità del metodo energetico.

Si confrontano le diverse determinazioni del carico critico ottenuto mediante terne diverse delle quali si considera la capacità a rappresentare la realtà fisica del fenomeno.

Seguono alcune considerazioni sull'espressione da attribuire all'energia potenziale

elastica per la più esatta determinazione del valore del carico critico e sulla opportunità di assumere una terna di maggiore approssimazione.

Sono infine riportati alcuni esempi numerici.

SUMMARY. — Some considerations are exposed concerning the assumption of arbitrary displacement in the solution of flexional and torsional instability problem in high beams in according with the energy method.

The different determinations of the critical load obtained by different displacement expressions are compared in order to value the best approximation to the physical reality of the phenomenon.

Some considerations, follow, on the expression to be given to the elastic potential energy for a more exact determination of the value of critical loads.

At last some numerical examples are reported.

Vulcano Vesbico e Monte Vulture : analogie nella loro evoluzione magmatica.

Nota del socio straniero Conrad Burri

(Adunanza del dì 3 giugno 1961)

Il Vulcano Vesbico ¹⁾ viene spesso considerato e citato come un esempio tipico di vulcano. Sebbene pienamente giustificato dal lato morfologico, ciò non vale per la natura chimico-petrografica dei suoi prodotti che gli attribuisce una posizione d'eccezione tra i vulcani. Sembra strano che questa particolarità del complesso vulcanico Vesbico, sempre così assiduamente visitato e esaminato da numerosi studiosi, sia stata riconosciuta assai tardi. Ancora nel 1906, il ben noto petrografo americano H. S. WASHINGTON (1906, 165), uno dei migliori conoscitori dei vulcani della penisola italiana, era così convinto dell'uniformità delle lave vesbiche che non si occupò dei dettagli. Già nel 1907 il LACROIX, da quell'acuto osservatore che fu, riconobbe per la prima volta l'esistenza di differenze tipiche nella costituzione chimico-petrografica del Somma e del Vesuvio: un problema che fu ripreso dallo stesso autore nel 1917. Ma l'esistenza di un'eventuale evoluzione magmatica del Vulcano Vesbico nel corso del tempo, che avrebbe anche spiegato le note differenze tra Somma e Vesuvio, non fu riconosciuta dall'autore. Fu il RITTMANN (1932, 1933) a scoprire che tale evoluzione magmatica fu veramente attiva nel Vulcano Vesbico: riuscì inoltre a dimostrare che non solo la composizione chimica delle principali lave mutò secondo leggi ben definite nel corso del tempo, ma riconobbe anche l'esistenza di una sequenza di cicli di differenziazione. Questa è caratterizzata da una desilicizzazione progressiva nel corso dell'attività del vulcano, che trova la sua espressione nell'arricchimento di leucite nelle lave principali. La causa della desilicizzazione constatata vien cercata nella sintexi delle rocce calcareo-dolomitiche triassiche che formano il tetto del focolare magmatico e perciò in stretto contatto con il magma stesso. La struttura geologica semplice del Vulcano Vesbico, nutrito da un unico focolare magmatico, che durante tutta la sua storia non ha mai cambiato il suo condotto e non ha sviluppato, salvo eccezioni trascurabili, crateri

¹⁾ Per il Vulcano chiamato generalmente « Vesuvio » si preferisce la denominazione di « Vulcano Vesbico » (dal latino *Mons Vesbius*), come fu proposto dal WASHINGTON: vi si comprende l'intero edificio vulcanico, il recinto del Somma e il cono vesuviano, mentre « Vesuvio » dovrebbe essere riservato a quest'ultimo. « Vulcano Vesbico » è dunque equivalente a « Somma-Vesuvio » di RITTMANN.

ci sembra possibile affrontare l'interpretazione delle particolarità di questo vulcano finora poco noto.

Il Vulture è di età quaternaria. I prodotti delle sue prime eruzioni furono fonolitici e tefritici, prevalentemente in forma di tufi; seguirono materiali più basici, lave e tufi tefritici e basanitici, che formano la massa preponderante del vulcano. Delle due bocche eccentriche, quella di Melfi è la più nota. La sua roccia, un haüynofiro, è stata descritta già parecchie volte. Al Vulture si trova una ricca gamma di rocce: fonoliti haüyniche, tra cui tipi con anortoclasio, plagioclasio e anche leucite; tefriti haüyniche, pure con leucite; basaniti haüyniche con leucite, leucititi; leucititi melilitiche; nefeliniti e haüynofiri già menzionati, cioè rocce tutte sottosature e per lo più di bassa silicizzazione. In forma di blocchi inclusi nei tufi occorrono inoltre pirosseniti e pirosseniti amfiboliche, ambedue con biotite, apatite, magnetite, ilmenite, olivina e anche perovskite. Certè rocce, ricche di haüyna, ricordano le cosiddette riedeniti di Rieden della regione del Lago di Laach in Renania, le quali contengono tuttavia noseana al posto dell'haüyna: furono perciò chiamate riedeniti haüyniche o riedenti haüyniche granatifere dal RITTMANN. Le rocce del Vulture (AMENDOLAGINE 1957, DI LECCE MININNI 1956, NARICI 1932, RITTMANN 1931, WASHINGTON 1917; v. tabella delle analisi), sono per lo più ricchissime di calcio. Questo fatto, in combinazione con l'occorrenza di tipi ijolitici e melteigitici di bassissima silicizzazione e con le sorprendenti analogie con certe rocce della regione del Lago di Laach, suggeriscono l'idea dell'esistenza di processi di desilicizzazione dovuti a una sintexi di rocce carbonatiche anche per il caso del Vulture.

Dal confronto delle due costanti introdotte dal RITTMANN, grado di silicizzazione Si° e grado d'acidità Az° , definite nel modo seguente

$$Si^{\circ} = \frac{\text{equivalenti } SiO_2 \text{ presenti}}{\text{equivalenti } SiO_2 \text{ necessari per la silicizzazione massima}}$$

$$Az^{\circ} = \frac{\text{equivalenti } SiO_2 \text{ presenti}}{\text{somma di tutti gli equivalenti degli ossidi presenti}}$$

risulta l'esistenza di tre serie di rocce che si distinguono per il loro grado di silicizzazione (Fig. 2):

- I. $0.69 \leq Si^{\circ} \leq 0.80$
- II. $0.60 \leq Si^{\circ} \leq 0.66$
- III. $0.49 \leq Si^{\circ} \leq 0.54$

Se considerate separatamente, le singole serie forniscono, per i valori di NIGGLI, diagrammi di variazione tipici e con poca deviazione. Solamente per la serie III, nell'intervallo $70 < si < 80$, si manifesta una certa irregolarità ri-

TABELLA DELLE ANALISI

Serie I $0.69 \leq \text{Si}^{\circ} \leq 0.80$

N.		si	al	fm	c.	alk	k	mg	Si ^o	Az ^o	Autore
1	Pirossenite, S. Paolo, Melfi	85	9.5	48.2	40.2	2.1	.42	.75	.78	.46	RITTMAN 1931
2	Tefrite haüynica con poca leucite, Crinale M. Vulture, M. S. Michele	95	23.7	35.3	32.0	9.0	.33	.50	.70	.49	AMENDOLAGINE 1957
3	Tefrite leucitico-haüynica, Costo- ne, Lato NW d. M. Vulture	104	24.6	33.0	29.8	12.6	.39	.49	.69	.51	AMENDOLAGINE 1957
4	Tefrite haüynica, Strada Rionero- Monticchio	123	31.4	27.7	27.6	13.3	.27	.42	.80	.55	AMENDOLAGINE 1957
5	Tefrite haüynica, Rionero	134	37.2	21.7	19.7	21.4	.36	.37	.72	.57	NARICI 1932
6	Tefrite haüynica, M. Vulture	135	33.3	23.3	24.1	19.3	.35	.39	.76	.58	AMENDOLAGINE 1957
7	Fonolite haüynica, S. Paolo Melfi	174	41.8	12.8	8.0	37.4	.37	.16	.69	.63	NARICI 1932
8	Fonolite anortoclasica, S. Paolo Melfi	181	43.7	12.3	10.3	34.7	.40	.12	.77	.65	NARICI 1932

Serie II $0.60 \leq \text{Si}^0 \leq 0.66$

N.		si	al	fm	o	alk	k	mg	Si ⁰	Az ⁰	Autore
9	Pirossenite amfibolica, M. Vulture	72	11.3	51.4	33.4	3.9	.33	.68	.63	.42	NARICI 1932
10	Riedenite haüynica granatifera, S. Paolo, Melfi	78	22.4	27.1	43.9	6.6	.23	.63	.62	.47	NAEICI 1932
11	Haüynofiro, Laghi di Monticchio	88	24.9	32.2	31.6	11.3	.42	.53	.60	.47	NARICI 1932
12	Leucitofiro, M. Vulture	96	22.1	34.8	29.5	13.6	.36	.57	.62	.49	NARICI 1932
13	Nefenilite, Toppo Capraro	99	25.7	33.0	26.3	15.0	.46	.37	.62	.50	DI LECCE MINNINI 56
14	Tefrite leucitico-haüynica, N. M. Vulture	100	26.2	31.1	30.1	12.6	.38	.47	.66	.50	AMENDOLAGINE 1957
15	Leucitofiro tefritico, Serr'Alto	104	23.4	32.3	29.0	15.3	.26	.53	.64	.51	NARICI 1932
16	Haüynofiro Rio, Nocelletto	121	28.1	25.7	24.8	21.4	.36	.41	.65	.55	WASHINGTON 1912

Serie III $0.49 \leq \text{Si}^0 \leq 0.54$

17	Riedenite haüynica, M. Vulture	73	17.6	41.4	32.4	2.6	.40	.63	.54	.42	NARICI 1932
18	Leucitite melilitica, Monticchio	77	18.7	33.7	33.2	14.4	.48	.42	.49	.44	NARICI 1932
19	Melilitite, Pietra della Scimmia	81	16.3	29.0	40.5	14.2	.25	.45	.52	.45	DI LECCE MINNINI 1936
20	Haüynofirò, Melfi	90	24.9	24.5	26.6	24.0	.34	.42	.46	.47	WASHINGTON 1917
21	Haüynofiro, S. Paolo, Melfi	93	25.8	30.3	24.5	19.4	.37	.49	.52	.48	NARICI 1932

guardo ai valori *al* e *fm*, dovuta probabilmente a un errore nella separazione degli ossidi nell'analisi chimica (Fig. 3).

I tre diagrammi dimostrano con molta chiarezza l'abbassamento della silicizzazione da I a III. Ad uguali valori *si* corrispondono valori *alk* che diminuiscono da I a III. Nello stesso senso, la differenza (*al-alk*) va pure diminuendo. Queste relazioni chemiografiche ci ricordano da vicino le condizioni

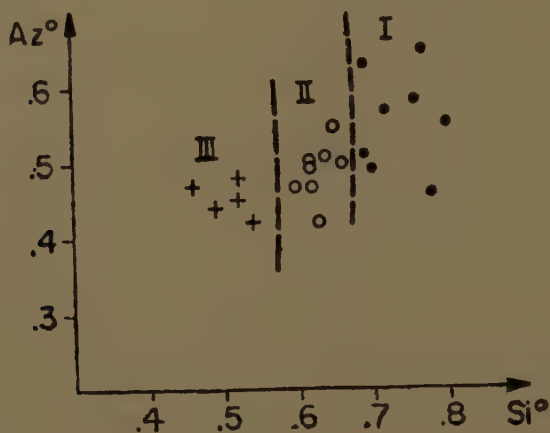


Fig. 2.

trovate per il Vulcano Vesbico. Sembra inoltre caratteristico un *c* sempre molto alto e vicino a *fm*. Nella serie III si osserva il comportamento tipico delle serie ijolitiche con un *al* \sim *fm* \sim *c* \sim *alk* \sim 25 per un *si* \sim 100.

Nel triangolo LMQ (Fig. 5), la silicizzazione diversa per le tre serie è ben riconoscibile dalla variazione del livello di *Q*, in perfetta analogia con il Vulcano Vesbico (Fig. 1). Il grado di silicizzazione della serie I corrisponde press'a poco a quello del giovane Somma, quello della serie II al Vesuvio. La serie III è di bassissima silicizzazione: riguardo alla desilicizzazione, essa supera non solo tutte le rocce del Vulcano Vesbico, ma anche la serie più desilicizzata del Vulcano Laziale, che rappresenta già uno dei casi più estremi che siano noti.

Sulla scorta di tutto quanto si è detto, si può riconoscere che tra il Vulture e il Vulcano Vesbico intercorrono veramente notevoli analogie. Sembra perciò logico ammettere che anche per il Vulture l'influenza di processi di sintexi di rocce calcareo-dolomitiche sia stata la causa della desilicizzazione progressiva osservata. È pertanto necessario ricordare che indizi sicuri per una tale evoluzione magmatica, come per esempio la presenza di blocchi di calcari rigettati manifestanti neoformazioni di silicati, non sono ancora stati trovati. Dall'assenza di rocce più antiche dell'eocene, e soprattutto di calcari mesozoici tra i blocchi proiettati dal Vulture, G. DE LORENZO arrivò alla conclusione che i fenomeni esplosivi si fossero prodotti in un livello assai alto,

I. $0.69 \leq Si^o \leq 0.80$

II. $0.60 \leq Si^o \leq 0.66$

III. $0.49 \leq Si^o \leq 0.54$

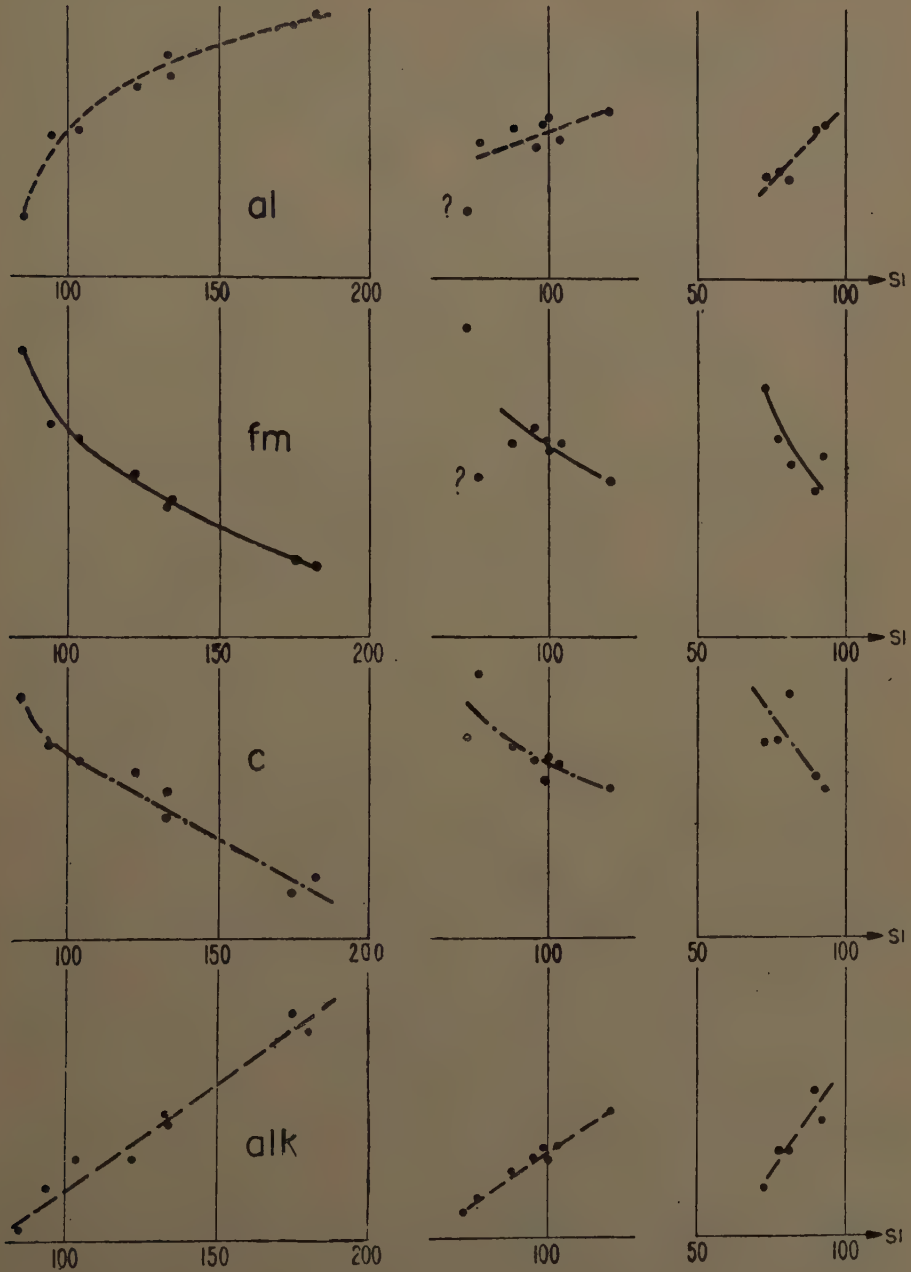


Fig. 3.

cioè in quello delle argille plioceniche, e sarebbero poi diventati più profondi fino al livello del flysch eo-miocenico, ma senza mai raggiungere i calcari

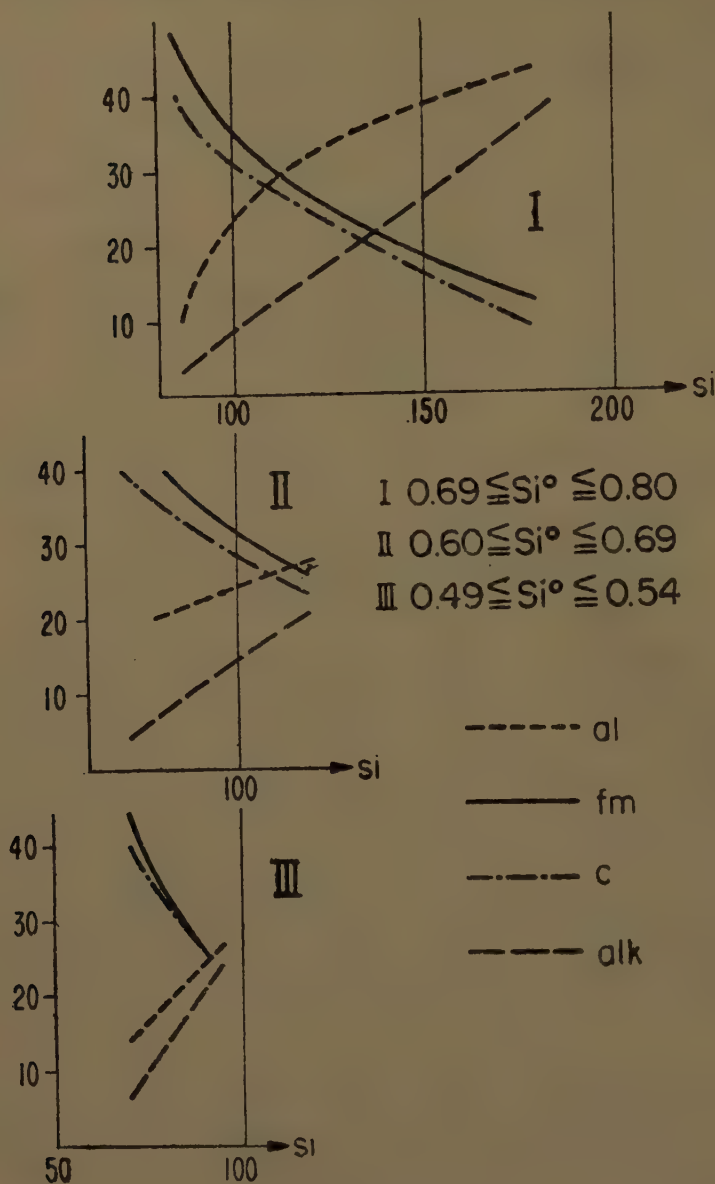


Fig. 4.

mesozoici. Questa spiegazione della mancanza di calcari tra i blocchi rigettati non esclude pertanto che essi siano entrati in reazione col magma prima che questo arrivasse, nella sua ascesa, fino al flysch e le argille. In ogni caso è opportuno ricordare che tra i proietti si trovano anche tipi pirossenitici

con biotite, molto vicini a certi blocchi del Somma, dove essi passano a calcari con plaghe di silicati, rivelando la loro origine determinata dal metamorfismo dei sedimenti calcarei. Che anche formazioni più recenti abbiano reagito col magma e siano state assimilate, viene provato dalla straordinaria diffusione della h  iyna nelle rocce del Vulture. Gi   il DEECKE (1891) ritenne responsabile della formazione di questo minerale l'assimilazione di rocce gessose che si riscontrano nel Pliocene inferiore.

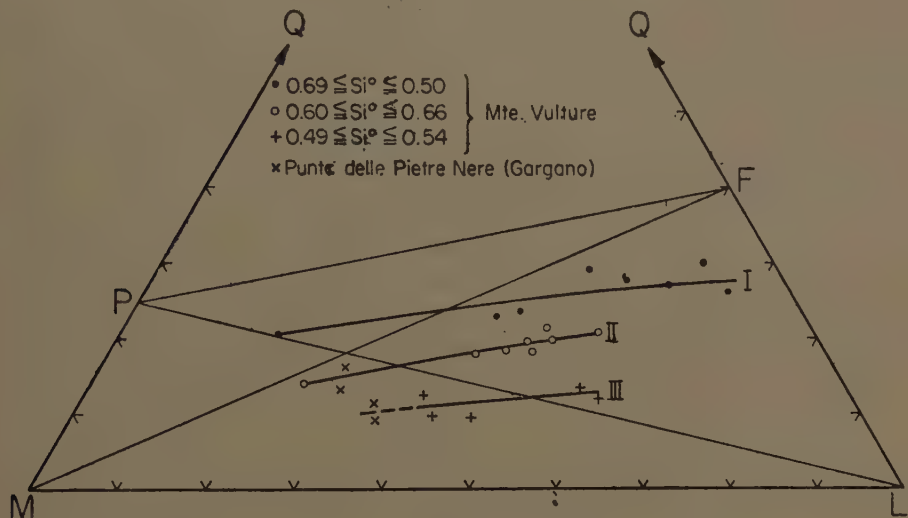


Fig. 5.

Purtroppo la maggior parte delle rocce analizzate non si trova in posizione stratigrafica definita, ma sotto forma di blocchi rigettati e inclusi nei tufi. Non    perci   possibile arrivare a conclusioni sicure riguardo alla loro posizione cronologica nel corso dell'evoluzione magmatica e dell'attivit   del vulcano, di durata relativamente breve. Da questo punto di vista il Vulture pu   essere confrontato col Vulcano Laziale. Molto significativo    per   che per le fonoliti e le tefriti, che rappresentano sicuramente le prime manifestazioni vulcaniche, tutti i campioni appartengono, salvo una sola eccezione, alla serie I, che rivela la massima silicizzazione. In quanto all'eccezione menzionata, si tratta di una tefrite h  iynica a leucite. Per essa si ottiene un $SiO_2 = 0.66$, cos   che rappresenta il termine di pi   alta silicizzazione della serie II e pu   di conseguenza essere considerata come un termine di transizione fra le serie I e II.

Una posizione particolare    occupata dalla roccia melilitica di bassissima silicizzazione della Pietra della Scimmia, che occorre sotto forma di dicco nella regione dei laghi di Montichio. La roccia dev'essere di recentissima formazione, in quanto i crateri corrispondenti si sono formati durante l'ultima fase del vulcanismo vulturiano. Anche se l'et   relativa pi   esatta di singole

formazioni vulcaniche non può essere fissata in base alle conoscenze attuali, sembra molto probabile che il grado di silicizzazione sia andato diminuendo nel corso dell'attività del Vulture, e ciò in analogia col Vulcano Vesbico.

Dal diagramma k/mg (Fig. 6) non risulta alcuna differenza per le tre serie. I valori $0.23 \leq k \leq 0.48$ corrispondono a un tipo di transizione fra il tipo della provincia petrografica atlantica e quello mediterraneo. Forse è

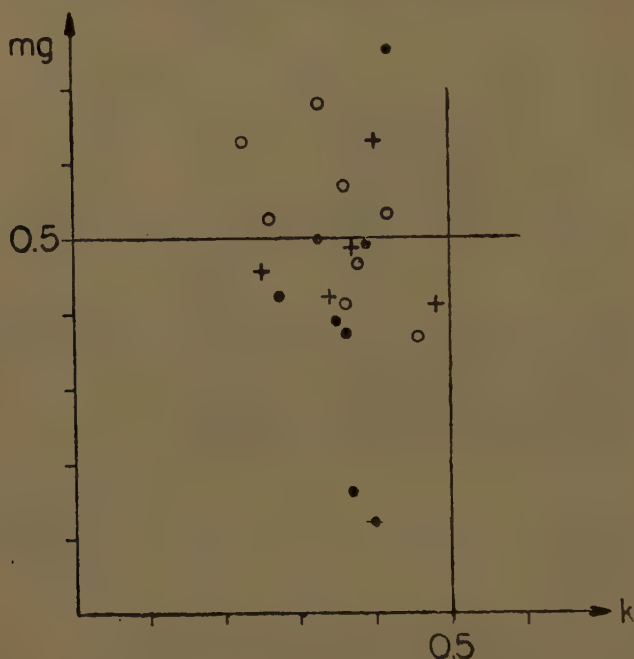


Fig. 6.

lecito pensare che all'inizio dell'attività, il magma del Vulture avesse carattere sodico, in corrispondenza alla posizione tettonica del vulcano nell'avantterra appenninico. In uno stadio più avanzato si sarebbe invece avuto un arricchimento relativo del potassio per effetto di una evasione del sodio, legata ai processi della sintexi carbonatica. Ma questo processo non si sarebbe spinto fino al grado raggiunto nel Vulcano Vesbico, dando così origine al tipo di transizione da atlantico a mediterraneo.

La conoscenza approfondita delle rocce del Vulture, dovuta alle nuove serie di analisi già menzionate, ci offre anche nuove e inattese prospettive per la comprensione del piccolo e isolato affioramento di rocce eruttive della Punta delle Pietre Nere sul promontorio del Gargano. Queste rocce furono descritte dal VIOLA (1894) come appartenenti a un filone lamprofirico misto, ma nel 1953 le indagini eseguite dal COTECCHIA e dal CANITANO dimostrarono la natura diapiroica dell'affioramento. Dal punto di vista petrografico si tratta di rocce pirossenitiche passanti a orneblenditiche con feldispato alcalino, bio-

tite e anche olivina, rivelanti circa tre quarti di componenti femici: esse sono perciò situate proprio al confine del campo spettante alle sieniti melanocratiche (BURRI 1960). La composizione chimica (RESTAINO 1934, BURRI 1960) corrisponde ai magmi ankaratritici e missouritici. Esiste inoltre una stretta somoglianza nella composizione chimica con i tipi pirossenitici e orneblenditici dei blocchi rigettati inclusi nei tufi del Vulture. Come risulta della Fig. 5, i campioni analizzati della Punta delle Pietre Nere s'inseriscono benissimo nelle serie II e III del Vulture. Da ciò sembra scaturire l'esistenza di un legame genetico tra le rocce del Vulture e quelle del Gargano. Ci sembra perciò lecito enunciare l'ipotesi che nelle regioni vicine al Vulture e al promontorio del Gargano, ambedue appartenenti allo stesso avanterra appenninico, identici processi magmatici fossero efficienti nel periodo che va dal terziario tardivo al quaternario, in funzione del ripiegamento appenninico. Mentre al Vulture i magmi salirono fino alla superficie, al Gargano essi sarebbero rimasti in profondità, consolidandosi al livello subvulcanico per poi essere portati in alto dai movimenti diapirici menzionati, avvenuti più tardi. Monte Vulture e Punta delle Pietre Nere costituiscono perciò una provincia petrografica distinta nell'avanterra appenninico che può essere denominata provincia pugliese, appartenente al vulcanismo finale dell'orogenesi appenninica (BURRI 1960).

ELENCO DELLE OPERE CITATE

- M. G. AMENDOLACINE (1957). *Sulle tefriti del Monte Vulture (Lucania)*. Rendic. Soc. Min. Ital., **13**, 45-69.
- C. BURRI (1948). *Die petrographischen Provinzen Mittelitaliens*. Schweiz. Min. Petr. Mitt., **28**, 49-64.
- C. BURRI (1960). *Zur Kenntnis der Eruptivgesteine der Punta delle Pietre Nere (Prov. Foggia, Italien)*. Ecl. geol. helv., **52**, 407-416.
- C. BURRI (1960 a). *Petrochemie der Capverden und Vergleich des Capverdischen Vulkanismus mit demjenigen des Rheinlandes*. Schweiz. Min. Petr. Mitt., **40**, 115-161.
- C. BURRI (1961). *Le province petrografiche postmesozoiche d'Italia*. Rendic. Soc. Min. Ital., **17**, 3-40, figg. 8.
- V. COTECCHIA e A. CANITANO (1953). *Sull'affioramento delle « Pietre Nere » al Lago di Lesina*. Boll. Soc. Geol. Ital., **73**, 3-18.
- G. DE LORENZO (1900). *Studio geologico del M. Vulture*. Atti R. Accad. Sc. fis. e Mat. Napoli, (2), **10**, N. 1, pp. 207.
- W. DEECKE (1891). *Der Monte Vulture in der Basilicata (Unteritalien)*. N. Jb. f. Min. etc., B. B. **7**, 556-623.
- M. DI LECCE MININNI (1956). *Su alcune rocce nefeliniche e melilitiche del M. Vulture*. Rendic. Soc. Min. Ital., **12**, 105-116.
- A. LACROIX (1893). *Les enclaves des roches volcaniques*. Mâcon.
- A. LACROIX (1905). *Sur un nouveau type pétrographique représentant la forme de profondeur de certaines leucotéphrites de la Somma (Sommaïtes)*. C. R. Ac. Sc. Paris, **141**, 1188-93, errata, ibid. **142**, 68.
- A. LACROIX (1907). *Sur la constitution pétrographique du massif volcanique du Vésuve et de la Somma*. C. R. Ac. Sc. Paris, **144**, 1245-1251.

- A. LACROIX (1907 a), *Étude minéralogique des produits silicatés de l'éruption du Vésuve* (avril 1906). Nouv. Arch. Mus. Hist. Nat. Paris, (4) 9, 1-170.
- A. LACROIX (1917). *Les laves leucitiques de la Somma*. C. R. Ac. Sc. Paris, 165, 481-487.
- E. NARICI (1932). *Contributo alla petrografia chimica della provincia magmatica campana e del Monte Vulture*. Z. Vulk., 14, 210-239, spec. 237-239.
- S. RESTAINO (1934). *Contributo allo studio chimico di una roccia eruttiva della Punta delle Pietre Nere (Foggia)*. Rendic. R. Accad. Sc. fis. e mat. Napoli, (4), 4, 167-169.
- A. RITTMANN (1931). *Gesteine und Mineralien vom Monte Vulture in der Basilicata*. Schweiz. Min. Petr. Mitt., 11, 240-252.
- A. RITTMANN (1932). *Das Vesuvium und seine Entwicklung*. Die Naturwiss. (Berlin), 20, 305-311.
- A. RITTMANN (1932). *Die geologisch bedingte Evolution und Differentiation des Somma-Vesuvmagmas*. Z. Vulk., 15, (1933), 8-94.
- A. RITTMANN e F. IPPOLITO (1947). *Sulla stratigrafia del Somma-Vesuvio*. Atti Fond. Polit. Mezzogiorno, 3, 7, 35 p.
- C. VIOLA (1894). *Le rocce eruttive della Punta delle Pietre Nere in provincia di Foggia*. Boll. R. Com. geol. d'Italia, (3), 5, 391-405.
- H. S. WASHINGTON (1906). *The roman Comagmatic Region*. Carnegie Inst. of Washington Publ., 57, Washington D.C.
- H. S. WASHINGTON (1917). *Chemical analyses of igneous rocks published from 1884-1913 inclusive*. U. S. geol. Surv. Prof. Pap., 99.

Zurigo, 25 Aprile 1961. Istituto di Cristallografia e Petrografia della Scuola Politecnica Federale.

RIASSUNTO. — Tra il Vulcano Vesbico e il Vulture esistono notevoli analogie chimico-petrografiche. Sembra perciò lecito supporre che anche nel Vulture l'evoluzione magmatica venga controllata da processi di desilicizzazione dovuti alla sintexi di rocce carbonatiche (e gessose), simili a quelli operanti nel Vulcano Vesbico. Non ostante che l'elaborazione della cronologia completa dei prodotti del Vulture non sia stata finora possibile ci sono molti indizi che suggeriscono un aumento della desilicizzazione nel corso dell'attività del vulcano, pure in analogia al Vulcano Vesbico. Si può costatare l'esistenza di tre serie di rocce ben definite, che si distinguono nel loro grado di silicizzazione. Le rocce della Punta delle Pietre Nere Gargano s'inseriscono benissimo nelle due serie di più bassa silicizzazione: ciò lascia supporre uno stretto legame genetico tra i due fenomeni magmatici.

SUMMARY. — The magmatic evolution of Monte Vulture is believed to have been controlled by desilication processes due to syntexis of carbonate (and also sulphate) rocks analogous to those which operated in the vesbian volcano. Although exact time relations cannot be worked out for the whole of the volcanic sequence, it seems highly probable that desilication increased with time as is known to have been the case in the vesbian volcano. Three series of rocks differing in their degree of silication can be distinguished. The rocks of the Punta delle Pietre Nere (Gargano) fit well into the two lower-silicified ones which suggests a close genetic relationship between the two occurrences.

Sulla verifica del principio di omogeneità nelle espressioni vettoriali.

Nota del prof. Filippo Manna, presentata dal socio corr. M. Gleijeses

(Adunanza del dì 3 giugno 1961)

1) PREMESSE.

Da quando per merito altissimo di BURALI-FORTI e MARCOLONGO [1] il calcolo vettoriale prese unicità e stabilità di forma ed assurse all'importanza di un vero e proprio Calcolo Assoluto, il suo uso è andato sempre più estendendosi ad ogni ramo della tecnica.

In verità lo studio dei metodi vettoriali s'impone oggi più di ieri al fisico ed all'ingegnere giacchè non pochi argomenti, tra i più attuali ed importanti, vengono ormai trattati esclusivamente con tali metodi [2]. Il fatto però che l'autonomia, la rapidità, la concisione l'intrinsecità di tutte le conclusioni dell'analisi vettoriale fanno di questa lo strumento più potente al servizio del tecnico, conduce a desiderare che le sue proposizioni fondamentali siano istituite indipendentemente da ogni altra teoria, ad es. indipendentemente dalle forme geometriche di prima specie del PEANO.

Tuttavia qualora ciò si tenti di fare senza speciale accorgimento, salta fuori qualcosa che diremo per ora di « dissimetrico », il che, se non costituisce una difficoltà sostanziale, non è d'altra parte adatto a soddisfare il gusto comune.

Di più il fisico e l'ingegnere, coloro cioè che debbono applicare detta analisi a quantità meno astratte dei vettori puramente geometrici, incontrano qualche difficoltà nel riconoscere, attraverso le espressioni vettoriali, la verifica di quel principio d'omogeneità ch'essi stimano un prezioso mezzo di controllo: pronto in ogni istante, adatto frequentemente a far risaltare casuali errori e indispensabile poi per penetrare l'essenza di molti fenomeni, ad es. per dedurre le caratteristiche di un sistema dinamico sperimentando su modelli di questo [3], [4].

Ad eliminare tali apparenze ci adopereremo cautamente in questa nota esponendo non tanto qualche possibile ritocco dei principi fondamentali, quanto e piuttosto una diversa maniera di vedere questi ultimi, sicchè per nulla ne risultino alterati nè il carattere assoluto dell'analisi che vi poggia, nè l'algoritmo ormai stabilito, nè tampoco le conclusioni.

Si sa del resto che, in generale, nei riguardi interni di una teoria matematica, è indifferente partire da alcuni principi fondamentali anzichè da

altri, purchè equivalenti nelle conseguenze. Ammessa la possibilità di accertare questa equivalenza è allora naturale che dovremo indurci a scegliere, tra tutti i sistemi equivalenti di detti principi, quello che, come direbbe Henri POINCARÉ [5] risulta il più comodo.

In quel che faremo appresso saremo guidati dal criterio che detta comodità debba corrispondere nel nostro caso alla brevità e semplicità del processo logico necessario per verificare, nel modo più esteso possibile, il principio di omogeneità nelle espressioni vettoriali

2) DEFINIZIONI DI VETTORE.

Cominciamo a constatare che la più semplice definizione di vettore, quella cioè che per concisione viene divulgata nell'insegnamento tecnico-scientifico, congiunta al concetto ordinario di punto, che in tal caso si suol lasciare al discente, conduce subito a qualcosa che appare o una dissimmetria algoritmica, o, più facilmente, una trasgressione al principio di omogeneità.

Infatti appena definito il vettore \mathbf{a} come un ente geometrico individuato da lunghezza direzione e senso, si suole imporre l'eguaglianza, d'altronde giustificabilissima,

$$(1) \quad \mathbf{a} = B - A.$$

Nella (1) B ed A son lasciati pensare come due punti propri (ordinari) ed il segno $(-)$ frapposto è lasciato intendere, com'è in realtà, lo stesso che, subito dopo, compare nella relazione tra soli vettori

$$(2) \quad \mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$$

nella quale esso segno sta evidentemente ad indicare l'operazione di sottrazione geometrica.

Dalle cose in tal modo esposte si deduce che, o il segno che compare nella (1) ha diverso significato di quello che compare nella (2) (dissimmetria algoritmica), ovvero bisogna ammettere che la differenza, sia pur geometrica, tra due punti ordinari, risulti un vettore cioè un ente del tutto distinto e diverso dal punto (infrazione al principio di omogeneità); di più, in tale povertà di cognizioni, non si può concepire che cosa possa essere la differenza geometrica tra due punti.

Questa difficoltà non scompare qualora si definisca [1] formalmente il vettore $B - A$ come quell'operatore (a sinistra) tra terne di punti e numeri reali tale che, qualunque siano i punti P, Q, R si abbia sempre

$$(B - A) (P, Q, R) = \text{Vol } (B, P, Q, R) - \text{Vol } (A, P, Q, R).$$

Esaminando poi la nota definizione proiettiva del LOHR [6] o altre definizioni che si discostino sensibilmente da quella esposta per prima, si vede che nessuna di esse sia a questa da anteporsi qualora sempre si giudichi in base alla stessa norma.

3) CONCETTO DI VETTOR-PUNTO.

Diciamo subito che, considerando il punto ed il vettore come particolari forme geometriche di prima specie, ogni difficoltà superbamente scompare. Ma è evidente che il risalire alla teoria di tali forme trasporta i fondamenti dell'analisi vettoriale tanto lungi quanto non sembra punto indispensabile, specie se non si vuol perdere di vista quella tale comodità cui abbiamo accennato.

Basta infatti osservare che l'insieme dei vettori definiti nel modo più semplice costituisce uno spazio nel quale il punto non si può concepire se non come un vettore di modulo nullo (e perciò di direzione e senso indeterminati), di più libero come il vettore, nonchè unico.

E allora chiaro che solo a quest'unico e libero « vettor-punto » un vettore qualsiasi può correttamente sommarsi senza infrangere il principio di omogeneità, che ci è comodo rispettare, come pure è inoppugnabile che solo nello spazio dei vettori si potrà fare dell'analisi vettoriale.

Di questo vettor-punto, unico e libero, noi possiamo servirci per operare un arbitrario ma lecito collegamento tra lo spazio dei vettori e quello che, per brevità e con dizione del resto chiara, chiameremo spazio cartesiano.

Se infatti noi facciamo corrispondere il vettor-punto ad un punto dello spazio cartesiano determinato ma qualsiasi (in particolare e se si vuole magari l'origine stessa delle coordinate) potremo stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio cartesiano e quello dei vettori sicchè potremo col simbolo di un punto indicare un vettore e viceversa. A tale scopo basterà convenire che come al vettor-punto Q libero ed unico si fa corrispondere il punto Q_1 determinato dello spazio cartesiano, così al vettore $Q + \mathbf{a}$ corrisponderà il punto P_1 dello spazio cartesiano in cui cade il secondo estremo di $Q + \mathbf{a}$, quando alla corrispondenza si pensa sostituita una vera « applicazione » del vettor-punto Q al punto proprio Q_1 .

In tale intesa l'espressione $B - A$ rappresenta la differenza dei due vettori rappresentativi di B ed A sicchè essa esprime un'operazione eseguita nello spazio dei vettori ed il risultato (un vettore) si può se si vuole immaginare applicato, anche solo successivamente, allo spazio ad un punto cartesiano. È di somma importanza constatare che il vettore $B - A$ risulta del tutto indipendente dal punto Q_1 al quale si applica, si sovrappone o si fa corrispondere il vettor-punto Q .

In sostanza, quindi, il vettore $B - A$ è intrinsecamente ben definito senza

far ricorso ad alcun sistema di riferimento. Come meglio vedremo anche il differenziale dP risulta del pari indipendente, sicchè un calcolo nel quale i simboli A, B e P entrino esclusivamente attraverso le loro funzioni $B - A$ e dP ed attraverso le funzioni di tali funzioni, tale calcolo, diciamo, non perderà per questo alcunchè del suo carattere intrinseco o assoluto.

Benvero per quel che abbiamo detto resta anche definito il significato dell'espressione

$$(3) \quad S = A + B$$

ma ambo i significati che ovviamente si possono far corrispondere ad S rappresentano valori che non sono indipendenti dalla scelta dell'origine Q_1 , onde la (3) non è da introdursi, come difatti non faremo, nel calcolo che ci interessa. Ciò non toglie però che $D = (A+B)/2$ rappresenti un punto dotato della proprietà invariantiva di essere il punto medio del segmento \overline{AB} , nella stessa guisa che, più in generale, l'espressione

$$D = \frac{m A + n B + \dots + r C}{m + n + \dots + r}$$

rappresenta un punto che gode, rispetto al sistema di punti A, B, \dots, C , una posizione invariantiva che, per analogia, chiameremo baricentrica giacchè esso punto sarebbe effettivamente il baricentro di masse misurate dai numeri m, n, \dots, r (quale che sia l'unità di misura) applicate in A, B, \dots, C .

È facile allora vedere come possa facilmente istituirsi una teoria riallacciabile a quella nota del calcolo baricentrico, ma in modo estremamente più semplice e adatta altresì a fornire costruzioni geometriche comodissime nelle pratiche applicazioni.

Ciò detto incidentalmente passiamo ad esporre le nostre definizioni nel modo che dal punto di vista innanzi prescelto sembrano e sembreranno ancor più le più opportune.

4) PROPOSIZIONI FONDAMENTALI. EQUAZIONI DIMENSIONALI.

Definiamo vettore geometrico l'ente geometrico dotato delle due sole dimensioni: lunghezza che indicheremo con L e direzione-senso che indicheremo con la lettera υ (ipsilon) dell'alfabeto greco.

È necessario avvertire subito che in questa operazione la parola dimensione non misura precisamente i gradi di libertà analitica dell'insieme lineare costituito dai vettori, ma acquista significato analogo a quello di « dimensione fisica » introdotto dal FOURIER e chiaramente precisato dal Prof. PISTOLESI [7].

Per maggiore chiarezza, subito dopo aver definito il modulo del vettore come quel numero reale che misura la lunghezza di esso, ci soffermeremo un po' a considerare i due significati della parola « dimensione » da noi usata e tra i quali, nel nostro caso, potrebbe nascere equivoco.

Premesso che gli elementi a_1, a_2, \dots, a_n del sistema lineare U si dicono linearmente associati quando esistono dei numeri reali x_1, x_2, \dots, x_n , non tutti nulli, tali che sia

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = 0$$

un primo significato della parola dimensione (dimensione analitica) risulta dalla convenzione di dire che il sistema lineare U ha n dimensioni quando n suoi elementi possono non essere linearmente associati, ma $n+1$ suoi elementi lo sono.

Come sappiamo i vettori costituiscono un sistema lineare; tra di essi tre non sono linearmente associati e tutti gli altri si possono esprimere come combinazioni lineari di essi; cioè, in questo significato, il sistema dei vettori ha tre dimensioni.

Nello studio dei fenomeni fisici, che per brevità considereremo qui limitati a quelli meccanici, la misura di una grandezza qualsiasi Q resta assegnata dalla nota espressione monomia di MAXWELL

$$(4) \quad Q = L^\alpha T^\beta M^\gamma$$

in cui α sta a rappresentare, in qualsiasi modo venga eseguita la misura, la differenza tra il numero delle misure di lunghezza che nell'espressione monomia compaiono come moltiplicatori e quello delle stesse che compaiono come divisori; analoga rappresentazione è contenuta in β e γ nei riguardi, rispettivamente, dei tempi e delle masse.

Il numero α dicesi grado della dimensione di Q rispetto alle lunghezze ed analogamente si dice per β e γ . La (4) si suol chiamare equazione dimensionale della grandezza Q e manifesta in un certo modo alcuni rapporti che intercedono tra la natura dell'ente Q e quelle delle grandezze fondamentali lunghezza tempo e massa quali sono da noi concepite.

Da ciò scaturisce un secondo concetto di dimensione che non ha nulla di comune col primo se non la caratteristica di limitare, in campi ben diversi, la libertà di un certo ente. Quando abbiamo parlato di dimensione nella definizione di vettore abbiamo inteso attribuire a tale parola un significato analogo a quello chiarito per ultimo e lo stesso faremo costantemente in seguito.

Conveniamo ora di attribuire, in aggiunta alle ordinarie, la stessa dimensione ν a tutti quegli enti fisici che si mostrano dotati o convenzionalmente dotabili di direzione-senso. Vedremo come ciò possa giovare moltis-

simo nelle pratiche applicazioni dell'analisi vettoriale così come nel passaggio dalle sue espressioni a quelle scalari nei riguardi del principio di omogeneità.

Sia dunque E una di queste grandezze fisiche la cui equazione dimensionale scriveremo

$$E \equiv \nu L^\alpha T^\beta M^\gamma.$$

Chiameremo vettore qualsiasi grandezza nella cui equazione dimensionale entri a primo grado la ν (con l'esponente uno espresso o sottinteso); viceversa un ente nella cui equazione dimensionale entri la ν con esponente diverso da uno non riguarderemo mai come vettore, bensì talvolta come un operatore, talvolta come un simbolo d'operazione, ecc. In altri termini l'esponente uno, per la dimensione ν , risulti caratteristico del vettore.

Per tutti gli altri enti accennati il valore dell'esponente non riesce caratteristico nel senso che per l'omogeneità di due di essi si richiede l'egualianza di tali esponenti, ma questa non implica quella. Vedremo ad es. che molte categorie di operatori e tutte le quantità scalari hanno l'esponente zero per ν nella loro equazione dimensionale.

La E , scritta or è poco, è dunque un vettore ed essa differisce da un vettore geometrico perchè il suo modulo è un numero che misura una grandezza di dimensioni $L^\alpha T^\beta M^\gamma$ laddove il modulo del vettore geometrico è un numero che misura una lunghezza, cioè una grandezza di dimensioni $L^1 T^0 M^0$. Si può anche chiamare vettore geometrico rappresentativo di E quello che ammette lo stesso numero per modulo ma ciò pare, in generale, superfluo e forse anche d'impiccio nelle applicazioni. È infatti da accettarsi come legge sperimentale che quelle grandezze cui abbiamo attribuite la dimensione ν rispettano le leggi stabilite dall'analisi dei vettori geometrici.

A) Operazioni finite.

Nulla vieta di considerare il segno \times come un operatore a destra che trasformi un vettore \mathbf{a} in un operatore a sinistra $\mathbf{a} \times$ il quale applicato alla sua volta ad un altro vettore \mathbf{b} lo trasforma nella nota quantità scalare $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Si sa ad es. che nell'analisi numerica certe operazioni, tra cui l'elevazione a potenza e l'estrazione di radice, alterano le dimensioni della grandezza su cui vengono eseguite. Lo stesso può dirsi che accada per il segno \times , con la differenza che qui si ha il vantaggio di poter assumere (formalmente beninteso) la dimensione ν^{-2} indipendentemente dagli enti tra i quali esso segno viene a trovarsi.

Posto dunque

$$\mathbf{a} \equiv \nu L \quad ; \quad \mathbf{b} \equiv \nu L \quad ; \quad \times \equiv \nu^{-2}$$

risulta

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv v L \cdot v L \cdot v^{-2} \equiv L^2$$

onde il prodotto scalare $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ha le dimensioni di una superficie.

Analogamente al segno \wedge si possono formalmente conferire le dimensioni v^{-1} sicchè

$$(5) \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \equiv v L \cdot v L \cdot v^{-1} \equiv v L^2.$$

La (5) mette in evidenza che il prodotto vettoriale di due vettori geometrici è una grandezza vettoriale che possiamo ancora chiamare un vettore geometrico, ma non è il vettore geometrico che ora chiameremo semplice e che abbiamo definito in principio perchè il modulo di $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ misura una area e non una lunghezza. Sarebbe facile del resto attribuire all'operatore \wedge le dimensioni formali $v^{-1} L^{-1}$ ma nelle pratiche applicazioni se non altro è molto più comoda l'altra convenzione.

Infatti, per fare un esempio, nell'espressione del momento \mathbf{M} della forza \mathbf{F} applicata in P rispetto al punto O , si ha

$$\mathbf{M} = (P - O) \wedge \mathbf{F}$$

in cui, per le dimensioni,

$$P - O \equiv v L$$

$$\wedge \equiv v^{-1}$$

$$\mathbf{F} \equiv v M L T^{-2}$$

onde

$$\mathbf{M} \equiv v L \cdot v^{-1} \cdot v M L T^{-2} \equiv v M L^2 T^{-2}$$

in armonia con quello che sappiamo.

Giunti dunque a questo punto occorre convenire che le operazioni vettoriali si debbono intendere applicabili anche ai vettori geometrici non semplici cioè anche a quelli il cui modulo non esprima la misura di una semplice lunghezza, ma quella superiore di superficie, di volume, ecc., con che si esce dal campo geometrico.

Rimane così giustificato il doppio prodotto vettoriale, il triplo, ecc. Per gli operatori $e^{i\varphi}$, i , i^2 si ha, evidentemente

$$e^{i\varphi} \equiv v^0$$

$$i \equiv v^0$$

$$i^2 \equiv -1 \equiv v^0$$

ed essendo la moltiplicazione di un vettore per il numero -1 equivalente

all'applicazione dell'operatore i^2 non deve sembrare ostico o illogico che tale moltiplicazione riesca ad influire sul valore della v .

Un vettore dal modulo negativo si può dunque sempre ridurre, volendolo ed in base alla nostra definizione di v , ad un altro vettore che abbia modulo positivo e la v ruotata di π , parallelamente ad un piano qualsiasi, mediante l'applicazione dell'operatore i^2 .

Ancor più euritmico risulta l'operazione di moltiplicazione di un vettore per un numero reale negativo qualora ciò si consideri come l'applicazione al vettore di una particolare omografia che come tale è atta, per definizione, ad agire sul valore della v . Questa v , in sostanza, noi qui vogliamo pensarla una dimensione irriducibile come L , T ed M sicchè essa in sostanza non è un vettore di lunghezza uno, benchè sia la dimensione del vettore unitario

$$u \equiv v.$$

Detto vettore unitario a sua volta non risulta un vettore geometrico semplice perchè il suo modulo rappresenta ciò che noi assumiamo come unità pura.

Il simbolo P di punto poi, per quanto gli è permesso d'introdursi nelle espressioni vettoriali, risulta anch'esso di dimensione eguale a quella di un vettore onde

$$P \equiv v L.$$

Ciò naturalmente, per le ragioni ormai più volte ripetute, non deve autorizzarci ad applicare al vettore nascosto sotto il simbolo P di punto gli stessi operatori applicabili ai vettori rappresentati col simbolo esplicito di vettore.

B) Funzioni di numeri.

Un vettore può essere funzione dei numeri reali t , u , v che nelle applicazioni possono anche essere grandezze scalari di dimensioni non semplicemente numeriche.

Se per semplicità ci riferiamo al caso di una sola variabile t ed esprimiamo con $S(t)$ il vettore funzione di t , diremo derivata di $S(t)$ rispetto a t il limite, per $h = 0$ (h omogeneo con t) del rapporto

$$\frac{S(t + h) - S(t)}{h}$$

in cui numeratore e denominatore risultano ben definiti, ed ove l'operazione di divisione immaginiamo definita nel modo noto.

Se $S(t)$ è un vettore geometrico e t un numero, tal derivata, che si in-

dica $\frac{dS}{dt}$, risulta un vettore geometrico onde

$$\frac{dS}{dt} \equiv \nu L.$$

Se invece $S(t)$ è un vettore di dimensioni

$$S \equiv \nu L^\alpha T^\beta M^r$$

e t è una quantità scalare di dimensioni

$$t \equiv L^{\alpha_1} T^{\beta_1} M^{r_1}$$

risulterà

$$\frac{dS}{dt} \equiv \nu L^{\alpha-\alpha_1} T^{\beta-\beta_1} M^{r-r_1}.$$

Naturalmente se il vettore è anche funzione della variabile u onde $S = S(t, u)$ il limite del rapporto

$$\frac{S(t+h, u) - S(t, u)}{h}$$

per $h = 0$ assume il carattere di derivata parziale e può indicarsi con $\frac{\partial S}{\partial t}$ nel cui concetto non occorre insistere.

Ora anche un punto P dello spazio cartesiano può essere funzione di t ed allora il vettore che si cela sotto il simbolo P risulta funzione non solo dell'origine Q_1 ma anche di t onde dovrà scriversi $P(Q_1, t)$ e per derivata di P rispetto a t dovrà intendersi il limite, per $h = 0$, del rapporto

$$\frac{P(Q_1, t+h) - (P Q_1, t)}{h}.$$

Ma qui il numeratore risulta indipendente da Q , quindi la derivata parziale si potrà scrivere $\frac{dP}{dt}$ tal come P fosse costante rispetto a Q_1 . Quanto alle dimensioni nullo di nuovo che meriti di esser notato. S'intenderanno i differenziali dS , δS , dP , ecc. come i prodotti delle derivate per i rispettivi infinitesimi dt , δt , ecc.

C) Funzioni di un punto.

Avendo definito P come un vettore dipendente dall'origine, definiamo dP come un incremento di P (dalla ν indeterminata ma costante e dal modulo infinitesimo) incremento che, per le nostre proposizioni fondamentali, è un

vettore dalle ν ed L indipendenti dall'origine stessa e perciò suscettibile di esser considerato un vettore libero.

Un vettore geometrico libero \mathbf{u} può ben essere funzione del vettore celato sotto il simbolo P e, contemporaneamente, risultare indipendente dall'origine Q_1 . Ciò ad es. accade quando \mathbf{u} è funzione di un punto cartesiano.

Per non uscire dai confini dell'attuale analisi vettoriale, le cui notazioni si lasciano del resto agevolmente estendere all'analisi tensoriale [8], limitiamo la nostra attenzione a simili categorie di vettori funzioni di P ma non di Q_1 .

Definiamo $d\mathbf{u}$ come l'incremento di \mathbf{u} (vettore di ν costante e dipendente dalla ν indeterminata di dP) per l'incremento indipendente dP della variabile P . Indichiamo con $\frac{d\mathbf{u}}{dP}$ un operatore che applicato all'infinitesimo vettoriale indipendente dP ci restituisca l'infinitesimo vettoriale geometrico semplice $d\mathbf{u}$ corrispondente a dP e che quindi, applicato al vettore \mathbf{a} parallelo a dP , ci dia il vettore

$$\mathbf{b} = \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{a}$$

parallelo a $d\mathbf{u}$, tale che sia

$$\frac{\text{mod } \mathbf{b}}{\text{mod } \mathbf{a}} = \frac{\text{mod } d\mathbf{u}}{\text{mod } dP}.$$

Se \mathbf{a} è un vettore unitario diremo che \mathbf{b} rappresenta la derivata di \mathbf{u} rispetto a P nella direzione ν di \mathbf{a} che ora rimane così anche assegnata come la direzione ν di dP .

L'operatore $\frac{d\mathbf{u}}{dP}$ che trasforma vettori in vettori risulta chiaramente corrispondere ad una delle più semplici categorie di omografie proiettive [9]; a questo operatore, che comunemente si chiama derivata di \mathbf{u} rispetto a P senza alcuna aggiunta che ne determina la direzione e che perciò corrisponde al concetto di derivata generica, si possono ben attribuire le dimensioni formali definite da

$$\frac{d\mathbf{u}}{dP} \equiv \nu^0.$$

Se quindi si ha nelle applicazioni

$$\mathbf{u} \equiv \nu L^\alpha T^\beta M^\gamma,$$

risulterà

$$\frac{d u}{d P} \equiv L^{\alpha-1} T^{\beta} M^{\gamma} .$$

Il simbolo $\frac{d}{d P}$ di derivazione rispetto ad un punto appare finora quello di un operatore atto a trasformare vettori in omografie che restano, naturalmente, dipendenti dalla α di dP . Le dimensioni formali ne appaiono da

$$\frac{d}{d P} \equiv \alpha^{-1} L^{-1} .$$

È facile constatare che tali dimensioni si addicono a $\frac{d}{d P}$ anche quando esso si adopera in seguito alla definizione di derivata di una omografia α di un numero rispetto ad un punto. Infatti se α è una omografia, funzione di un punto dello spazio cartesiano, cioè funzione del vettore P ed indipendente dall'origine Q_1 , ed è

$$(6) \quad b = \alpha a ,$$

si può analogamente a quanto innanzi definire la derivata $\frac{d \alpha}{d P}$ come l'operatore atto a trasformare nell'omografia $\beta = \frac{d \alpha}{d P} c$ un vettore qualsiasi c , nell'istessa guisa che applicato a dP restituisce $d\alpha$ cioè in modo che, qualunque sia v , risulti βv parallelo a $d\alpha v$ e

$$\frac{\text{mod } \beta v}{\text{mod } v} = \frac{\text{mod } d\alpha v}{\text{mod } d P} .$$

Il significato di $d\alpha$ risulta poi chiaro senza bisogno di troppe parole poichè essendo α funzione di P , incrementando P di dP si avrà dalla (6), per a qualunque ma costante,

$$b + d b = (\alpha + d \alpha) a = \alpha a + d \alpha a$$

da cui, per la (6) stessa,

$$d b = d \alpha a$$

cioè $d\alpha$ è l'omografia, si dica pure infinitesima, che applicata ad a fornisce

l'incremento di **b** (omografo di **a** in α) quando α s'incrementa per l'incremento dP di P e rappresenta l'incremento stesso di α .

Da quanto precede risulta che se **b** è un vettore geometrico come **a** deve essere

$$\alpha \equiv v^0$$

$$\frac{d\alpha}{dP} \equiv v^{-1} L^{-1}$$

ed ancora

$$\frac{d}{dP} \equiv v^{-1} L^{-1}$$

come già si è visto una volta.

Trattando il numero come una omografia si ha pure

$$m \equiv v^0$$

$$\frac{dm}{dP} \equiv v^{-1} L^{-1}$$

ed ancora una volta

$$\frac{d}{dP} \equiv v^{-1} L^{-1}.$$

Si noti che l'aver supposto sotto il simbolo P celato un vettore ci ha permesso, con grande vantaggio della semplicità ed analogia con l'analisi infinitesimale numerica, di definire dP come un vettore di modulo infinitesimo laddove altrimenti si sarebbe costretti com'è noto a definire dP come un vettore di modulo finito il che contrasta scomodamente con le nostre abitudini. È questo un altro vantaggio che stimiamo molto sentito.

Quanto all'operatore $\frac{dm}{dP}$ che trasforma vettori in numeri e che perciò non è un'omografia, si dimostra potersi mettere sotto la forma $\text{grad } m \times$, che è sufficiente a definire $\text{grad } m$. Sapendo che $\times \equiv v^{-2}$ deve aversi

$$\text{grad } m \equiv v L^{-1}$$

da cui risulta che $\text{grad } m$ è un vettore ma non geometrico semplice. Se poi, per fare un caso concreto, m rappresenta una pressione, cioè una forza riferita all'unità di superficie, sarà

$$m \equiv L^{-1} T^{-2} M$$

e si avrà

$$\text{grad } m \equiv v L^{-2} T^{-2} M.$$

Supposti noti dallo studio delle trasformazioni lineari il significato dei simboli I_1, I_2, I_3, D, K, C è facile constatare che per tutti si può scrivere $\equiv v^0$ laddove per V si ha $V \equiv v$.

Definiti gli operatori su vettori rot e div con le note formule

$$\text{rot} = 2 V \frac{d}{dP} \quad \text{e} \quad \text{div} = I_1 \frac{d}{dP}$$

si vede subito che è

$$\text{rot} \equiv L^{-1} \quad \text{e} \quad \text{div} \equiv v^{-1} L^{-1}.$$

Passando infine agli operatori differenziali di ordine superiore al primo studiamo le dimensioni da attribuire ai simboli Δ e Δ' dei quali il primo trasforma com'è noto omografie in omografie e numeri in numeri (generalmente un operatore che trasforma omografie in omografie trasforma numeri in omografie) ed il secondo trasforma vettori in vettori (senza essere omografia, giacchè non è, come si ricorda, lineare). Supponendone note le definizioni (che del resto possono anche essere le espressioni che scriveremo subito), possiamo senz'altro ricavare le dimensioni dalle formule

$$\Delta = \text{div grad} \quad ; \quad \Delta' = \text{grad div} - \text{rot rot}$$

da cui, ricordando le dimensioni trovate in precedenza, si ha

$$\Delta \equiv L^{-2} \quad ; \quad \Delta' \equiv L^{-2}.$$

Seguendo il metodo ormai chiaro non si incontrerà difficoltà alcuna nello stabilire le dimensioni di tutte le altre espressioni nonchè degli integrali o delle equazioni differenziali vettoriali.

Ci limitiamo pertanto a condensare quanto precede nella tabella I a proposito della quale ricorderemo soltanto quanto già convenuto e cioè che la eguaglianza dei gradi nelle diverse dimensioni non implica l'omogeneità completa delle relative espressioni simboliche, sì bene la diversità di tali gradi ne implica viceversa l'eterogeneità.

Ad evitare una simile asimmetria occorrerebbe introdurre tante particolari dimensioni quante sono le classi in cui si possono distinguere le dette espressioni, ma ciò apporterebbe una complicazione di cui sembra potersi ben dispensare.

TABELLA I

DENOMINAZIONE	Simboli	Eq. dimens.
vettore geometrico	$v, (u)$	νL
vettore geometrico unitario	u	νL^0
vettore fisico	$a, (u)$	$\nu L^\alpha T^\beta M^\gamma$
vettor-punto	P	νL
prodotto scalare	\times	ν^{-2}
prodotto vettoriale	\wedge	ν^{-1}
operatori	e^{i^0}, i, i^2	ν^0
simboli di derivazione (se t è un numero)	$d/dt, \partial/\partial t$	ν^0
simboli di derivazione (se t è uno scalare per cui $t \equiv L^\alpha T^\beta M^\gamma$)	$d/dt, \partial/\partial t$	$\nu L^{-\alpha} T^{-\beta} M^{-\gamma}$
simbolo di derivazione	d/dP	$\nu^{-1} L^{-1}$
numero reale	m	ν^0
omografia geometrica semplice	α	ν^0
gradiente	grad	νL^{-1}
rotazione	rot	L^{-1}
divergenza	div	$\nu^{-1} L^{-1}$
operatori	I_1, I_2, I_3, D, K, C	ν^0
operatori di Laplace	Δ, Δ'	L^{-2}

5) ESEMPL.

Quantunque in queste pagine non abbiamo certo inteso di far nulla di perfetto o completo ma soltanto di indicare al lettore un metodo ch'egli potrà a suo talento perfezionare, sentiamo tuttavia l'utilità di riportare qualche esempio per invogliarlo a ciò fare.

Cominciamo a considerare dei vettori geometrici e verifichiamo il principio d'omogeneità nella nota formula che dà la componente c del vettore b nella direzione assegnata mediante il vettore unitario a .

$$c = a \times b \cdot a.$$

Essendo $c \equiv \nu L$; $a \equiv \nu$; $b \equiv \nu L$ abbiamo al primo membro la dimensione νL ed al secondo $\nu \cdot \nu^{-2} \cdot \nu L \cdot \nu$ come al primo.

Facciamo lo stesso per l'importantissima formula

$$(a \wedge b) \wedge c = c \times a \cdot b - c \times b \cdot a$$

della quale esistono numerose dimostrazioni tra cui ci piace ricordare quella semplice e concisa di E. MOHR [9].

Poichè \mathbf{a} , \mathbf{b} , $\mathbf{c} \equiv \nu L$ sostituendo a ciascun simbolo la sua dimensione abbiamo al primo membro

$$\nu L \cdot \nu^{-1} \cdot \nu L \cdot \nu^{-1} \cdot \nu L \equiv \nu L^3.$$

e per ciascun termine del secondo

$$\nu L \cdot \nu^{-2} \cdot \nu L \cdot \nu L \equiv \nu L^3.$$

Prendiamo ancora in esame la nota espressione del teorema di GREEN

$$4 \pi u_0 = \int \left(u \operatorname{grad} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{grad} u \right) \times \mathbf{n} d\sigma - \int \frac{1}{r} \Delta u d\tau$$

in cui:

— u è un numero finito funzione del punto P e quindi

$$u \equiv \nu^0$$

— u_0 è il valore di u in un punto O interno al campo $d\tau$ e quindi

$$u_0 \equiv \nu^0$$

— r è la distanza di P da O e quindi

$$r \equiv L$$

— \mathbf{n} è un vettore unitario e quindi

$$\mathbf{n} \equiv \nu$$

— $d\sigma$ è una superficie e quindi

$$d\sigma \equiv L^2.$$

— $d\tau$ un volume e quindi

$$d\tau \equiv L^3.$$

Al primo membro si ha dunque ν^0 ed al secondo, sotto integrale,

$$u \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{n} d\sigma \equiv \nu^0 \cdot \nu L^{-1} \cdot L^{-1} \cdot \nu^{-2} \cdot \nu \cdot L^2 = \nu^0;$$

$$\frac{1}{r} \operatorname{grad} u \times n \, d\sigma \equiv L^{-1} \cdot v \, L^{-1} \cdot v^{-2} \cdot v \cdot L^2 \equiv v^0 ;$$

$$\frac{1}{r} \Delta u \, d\tau \equiv L^{-1} \cdot L^{-2} \cdot v^0 \cdot L^3 \equiv v^0 .$$

Passiamo ora a qualche caso d'applicazione, per es., all'idrodinamica. Per il postulato della statica che vuole l'equilibrio sussistente anche se un certo volume τ di fluido contornato dalla superficie σ si suppone irrigidito dev'essere

$$\int \delta \mathbf{F} \, d\tau + \int p \mathbf{n} \, d\sigma = 0$$

in cui:

— \mathbf{n} è un vettore unitario (normale a $d\sigma$ e volto verso l'interno di τ) e quindi

$$\mathbf{n} \equiv v$$

— δ è la densità (scalare) e quindi

$$\delta \equiv M \, L^{-3}$$

— \mathbf{F} è il vettore forza riferito all'unità di massa e quindi

$$\mathbf{F} \equiv v \cdot L \, T^{-2}$$

— p è la pressione (scalare) cioè la forza per unità di superficie (in realtà $\frac{\mathbf{F} \times \mathbf{n}}{d\sigma}$) e quindi

$$p \equiv M \, T^{-2} \, L^{-1} .$$

Essendo $d\sigma = L^2$ e $d\tau = L^3$ si ha dunque

$$\int \delta \mathbf{F} \, d\tau \equiv M \, L^{-3} \cdot v \, L \, T^{-2} \cdot L^3 \equiv v \, M \, L \, T^{-2}$$

e

$$\int p \mathbf{n} \, d\sigma \equiv M \, T^{-2} \, L^{-1} \cdot v \cdot L^2 \equiv v \, M \, L \, T^{-2} .$$

Nello stesso argomento una delle forme dell'equazione del moto è

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 + (\operatorname{rot} v) \wedge v = \mathbf{F} - \frac{1}{\delta} \operatorname{grad} p .$$

in cui \mathbf{v} è la velocità onde

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} L T^{-1}.$$

Si ha dunque

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \equiv \mathbf{v}^0 T^{-1} \cdot \mathbf{v} L T^{-1} \equiv \mathbf{v} L T^{-2};$$

$$\frac{1}{2} \text{grad } \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} \text{grad} (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) \equiv \mathbf{v} L^{-1} \cdot \mathbf{v} L T^{-1} \cdot \mathbf{v} L T^{-1} \equiv \mathbf{v} L T^{-2};$$

$$(\text{rot } \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} \equiv L^{-1} \cdot \mathbf{v} L T^{-1} \cdot \mathbf{v}^{-1} \cdot \mathbf{v} L T^{-1} \equiv \mathbf{v} L T^{-2};$$

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{v} M L T^{-2} \cdot M^{-1} \equiv \mathbf{v} L T^{-2};$$

$$\frac{1}{\delta} \text{grad } p \equiv M^{-1} L^3 \cdot \mathbf{v} L^{-1} \cdot M T^{-2} L^{-1} \equiv \mathbf{v} L T^{-2}.$$

Sarebbe molto facile seguitare a portare esempi prendendo in esame le equazioni di MAXWELL-HERTZ dell'elettrodinamica dei corpi a riposo, il teorema di POYTING, le formule di BETTI per la divergenza e la rotazione dello spostamento nell'equilibrio dei corpi elastici isotropi, ecc., ma crediamo sufficienti allo scopo che ci siamo prefissi i pochi esempi che abbiamo sviluppato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BURALI-FORTI C., MARCOLONGO R. *Elementi di Calcolo Vettoriale*. Bologna, Zanichelli. *Analyse vectorielle générale*. Pavia, Mattei.
- [2] SCHLEGELMICH W. *Die Differentialoperationen der Vektoranalysis und ihre Bedeutung in Physik und Technik*. Berlino, Technik, 1954.
- [3] PISTOLESI E. *Omogeneità, similitudine, modelli. Fondamenti teorici*. Atti del II convegno di mat. appl. - Questioni di matem. appl. Bologna, Zanichelli, pag. 23.
- [4] STRANEO P. *Teoria generale delle dimensioni fisiche*. Cap. XLI della Enc. mat. elem. Vol. III, Parte I, Milano, Hoepli, 1947, pag. 60.
- [5] DUGAS R. *Histoire de la Mécanique*. Parigi, Dunod, 1950, pagg. 434, 436 e 437.
- [6] LOHR E. *Vektor- und Dyadenrechnung für Physiker u. Techniker*. Berlino, De Gruyter, 1950, pag. 5.
- [7] BURGATTI P. *Elementi di calcolo vettoriale ed omografico*. Milano, Hoepli, 1937, pag. 449.
- [8] POWELL F. C. *A notation for vectors and tensors*. Proc. Camb. philos. Soc., 1955, pag. 449.
- [9] MOHR E. *Beweis einer Vektorformel*. Z.A.M.M., 1951, pag. 155.

RIASSUNTO. — Dopo aver fatto rilevare che le operazioni vettoriali, comportando passaggi da una classe di enti ad altre, introducono assai spesso concetti non molto consueti per quanto riguarda l'analisi dimensionale, l'A. formula alcune proposizioni fondamentali atte a verificare, nel modo più semplice ed esteso possibile, il principio di omogeneità o d'invarianza nelle espressioni in cui entrano grandezze fornite di direzione e senso. Dette proposizioni gli consentono di rintracciare agevolmente le equazioni dimensionali dei principali enti ed operatori vettoriali che vengono poi raccolte sinteticamente in apposita tabella. Attraverso gli esempi riportati in chiusura resta visualizzata l'efficacia del metodo proposto e l'utilità che da esso può derivarne.

SUMMARY. — It is well known that vectorial operations, which cause changes from a class of operators to another, very often introduce unusual ideas concerning the dimensional analysis. That is way the Author shows some basic propositions apt to verify as simply widely as possible, the homogeneity or invariability principle in the expressions in which quantities furnished with direction and sense appear. So called propositions allow him to find easily the dimensional equations of the main vectorial operators which are tabulated sintetically. Trough the examples reported at the end it is evident the efficacy of the proposed method and the utility which can come out from it.

Una osservazione sopra un teorema di alternativa in algebra.

*Nota del prof. Giovanni Aquaro
presentata dal socio corrispondente Carlo Ciliberto*

(Adunanza del dì 3 giugno 1961)

INTRODUZIONE. Un ben noto teorema dell'alternativa per equazioni lineari in spazii vettoriali (cfr. la seg. prop. 3) viene generalizzato nella presente nota (prop. 2), sotto opportune condizioni, ad equazioni lineari in A -moduli sopra l'anello A .

1. — Si precisano in questo n. 1 le notazioni e le convenzioni adoperate nel seg. n. 2.

In tutto il seguito A è un anello non necessariamente commutativo nè dotato di unità; tutti gli A -moduli considerati sono A -moduli a sinistra salvo esplicita menzione del contrario (ogni referenza a [1] e [2]).

Se X e Y sono A -moduli, con $\text{Hom}(X, Y)$ si indica il gruppo abeliano degli omomorfismi (= applicazioni lineari) dell' A -modulo X nell' A -modulo Y .

Se G è un ulteriore A -modulo e se f è un elemento di $\text{Hom}(X, Y)$ con f_G si indica l'omomorfismo del gruppo abeliano $\text{Hom}(Y, G)$ nel gruppo abeliano $H(X, G)$, indotto da f cioè, per ogni $h \in \text{Hom}(Y, G)$, si pone $f_G(h) = h \circ f$.

Considerato A come A -modulo (a sinistra) in modo canonico, poniamo $X^* = \text{Hom}(X, A)$ per ogni A -modulo X : volendo, il gruppo abeliano X^* può essere munito di una struttura di A -modulo a destra in modo canonico e con essa X^* diviene l' A -modulo duale di X .

Se nella precedente definizione di omomorfismo indotto f_G , si suppone $G = A$, f_G diviene l'omomorfismo γ_f trasporto di f .

2. — I seguenti lemmi 1 e 2 sono sostanzialmente noti e di essi forniamo possibili dimostrazioni per comodità del lettore. In ciascuno di essi G è un A -modulo fissato.

Lemma 1 — *Se X e Y sono A moduli e se f è un omomorfismo dell' A -modulo X nell' A -modulo Y , il nucleo $\text{Ker}(f_G)$ dell'omomorfismo f_G di $\text{Hom}(Y, G)$ in $H(X, G)$ indotto da f (cfr. n. 1) è identico all'insieme degli $h \in \text{Hom}(Y, G)$ tali che $h(f(X)) = \{0\}$.*

Dim. — Sia $h \in \text{Ker}(f_G)$: risulta $h \in \text{Hom}(Y, G)$ e $0 = f_G(h) = h \circ f$ donde $h(f(X)) = \{0\}$ e reciprocamente.

Corollario. — Se nelle ipotesi e con le notazioni del lemma 1, l'omomorfismo f è surgettivo, l'omomorfismo f_G indotto da f è iniettivo.

Dim. — Poichè è $f(X) = Y$ l'unico $h \in \text{Hom}(Y, G)$ tale che $h(f(X)) = \{0\}$ risulta $h = 0$: quindi, per il lemma 1, è $\text{Ker}(f_G) = 0$.

Lemma 2. — Se f è un omomorfismo surgettivo dell' A -modulo X sull' A -modulo Y , per un $h \in \text{Hom}(X, G)$ le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) — risulta $\bar{h}(f(0)) = \{0\}$,

b) — esiste un $k \in \text{Hom}(Y, G)$ tale che $k \circ f = h$.

Dim. — Supponiamo vera la a). In conseguenza h induce un omomorfismo h_* dell' A -modulo quoziente $\bar{X}/f(0)$ in G tale che detto s l'omomorfismo (surgettivo) canonico di X su $\bar{X}/f(0)$, risulti:

$$1) \quad h_* \circ s = h$$

D'altra parte, essendo $\bar{f}(f(0)) = \{0\}$ e $f(X) = Y$, f induce un isomorfismo f_* di $\bar{X}/f(0)$ su Y tale che:

$$(2) \quad f_* \circ s = f$$

Sia g l'isomorfismo di Y su $\bar{X}/f(0)$ inverso di f_*^{-1} . Posto $k = h_* \circ g$, risulta $k \in \text{Hom}(Y, G)$ e, tenute presenti (1) e (2), si ha $k \circ f = h_* \circ g \circ f = h_* \circ s = h$ e da ciò consegue b).

Reciprocamente, supposta vera la b), risulta $\bar{h}(f(0)) = k(\bar{f}(f(0))) = k(\{0\}) = \{0\}$.

Ciò premesso conviene introdurre una definizione:

Def. 1. — Se X^* è l' A -modulo duale dell' A -modulo X (cfr. n. 1), una parte V di X^* si dice totale se da $x \in X$ e da $h(x) = 0$ per ogni $h \in V$, consegue $x = 0$.

Osservazione. — Se A è dotato di unità e X è un A -modulo unitario libero, X^* è totale (come risulta p. es. da [2] § 1, n. 8, prop. 9).

La seguente proposizione non sembra segnalata altrove:

¹⁾ Si tenga presente che f^* e g sono isomorfismi di A -moduli.

Prop. 1. — Supponiamo che f sia un omomorfismo dell' A -modulo X nell' A -modulo Y e supponiamo che esista un omomorfismo g di Y in un A -modulo Z tale che Z^* sia totale (def. 1) e tale che la successione

$$X \rightarrow Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$$

sia esatta (cioè $f(X) = g^{-1}(0)$, $g(Y) = Z$).

Allora, detto φ l'omomorfismo di Y^* in X^* trasposto di f le seguenti due proposizioni sono equivalenti per un $y_0 \in Y$:

- a) — risulta $y_0 \in f(X)$ (cioè l'equazione $f(x) = y_0$ è risolubile in x),
- b) — per ogni $h \in \text{Ker}(\varphi)$ risulta $h(y_0) = 0$.

Dim. — a) implica b). Sia vera la a) e sia $y_0 \in f(X)$: per il lemma 1, da $h \in \text{Ker}(\varphi)$ consegue $h(y_0) \in h(f(X)) = \{0\}$ e da ciò la b).

b) implica a). Sia vera la b).

Osserviamo preliminarmente che, per il lemma 1, risulta $h \in \text{Ker}(\varphi)$ se e solo se è $h \in Y^*$ e $h(f(X)) = \{0\}$: ma, essendo $f(X) = g^{-1}(0)$, per il lemma 2, risulta $h \in Y^*$ e $h(f(X)) = \{0\}$ se e solo se esiste $k \in Z^*$ tale che $h = k \circ g$.

Per ciò, se per ogni $h \in \text{Ker}(\varphi)$ si ha $h(y_0) = 0$, per ogni $k \in Z^*$ risulta $k(g(y_0)) = 0$ e poichè Z^* , per ipotesi, è totale (def. 1) consegue $g(y_0) = 0$ e quindi $y_0 \in g^{-1}(0) = f(X)$. Da ciò la a).

Indichiamo ora il teorema dell'alternativa.

Prop. 2. — Nelle ipotesi e con le notazioni della prop. 1, risulta che:

a) — o l'equazione $f(x) = y_0$ ha soluzioni per ogni $y_0 \in Y$, e ciò si verifica se e solo se $\text{Ker}(\varphi) = 0$ cioè se l'equazione $\varphi(h) = 0$ ha l'unica soluzione $h = 0$,

b) — oppure la $f(x) = y_0$ non ha soluzioni per ogni $y_0 \in Y$ ed allora per un $y_0 \in Y$, affinché $f(x) = y_0$ abbia soluzione occorre e basta che per ogni $h \in Y^*$ tale che $\varphi(h) = 0$, sia $h(y_0) = 0$.

Dim. — Supponiamo che l'equazione $f(x) = y_0$ abbia soluzioni per ogni $y_0 \in Y$. Allora è $f(X) = Y$ e questo, per il corollario al lemma 1, comporta $\text{Ker}(\varphi) = 0$. Reciprocamente, se da $h \in \text{Ker}(\varphi)$ consegue $h = 0$ allora, per la prop. 1, la $f(x) = y_0$ ha soluzioni per ogni $y_0 \in Y$. Dunque è vera la a).

La b) consegue dalla prop. 1.

3. — Se A è un corpo, se X e Y sono spazi vettoriali su A e se f è una applicazione lineare (omomorfismo) di X in Y , allora $f(X)$ è un sottospazio vettoriale di Y e, detta g l'applicazione lineare (surgettiva) canonica di Y sopra lo spazio vettoriale $Z = Y/f(X)$, la successione $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ è esatta. Inoltre, Z , come ogni spazio vettoriale, è dotato di base libera e quindi, per l'osservazione alla def. 1, Z^* è totale.

Pertanto si ritrova il ben noto teorema dell'alternativa per equazioni lineari in spazi vettoriali ([2] cap. II, § 4, n. 9, teor. 3).

Prop. 3. — Se f è un'applicazione lineare dello spazio vettoriale X nello spazio vettoriale Y (sullo stesso corpo di scalari) si ha che:

a) — o l'equazione $f(x) = y_0$ ha soluzioni per ogni $y_0 \in B$ e ciò accade se e solo se l'equazione trasposta omogenea $\forall(h)=0$ ha la sola soluzione $h=0$,

b) — oppure, la $f(x)=y_0$ non ha soluzioni per qualche $y_0 \in Y$ ed allora se è $y_0 \in Y$ l'equazione $f(x) = y_0$ ha soluzioni se e solo se, per ogni $h \in Y^*$ tale che $\forall(h) = 0$, risulti $h(y_0) = 0$.

Si osservi che se Y è finitamente generato anche Z è finitamente generato e quindi la dimostrazione dell'esistenza di una base libera si può effettuare senza l'uso del lemma di Zorn ([2] § 3, n. 1, teor. 2, remarque).

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOURBAKI N.: *Algèbre*; Actual. Scient. et Ind., 934-1144, HERMANN e Co., Paris, (1951).
- [2] BOURBAKI N.: *Algèbre*; Actual. Scient. et Ind. 1032, HERMANN e Co, Paris, (1947).

RIASSUNTO. — Un ben noto teorema dell'alternativa per equazioni lineari in spazi vettoriali viene dedotto da un analogo teorema di alternativa, qui stabilito, per equazioni lineari in A-moduli sopra l'anello A.

SUMMARY. — A well-known theorem of alternative for linear equations in vector-spaces is deduced from an analogue theorem, here established, for linear equations in A-moduli over the ring of scalars A.

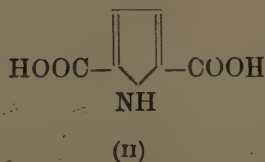
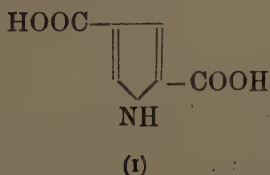
Identificazione degli acidi 2,4-pirroldicarbonico e 2,5-pirroldicarbonico tra i prodotti di ossidazione della sepiomelanina decarbossilata.^{*)}

*Nota dei dr. Mario Piattelli, Ernesto Fattorusso, Silvana Magno
e del socio corrispondente Rodolfo Alessandro Nicolaus*

(Adunanza del dì 3 giugno 1961)

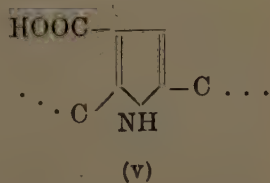
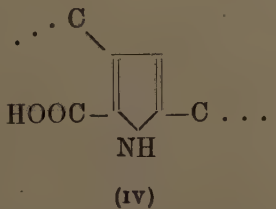
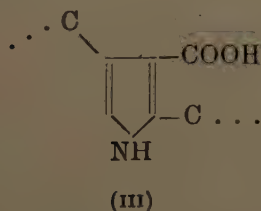
È stato precedentemente dimostrato [1] che la sepiomelanina decarbossilata termicamente dà per ossidazione permanganica rese inferiori di acido 2,3,5-pirroltricarbonico e superiori di acido 2,3-pirroldicarbonico rispetto al pigmento non decarbossilato. Tale risultato è stato interpretato ammettendo che almeno parte dei gruppi carbossilici presenti nella sepiomelanina occupino la posizione 2 del nucleo indolchinonico; non si poteva tuttavia escludere la presenza di altri carbossili diversamente situati nel polimero.

Ciò appare confermato da ulteriori ricerche sull'ossidazione della sepiomelanina decarbossilata: accanto agli acidi pirrolici suddetti si sono identificati gli acidi 2,4-pirroldicarbonico (I) e 2,5-pirroldicarbonico (II)



mediante cromatografia su carta e su strato sottile di gel di silice. Tali acidi non si ritrovano invece tra i prodotti di ossidazione del pigmento non sottoposto all'azione del calore (ad esempio, se si purifica a freddo la melanina).

L'ottenimento di questi composti induce ad ammettere la presenza nella sepiomelanina di unità dei tipi seguenti:



^{*)} Questo lavoro è stato eseguito con il contributo del National Cancer Institute, research Grant C. 5220, Public Health Service, U.S.A.

Unità del tipo (III) sono da ritenere poco probabili non essendosi finora ottenuto per ossidazione della sepiomelanina l'acido 2,3,4-pirroiltricarbonico; più probabilmente si tratta di unità dei tipi (IV) e (V) che darebbero luogo, per degradazione ossidativa, alla formazione di acido 2,3,5-pirroiltricarbonico e dopo decarbossilazione del pigmento e successiva ossidazione, agli acidi (I) e (II). Non è da escludere che anche quelle unità che per ossidazione danno luogo alla formazione di acido 2,3,4,5-pirroiltetracarbonico [2] diano, previa decarbossilazione della sepiomelanina, gli acidi (I) e (II).

Unità dei tipi suddetti possono originarsi per demolizione della parte benzenoide di nuclei indolchinionici nel corso della melanogenesi [3].

Non è possibile per il momento precisare se tali unità siano in numero rilevante, né se esse partecipino con i nuclei indolchinionici alla costituzione di un unico polimero o se la sepiomelanina sia una miscela di polimeri a struttura indolica ed a struttura pirrolica; quest'ultima ipotesi sembra comunque poco probabile, poichè nei liquidi enzimatici, ove avviene il processo melanogenetico, non sono stati trovati frammenti pirrolici.

PARTE SPERIMENTALE.

200 mg di sepiomelanina decarbossilata vengono ossidati come descritto in precedenza [1] e la soluzione acquosa contenente gli acidi pirrolici viene esaminata cromatograficamente sia su carta che su strato sottile di gel di silice (figg. 1, 2, 3). Rivelatore DZA.

Dalle cromatografie chiaramente risulta la presenza degli acidi (I) e (II).

Napoli, Istituto di Chimica Organica dell'Università, giugno 1961.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. PIATTELLI e R. A. NICOLAUS. *The Structure of Melanins and Melanogenesis. I. The structure of Melanin in Sepia*. Tetrahedron (in corso di stampa).
- [2] R. A. NICOLAUS, A. VITALE e M. PIATTELLI. *Acido 2,3,4,5-pirroiltetracarbonico nella ossidazione della melanina di Seppia*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., s. 4^a, **25**, 220 (1958).
- [3] R. J. S. BEER, T. BROADHURST e A. ROBERTSON. *The Chemistry of the Melanins. Part. V. The Autoxidation of 5,6-Dihydroxyindole*. J. Chem. Soc., 1947 (1954).
G. A. SWAN e D. WRIGHT. *A Study of the Evolution of Carbon Dioxide during Melanin Formation, including the use of 2-(3:4-Dihydroxyphenyl) [1-¹⁴C]- and 2-(3:4-Dihydroxyphenyl) [2-¹⁴C]-ethylamine*. J. Chem. Soc., 381 (1954).

RIASSUNTO. — Si descrive l'identificazione degli acidi 2,4-pirroldicarbonico e 2,5-pirroldicarbonico tra i prodotti di ossidazione permanganica della sepiomelanina decarbossilata.

Si discute brevemente sul significato di tale identificazione in relazione alla struttura della sepiomelanina.

SUMMARY. — Identification, by chromatography on paper and on chromatoplates, of 2,4-pyrroledicarboxylic acid and 2,5-pyrroledicarboxylic acid among the oxidation products of decarboxylated sepiomelanin is described.

Possible significance of these acids in relation to the structure of sepiomelanin is briefly discussed.

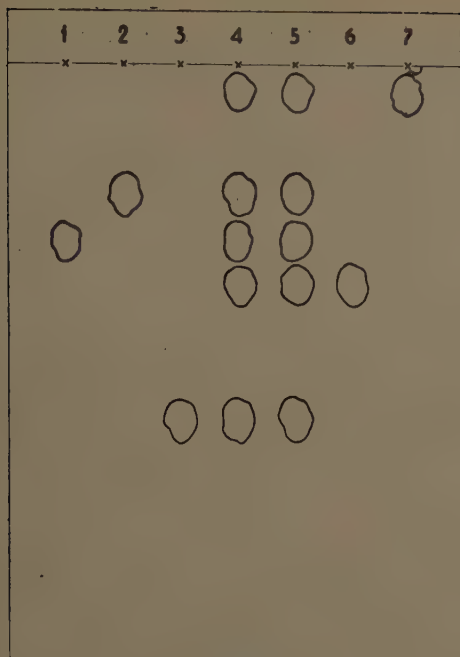


Fig. 1. — Cromatografia su carta (etanolo-ammoniaca-acqua 80 : 4 : 16).

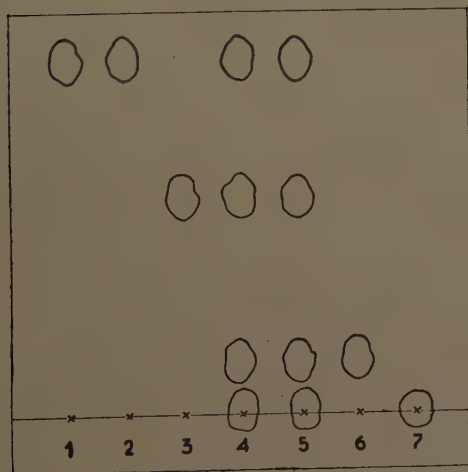


Fig. 3. — Cromatografia su strato sottile (benzolo-acido acetico 50:50).

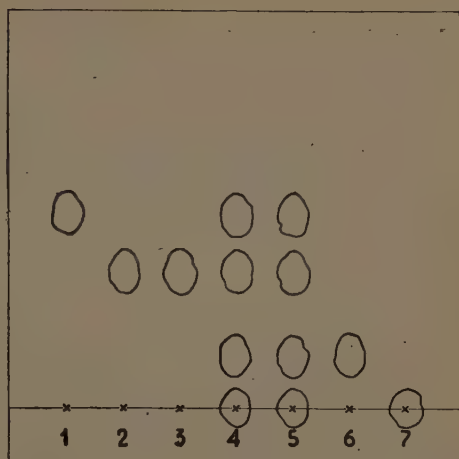


Fig. 2. — Cromatografia su strato sottile (cloroformio-acido formico 80:20).

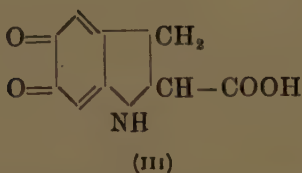
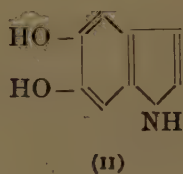
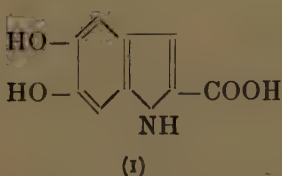
- 1) ac. 2,5-pirroldicarbonico
- 2) ac. 2,4-pirroldicarbonico
- 3) ac. 2,3-pirroldicarbonico
- 4) prodotti di ossidazione della sepiomelanina decarbossilata
- 5) prodotti di ossidazione della sepiomelanina decarbossilata più gli acidi 1) e 2)
- 6) ac. 2,3,5-pirroltricarbonico
- 7) ac. 2,3,4,5-piroltetricarbonico

Identificazione del 5,6-diossindolo nell'ossidazione enzimatica della dopa. (*)

*Nota dei dott. Mario Piattelli, Ernesto Fattorusso e Silvana Magno
presentata dal socio corrispondente R. A. Nicolaus*

(Adunanza del dì 3 giugno 1961)

È noto che nel corso dell'ossidazione della 3,4-diidrossifenilalanina (dopa) in presenza di tirosinasi si forma un pigmento rosso che, in assenza di ossigeno e di enzima, può dare per trasposizione l'acido 5,6-diossindol-2-carbossilico (I) e per contemporanea decarbossilazione il 5,6-diossindolo (II) [1].



Al pigmento rosso è stata attribuita su questa base la struttura di 2-carbossi-2,3-diidroindol-5,6-chinone (III) (dopacromo) e si è supposto [2] che nelle normali condizioni di azione dell'enzima il 5,6-diossindolo sia il prodotto principale e debba essere considerato come il precursore della melanina.

In effetti né il 5,6-diossindolo né l'acido 5,6-diossindol-2-carbossilico vennero mai isolati come tali, ma solo in forma di eteri metilici e in condizioni (metilazione in soluzione fortemente alcalina) che fanno dubitare della loro reale formazione durante l'ossidazione enzimatica della dopa, data la facilità con cui i 2,3-diidroindol-5,6-chinoni si traspongono, ad elevati valori del pH, a 5,6-diossindoli [3].

Si deve anche notare che i suddetti eteri metilici non vennero isolati direttamente nel corso dell'ossidazione enzimatica, ma solo dopo che la solu-

*) Questo lavoro è stato eseguito con il contributo del National Cancer Institute, research Grant C. 5220, Public Health Service, U.S.A.

zione contenente il pigmento rosso era stata tenuta in ambiente di idrogeno ed in assenza di enzima fino a decolorazione.

La trasposizione del dopacromo a 5,6-diossindolo sembra confermata più recentemente da dati spettrofotometrici [4], benchè sia lecito avanzare qualche riserva sull'interpretazione di spettri di soluzioni così complesse.

Per queste ragioni si è ritenuto opportuno dimostrare sulla base di più sicure prove la formazione del 5,6-diossindolo durante l'ossidazione enzimatica della dopa, in condizioni sperimentali tali da non lasciare adito a dubbi.

A tale scopo la dopa è stata ossidata a pH 6,8 in presenza di tirosinasi e, prima dell'inizio della formazione di melanina, il liquido è stato estratto con etere sia direttamente sia dopo acidificazione con acido acetico.

In entrambi i casi nell'estratto eterico si è provata cromatograficamente la presenza di 5,6-diossindolo, che sembra essere l'unico intermedio della melanogenesi sufficientemente solubile in etere.

PARTE SPERIMENTALE.

Ad una soluzione di 25 mg di dopa in 35 cc di tampone di fosfati M/20 a pH 6,8 venne aggiunta una soluzione di tirosinasi di fungo (350 U.) in 1 cc di acqua. Attraverso il liquido, tenuto a circa 35°C, si è fatta passare una rapida corrente di aria; dopo 15' la soluzione fortemente colorata in rosso è stata estratta due volte con 5 cc di etere esente da perossidi.

L'estratto eterico, seccato su Na_2SO_4 in presenza di una piccola quantità di $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_4$ e concentrato sotto vuoto a piccolo volume, è stato impiegato per l'esecuzione di cromatografie in parallelo ed in miscela con 5,6-diossindolo (preparato secondo BEER et al. [5]) sia su carta che su strato sottile.

Le cromatografie su carta sono state eseguite con tecnica discendente (carta Whatman N. 1; fase mobile butanolo-acido acetico-acqua 60:15:25; R_f del 5,6-diossindolo = 0,7).

Le cromatografie su strato sottile di gel di silice sono state eseguite impiegando come eluente la miscela acetato di etile-acido formico (50:50; R_f del 5,6-diossindolo = 0,8) e quella cloroformio-acido formico (80:20; R_f = 0,75).

I cromatogrammi sono stati visualizzati con acido solfanilico diazotato (in soluzione acida macchia rosso-viola), con soluzione alcolica di cloruro ferrico (verde-blu), con nitrato di argento (bruno-nero) e con idrossido di sodio (nero).

In tutti i cromatogrammi l'estratto eterico ha dato una sola macchia identica per R_f e reazioni cromatiche a quella del 5,6-diossindolo di sintesi.

Gli stessi risultati si sono ottenuti effettuando l'estrazione con etere dopo acidificazione con acido acetico; in entrambi i casi non è stato possibile evidenziare con i reattivi suddetti alcun altro prodotto oltre il 5,6-diossindolo.

Napoli, Istituto di Chimica Organica dell'Università, giugno 1961.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. S. RAPER. *The tyrosinase-tyrosine reaction. VI. Production from tyrosine of 5,6-dihydroxyindole and 5,6-dihydroxyindole-2-carboxylic acid. The precursors of melanin.* Biochem. J., **21**, 89 (1927).
- [2] H. S. RAPER. *The aerobic oxidase.* Physiol. Rev., **8**, 245 (1928).
- [3] P. FISCHER e J. LECOMTE. *Métabolisme de l'adrénochrome, de ses produits de réduction et du trihydroxy-N-méthylindol chez le lapin, le chat et le chien.* Bull. Soc. Chim. Biol., **33**, 569 (1951).
- [4] H. S. MASON. *The chemistry of melanin. III. Mechanism of the oxidation of dihydroxyphenylalanine by tyrosinase.* J. Biol. Chem., **172**, 83 (1948).
- [5] R. J. S. BEER, K. CLARKE, H. G. KHORANA e A. ROBERTSON. *Chemistry of melanin. I. Synthesis of 5,6-dihydroxyindole and related compounds.* J. Chem. Soc., 223 (1948).

RIASSUNTO. — Viene dimostrata cromatograficamente la formazione di 5,6-dirossindolo durante l'ossidazione enzimatica della 3,4-diidrossifenilalanina.

SUMMARY. — 5,6-Dihydroxyindole (II), which is supposed to be an important intermediate of melanogenesis *in vitro*, was never isolated from the solutions where tyrosinase reacts on dopa or tyrosine. Raper succeeded in obtaining the dimethyl ether of (II) by a rather complex series of reactions.

5,6-Dihydroxyindole has been now identified in the ether extracts from solutions of enzymatic oxidation of dopa at pH 6,8 by chromatography on paper and on chromatoplates.

Identification was performed by comparison with an authentic specimen of 5,6-dihydroxyindole using several solvents. Spraying reagents for (II) are suggested.

Consequences of this new method for identification of (II) will be discussed in a next paper.

Ricerche sulla zeolitizzazione dei vetri vulcanici per trattamento idrotermale.

Nota VIII. Zeolitizzazione di ossidiane trachi-andesitiche artificiali

Nota del prof. Riccardo Sersale, presentata dal socio ord. G. Malquori.

(Adunanza del dì 6 maggio 1961)

Ad integrazione delle precedenti ricerche ¹⁾ eseguite con lo scopo di studiare il comportamento di vetri vulcanici di differente tipo mineralogico e chimico allorchè sottoposti ad azioni idrotermali in condizioni normalizzate, ho creduto necessario non tralasciare lo studio del comportamento di un campione di vetro *trachi-andesitico*. Tale tipo di vetro, nella serie di quelli, più significativi, da me studiati, viene infatti a collocarsi fra il vetro *alcali-trachitico* ²⁾, del quale è più basico, e quello *basaltico* ³⁾, del quale è più acido, fra due termini, cioè, per i quali ho riscontrato, in identiche condizioni di cimento, notevoli diversità di comportamento. Tali diversità mi hanno indotto ad estendere le indagini ad un termine intermedio ed ho appunto scelto il vetro *trachi-andesitico*.

La documentazione, poi, relativa a due termini ricavati per fusione e tempra di rocce francamente alcaline: il vetro *leuco-fonolitico*, meno basico di quello *leucotefritico* ⁴⁾ da me già studiato, e quello *leucititico*, più basico di quest'ultimo, costituirà oggetto delle due note successive, le quali chiuderanno questo gruppo di ricerche che, come non ho mancato di sottolineare, hanno inteso porre in risalto:

¹⁾ SERSALE R. *Ricerche sulla zeolitizzazione dei vetri vulcanici per trattamento idrotermale*. Nota I. *Herschelite da vetro ricavato attraverso la fusione di roccia eminentemente sanidinicica*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., [4], XXVI, pp. 15-21. Napoli, 1959. Nota II. *Zeolitizzazione di ossidiane leucotefritiche artificiali*. Ibidem, [4], XXVI, pp. 154-166. Napoli, 1959. - Nota III. *Analcimizzazione di ossidiane basaltiche artificiali*. Ibidem, [4], XXVI, pp. 333-344. Napoli, 1959. - Nota IV. *Analcimizzazione di materiali piroclastici, alcalitrachitici*. Ibidem, [4], XXVI, pp. 345-354. Napoli, 1959. - Nota V. *Analcimizzazione di un'ossidiana artificiale, ricavata attraverso la fusione dell'häüynofiro di Melfi*. Ibidem, [4], XXVI, pp. 394-404. Napoli, 1959. - Nota VI. *Zeolitizzazione delle pomici e, delle « pozzolane » del Vesuvio*. Ibidem, [4], XXVI, pp. 423-440. Napoli, 1959. - Nota VII. *Analcimizzazione di ossidiane riolitiche*. Ibidem, [4], XXVII, pp. 595-609. Napoli, 1960.

²⁾ SERSALE R. L. c. a nota ¹⁾, Note I e IV.

³⁾ SERSALE R. L. c. a nota ¹⁾, Nota III.

⁴⁾ SERSALE R. L. c. a nota ¹⁾, Nota II.

a) l'influenza della composizione chimica del vetro di partenza sul decorso del processo di zeolitizzazione;

b) l'individuazione, con sufficiente approssimazione, dei limiti entro cui devono esser contenute le variazioni di composizione chimica del materiale di partenza, per poter riscontrare, nelle medesime condizioni sperimentali, similitudine di comportamento;

c) la precisazione, per ogni singolo tipo di vetro, della fascia di temperature e di pressioni entro la quale possono muoversi i fattori fisici che regolano il trattamento di zeolitizzazione;

d) la caratterizzazione dei differenti prodotti di reazione che prendono origine per regolazione dei fattori fisici su valori non compresi entro tale fascia.

Com'è noto ⁵⁾, sotto il nome di *andesiti* vanno quelle rocce neo-vulcaniche caratterizzate dalla prevalenza, fra i componenti essenziali, di un plagioclasio sodico-calcico e dalla presenza di elementi *femici* più o meno abbondanti, in dipendenza del termine preso in considerazione.

Abbastanza comuni sono poi le forme più alcaline rappresentate dai termini di passaggio tra la serie alcali-calcica e la serie alcalina, denominate appunto: *trachiandesiti*.

Il campione cui la sperimentazione si riferisce viene comunemente designato con il nome di *ciminite*, data la diffusione della roccia in oggetto nei Monti Cimini (dintorni di Viterbo) ed è stato appunto prelevato dal prof. SCHERILLO e dallo scrivente dalle formazioni nei pressi di Soriano nel Cimino, lungo la panoramica che conduce da Vignanello a Viterbo.

Il campione è stato in primo luogo sottoposto ad analisi chimica e ad indagine ottica, per controllare con esattezza i suoi caratteri costituzionali, prima di procederne alla fusione, per ricavare il corrispondente prodotto vetroso richiesto per le indagini.

L'analisi chimica compare in tab. I. I dati analitici risultano in buon accordo con quelli che la letteratura ⁶⁾ fornisce per rocce del medesimo tipo.

I risultati delle osservazioni ottiche sono riportati in tav. I e pongono in risalto i costituenti essenziali della roccia di cui ci si è serviti. Essa infatti consta di una pasta fondamentale, nella quale sono immersi cristalli: di plagioclasio e di biotite (microfotografia n° 1), di biotite, dal caratteristico contorno esagonale (microfotografia n° 2), di pirosseno (microfotografia n° 3) e di olivina (microfotografia n° 4). La microfotografia n° 5 riproduce ancora un cristallo di plagioclasio, e quella n° 6 un frammento di cristallo di ortoclasio.

⁵⁾ ARTINI E. *Le Rocce*, pag. 426. Milano, Hoepli, (1959).

⁶⁾ ARTINI E. *L. c.* a nota ⁵⁾, pag. 417.

TABELLA I.

(percentuale sul secco a 105°C).

	Ciminite	Ossidiana trachi-andesitica (per fusione e tempra della ciminite).
SiO ₂	58,63	59,51
Al ₂ O ₃ (+ TiO ₂ + Mn ₃ O ₄)	16,69	16,70
Fe ₂ O ₃	3,65	1,06
FeO	2,80	4,41
MgO	4,39	4,02
CaO	5,98	5,64
Na ₂ O	3,01	3,16
K ₂ O	4,92	5,16
H ₂ O+	0,35	ass.
	100,42	99,66

Dopo aver proceduto al rilevamento dei caratteri costituzionali della roccia prescelta e dopo aver accertato che essi risultano conformi a quelli desiderati, si è preparata l'ossidiana artificiale corrispondente, mediante fusione e successiva rapida tempra della *ciminite* di cui alla tabella I, con le medesime modalità che sono state adoperate e descritte nelle precedenti note ⁷⁾.

Attraverso l'analisi chimica, riportata in tab. I (seconda colonna), si è in primo luogo stabilito che il trattamento di fusione e rapida tempra non ha provocato sostanziali variazioni della composizione chimica del materiale di partenza. Si nota infatti soltanto un leggero aumento del titolo di silice ed una leggera diminuzione di quello di ferro. Dato l'ambiente riducente del forno, nel vetro ricavato si registra, come sempre, un incremento del ferro in forma ferrosa, a scapito di quello in forma ferrica.

Il prodotto granulato, dopo conveniente polverizzazione ed essiccazione, è stato sottoposto ai trattamenti idrotermali. Si sono, anche questa volta, effettuate due serie di esperienze; nella prima si è fatto uso, come liquido di contatto, di idrossido di *potassio* in soluzione diluita, mentre nella seconda si è adoperato idrossido di *sodio* di pari concentrazione.

Le condizioni fisiche nelle quali si è lasciato decorrere il trattamento, sono state mantenute esattamente uguali a quelle prescelte per l'intera serie di esperienze.

I caratteri costituzionali e strutturali dei prodotti di reazione, ricavati con il trattamento idrotermale nelle condizioni di volta in volta indicate,

⁷⁾ SERSALE R. L. c. a nota ¹⁾.

sono poi stati individuati sottoponendo ad analisi chimica i solidi a fine esperienza, debitamente lavati fino ad eliminazione della reazione alcalina, nonchè ad indagine roentgenografica. In quei casi nei quali si è ritenuto utile, si è fatto ricorso altresì all'ausilio dell'analisi termoponderale ed a quello della valutazione della capacità di scambio basico.

I risultati analitici relativi al primo gruppo di esperienze (ambiente potassico) sono raccolti in tab. II.

TABELLA II.

(percentuale sul secco a 105°C).

Ossidiana trachi-andesitica, sottoposta a trattamento idrotermale.

	p = 60 Kg/cm ² ; t = 280°C; sol. KOH 1%.	p = 120 Kg/cm ² ; t = 330°C; sol. KOH 1%.	p = 200 Kg/cm ² ; t = 375°C; sol. KOH 1%.
SiO ₂	53,71	56,70	56,97
Al ₂ O ₃ (+TiO ₂ +Mn ₂ O ₄)	16,36	15,91	15,96
Fe ₂ O ₃	2,62	2,45	2,28
FeO	3,47	2,77	2,47
MgO	4,56	4,03	3,76
CaO	6,36	5,75	5,62
Na ₂ O	2,53	1,82	1,88
K ₂ O	6,17	7,34	8,00
H ₂ O+	4,72	3,47	3,00
	100,50	100,24	99,94
	(cfr.: fig. 1, (B); fig. 3, (1)).	(cfr.: fig. 2, (C)).	(cfr.: fig. 2, (D); fig. 3, (2)).

Si noti il discreto quantitativo di acqua stabilmente fissata dai solidi a seguito del trattamento idrotermale subito, quantitativo che, come sempre, decresce con l'incremento dei valori relativi alle condizioni fisiche che hanno regolato il trattamento e che compaiono in tab. II in corrispondenza di ciascuna analisi. Risalta altresì il calo del titolo di silice, particolarmente accentuato per il solido ottenuto a seguito di trattamento in condizioni fisiche moderate, il leggero decremento dei titoli: di ferro, di calcio e di magnesio, l'aumento del tenore di potassio — date le condizioni ambientali del trattamento — e, conseguentemente, la diminuzione del tenore di sodio. Conviene ricordare che le segnalate variazioni della costituzione chimica sono state più o meno costantemente riscontrate per l'intera serie di vetri esaminati, sottoposti ai trattamenti idrotermali nelle condizioni in parola *). In tav. II

*) La durata dei trattamenti idrotermali è stata, come per l'intero gruppo di

ed in fig. 1 sono riportati i risultati dell'indagine roentgenografica eseguita sui solidi di cui alle analisi in tab. II.

Lo spettrogramma n° 2 della tav. II si riferisce al trattamento idrotermale del vetro originario, alla pressione di $\sim 60 \text{ Kg/cm}^2$ ed alla temperatura di $\sim 280^\circ\text{C}$, in presenza di soluzione di KOH all'1%. Il computo delle righe dello spettrogramma in oggetto consente di stabilire che, anche questa volta, un processo di zeolitizzazione è alla base della trasformazione subita dal vetro originario per effetto del trattamento cui è stato sottoposto. Il termine zeolitico che ha preso origine risulta esser: la *cabasite*, del quale spettro sono riconoscibili con tutta evidenza le tre righe di maggiore intensità (cfr. tab. III).

TABELLA III.

Cabasite (Rubendörfel)		Solido di cui agli spettrog.: n° 2 (tav. II); B (fig. 1).	
Intensità	d in Å	Intensità	d in Å
mf	9,49	d	9,45
f	4,32	d	4,30
ff	2,92	md	2,90

ff = fortissima; f = forte; mf = media forte; md = media debole; d = debole.

Come mostra la tab. III e come può rilevarsi anche dal diffrattogramma (B), riportato in fig. 1, le linee relative alla *cabasite* (cfr. diffrattogramma (A), sono, nello spettrogramma del solido a fine esperienza, di bassa intensità.

In fig. 2 sono riportati poi i diffrattogrammi relativi ai solidi ottenuti a seguito di trattamento idrotermale del vetro in istudio, sempre in ambiente alcalino per potassa, nelle seguenti condizioni fisiche: pressione $\sim 120 \text{ Kg/cm}^2$, temperatura $\sim 330^\circ\text{C}$ (diffrattogramma (C)), pressione $\sim 200 \text{ Kg/cm}^2$, temperatura $\sim 375^\circ\text{C}$ (diffrattogramma (D)). Le corrispondenti analisi chimiche compaiono pure in tab. II. Il computo dei diffrattogrammi (C) e (D) della fig. 2 ha consentito di rilevare la scomparsa delle righe dello spettro della *cabasite* e la comparsa, invece, di quelle appartenenti agli spettri: dell'*analcime* e dell'*ortoclasio*. A documentazione di tale asserzione si ritiene sufficiente riportare nella stessa fig. 2 il diffrattogramma (E) relativo al tufo verde flegreo — i cui costituenti mineralogici principali,

ricerche finora eseguite, così fissata: 30 ore, per le esperienze eseguite alla pressione di 60 Kg/cm^2 ed alla temperatura di 280°C ; 24 ore, per le esperienze a temperatura e pressione più elevata.

come si è posto in luce in un'apposita nota⁸⁾, risultano essere appunto: *analcime* ed *ortoclasio*, — in quanto una evoluzione in tal senso, per effetto dell'incremento dei valori dei fattori fisici che regolano il trattamento idro-termale di vetri zeolitizzati a *cabasite*, è stata ripetutamente constatata e compiutamente documentata in precedenti memorie⁹⁾.

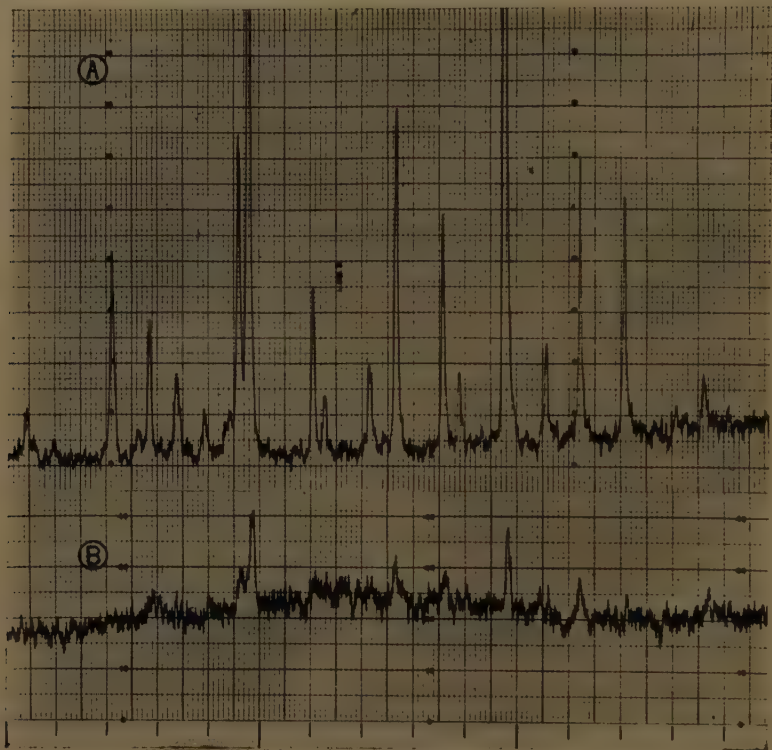


Fig. 1. — Radiazione Cu K α . Zona compresa fra 5 e 20° θ .

(A) Cabasite (Rubendörfel).

(B) Solido di cui all'analisi chimica in tab. II, prima colonna.

A sostegno delle deduzioni tratte in base ai risultati dell'indagine roentgenografica, ho creduto utile porre in luce nei solidi di cui alle analisi in tab. II la presenza delle caratteristiche di comportamento che distinguono i minerali della famiglia delle zeoliti. Ho pertanto eseguite le analisi termo-

⁸⁾ SERSALE R. *Costituzione dei tufi verdi della regione flegrea*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., [4], XXVI, pp. 355-373. Napoli (1959).

⁹⁾ SERSALE R. L. c. a nota¹⁾.

— SERSALE R. *Sulla natura zeolitica del tufo « lionato »*. Nota II. *Risultati dell'esame di altri campioni provenienti dalla regione vulcanica dei Colli Albani*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., [4], XXVI, pag. 217. Napoli (1959).

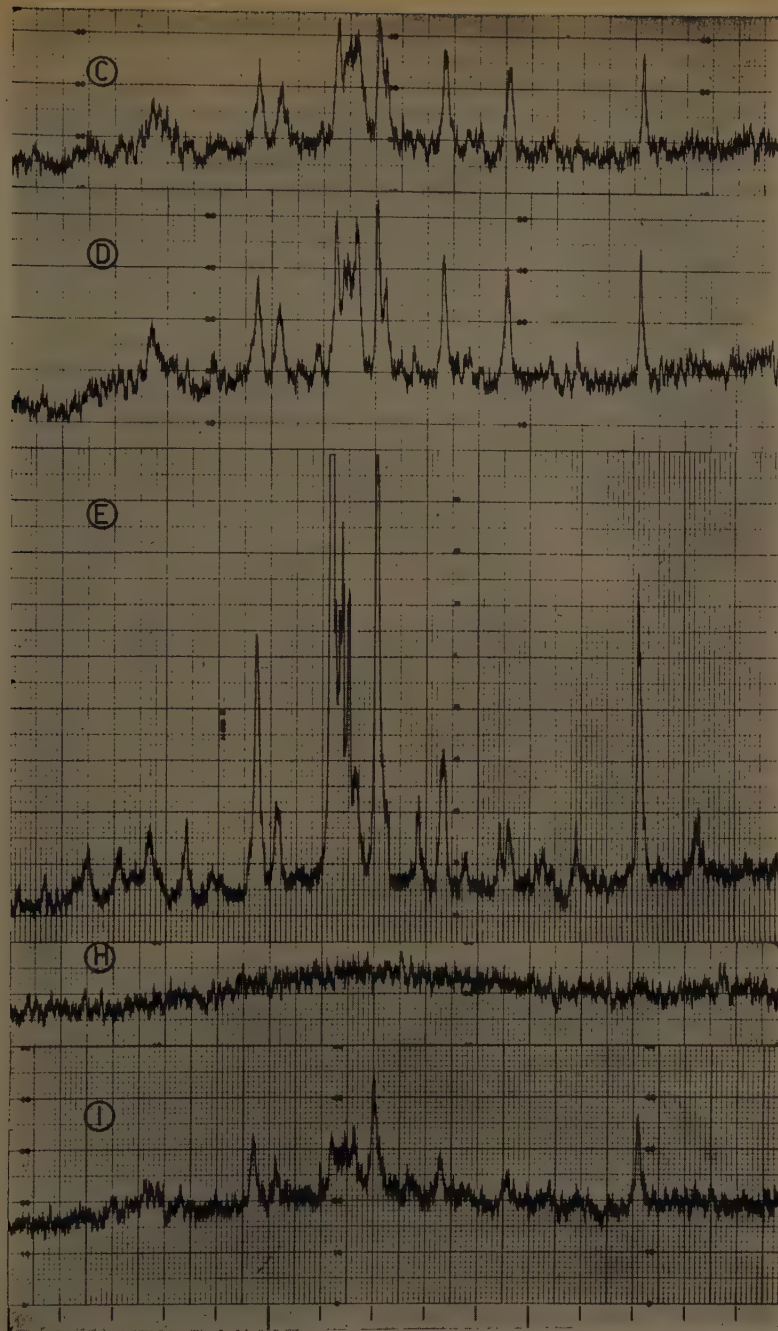


Fig. 2. — Radiazione Cu K α . Zona compresa fra 5 e 20° Θ .

(C) Solido di cui all'analisi chimica in tab. II, seconda colonna.

(D) " " " " " " " " terza, " "

(E) Tufo verde ischitano, tal quale.

(H) Solido ottenuto, adoperando come liquido di contatto la sola acqua, per trattamento idrotermale a : $p \approx 60 \text{ Kg/cm}^2$; $t \approx 280^\circ\text{C}$.

(I) Come H, ma a $p \approx 120 \text{ Kg/cm}^2$; $t \approx 330^\circ\text{C}$.

ponderali, i cui risultati compaiono in fig. 3 nella loro riproduzione originale. I diagrammi sono del tutto simili a quelli ottenuti sperimentando sui prodotti di reazione dell'intera serie di vetri studiati.

Parimente, la valutazione della capacità di scambio basico dei solidi a fine esperienza — eseguita con le stesse modalità adoperate e descritte

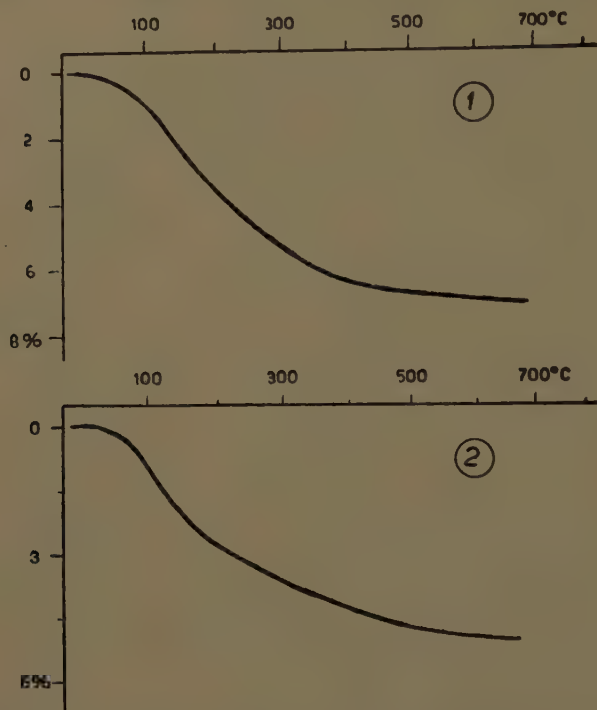


Fig. 3. — Diagrammi perdita di peso / temperatura.

(1) Solido di cui all'analisi chimica in tab. II, prima colonna.

(2) Solido di cui all'analisi chimica in tab. II, terza colonna.

nei precedenti lavori — fornendo i risultati rappresentati in fig. 4 e raccolti in tab. IV, denota che a seguito del trattamento di zeolitizzazione, il vetro di partenza ha acquisita in non lieve misura tale proprietà.

Nel secondo gruppo di esperienze, com'è stato fatto in ogni singola ricerca, si sono mutate le condizioni ambientali del trattamento idrotermale, mantenendo invece invariati i fattori fisici, e si sono successivamente controllate le caratteristiche costituzionali e strutturali dei solidi in tal modo ottenuti, con gli stessi mezzi d'indagine dei quali ci si è serviti precedentemente.

In tab. V sono riportate le analisi chimiche relative ai prodotti di reazione, ottenuti per trattamento in ambiente sodico.

I dati analitici segnalano un calo del titolo di silice del vetro di partenza, cui fa riscontro, anche questa volta, la fissazione di un discreto quantitativo d'acqua. Aumenta altresì, per effetto delle condizioni ambientali nelle quali è decorso il trattamento, il tenore di sodio, con conseguente leggera diminuzione di quello di potassio.

TABELLA IV.

Capacità di scambio basico.

(valutata con soluzioni N/10 di cloruro d'ammonio o di nitrato d'argento)

N°	Materiale di partenza.	Milliequivalenti rimossi dalla soluzione.		Milliequivalenti passati in soluzione.			Totale milliequivalenti scambiati.
				K	Na	Ca	
1	Ossidiana trachiandesitica fusa e temprata.	NH ₄	0,49	0,16	0,14	0,28	0,58
2	La stessa, dopo tratt. idrot. a p = 60 Kg/cm ² ; t = 280°C; sol. KOH 1%.	NH ₄	12,97	5,42	1,28	6,56	13,26
3	n° 1, dopo tratt. idrot. a p = 60 Kg/cm ² ; t = 280°C; sol. KOH 3%.	NH ₄	5,07	2,40	0,60	2,56	5,56
4	Ossidiana trachiandesitica fusa e temprata.	Ag	0,40	0,09	0,28	0,14	0,51
5	n° 1, dopo tratt. idrot. a p = 60 Kg/cm ² ; t = 280°C; sol. NaOH 1%.	Ag	19,50	5,08	9,96	4,91	19,95

In tav. II sono inoltre riportati i risultati dell'indagine roentgenografica eseguita sui solidi di cui alle analisi in tab. V.

Come può chiaramente rilevarsi e come è stato accertato mediante computo delle righe principali dello spettrogramma: n° (4) in tav. II (cfr. anche tab. VI), per trattamento in ambiente sodico in condizioni moderate di pressione e di temperatura (p = 60 Kg/cm²; t = 280°C) — in quelle stesse condizioni, cioè, nelle quali in ambiente potassico si è conseguita la zeolitizzazione a cabasite del vetro in istudio — l'ossidiana di partenza si *analcimizza*.

Incrementando la pressione e la temperatura del trattamento, non si registra sostanziale modificazione degli spettrogrammi dei relativi solidi (cfr. tav. II, roentgenogrammi n.ri: (6) e (7), a parte una più compiuta zeolitizzazione del vetro di partenza e la comparsa — più evidente per più severe condizioni fisiche di trattamento — di alcune righe attribuite allo spettro dell'ortoclasio.

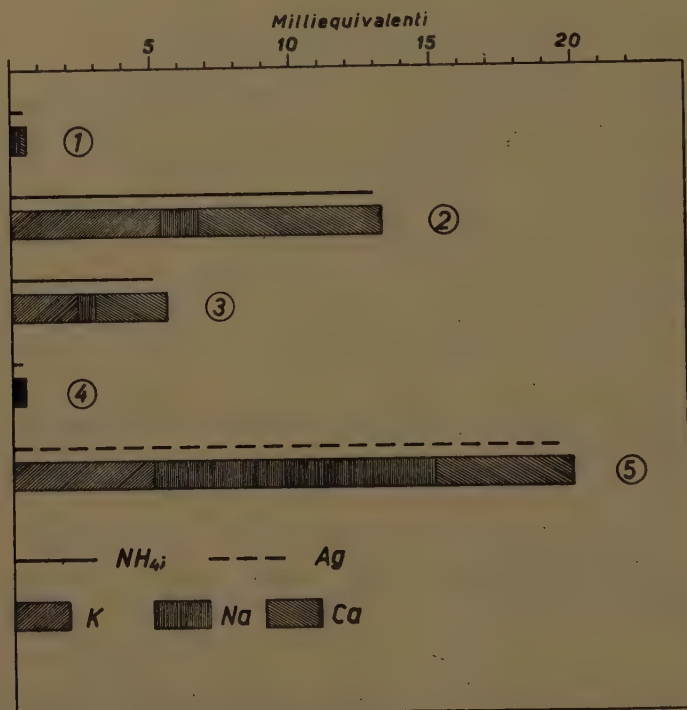


Fig. 4. — Rappresentazione dei risultati delle prove di scambio basico, di cui alla tab. IV.

Le indagini complementari: analisi termo-ponderale, i cui diagrammi sono riportati in fig. 5, e valutazione della capacità di scambio basico, di cui alla tab. IV ed alla fig. 4, concordano con le deduzioni or ora tratte.

Si è creduto interessante valutare gli effetti dell'aumentata concentrazione della soluzione potassica di contatto, sul comportamento del vetro *trachi-andesitico* allorchè cimentato in condizioni moderate di pressione e di temperatura ($\sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $\sim 280^\circ \text{C}$) e ciò con lo scopo di stabilire se un tale incremento di concentrazione risultasse favorevole al decorso della reazione di formazione della *cabasite*, realizzando così una più compiuta zeolitizzazione del vetro di partenza.

Si è infine saggiato il comportamento del vetro in istudio, allorchè sottoposto a trattamento idrotermale in presenza di sola acqua quale liquido di contatto.

Qui di seguito dò conto anche dei risultati di queste due ultime esperienze.

Si è constatato che alla pressione di ~ 60 Kg/cm² ed alla temperatura di $\sim 280^\circ\text{C}$, l'aumento di concentrazione della soluzione d'idrossido di potas-

TABELLA V.

(percentuale sul secco a 105°C).

Ossidiana trachi-andesitica, sottoposta a trattamento idrotermale.

	p = ~ 60 Kg/cm ² ; t = $\sim 280^\circ\text{C}$; sol. NaOH 1%.	p = ~ 120 Kg/cm ² ; t = $\sim 330^\circ\text{C}$; sol. NaOH 1%.	p = ~ 200 Kg/cm ² ; t = $\sim 375^\circ\text{C}$; sol. NaOH 1%.
SiO ₂	53,21	54,35	54,81
Al ₂ O ₃ (+TiO ₂ +Mn ₂ O ₄)	16,51	15,73	15,80
Fe ₂ O ₃	2,18	2,48	2,44
FeO	2,96	2,67	2,73
MgO	4,24	4,03	4,00
CaO	5,86	5,70	5,13
Na ₂ O	5,70	5,49	5,38
K ₂ O	4,44	4,36	4,87
H ₂ O+	5,34	4,78	4,49
	100,44	99,59	99,65
	(cfr.: fig. 5, (3); tav. II, (4)).	(cfr.: tav. II, (6)).	(cfr.: fig. 5 (4)). tav. II, (7)).

sio favorisce invece l'evoluzione del vetro di partenza verso l'assetto strutturale della *leucite*. Nel diffrattogramma (G) riportato in fig. 6, relativo al solido in parola, sono infatti riconoscibili le linee principali di quest'ultimo spettro (F). In accordo con tale asserzione stanno i risultati dell'analisi chimica — riportati in tab. VII — i quali mostrano che a seguito del suddetto

TABELLA VI.

Analcime (Somma-Vesuvio)		Solido di cui allo spettrogramma n° 4 in tav. II.		Solido di cui allo spettrogramma n° 6 in tav. II.		Solido di cui allo spettrogramma n° 7 in tav. II.	
Intensità	d in Å	Intensità	d in Å	Intensità	d in Å	Intensità	d in Å
f	5,60	f	5,61	f	5,61	f	5,60
ff	3,42	ff	3,43	ff	3,43	ff	3,42
mf	2,92	mf	2,92	mf	2,92	mf	2,92

ff = fortissima; f = forte; mf = media forte.

trattamento il titolo di potassio del vetro di partenza è notevolmente aumentato.

Il trattamento idrotermale, infine, del vetro *trachi-andesitico* alla pressione di $\sim 120 \text{ Kg/cm}^2$ ed alla temperatura di $\sim 330^\circ\text{C}$, ma senza apporto di alcali dall'esterno, è conforme a quello riscontrato, in identiche condizioni, per il vetro *alcali-trachitico*¹⁰⁾. Come infatti mostra il diffrattogramma (I) in fig. 2, anche per il vetro *trachi-andesitico* si registra l'analcimizzazione, accompagnata da feldspatizzazione ad ortoclasio.

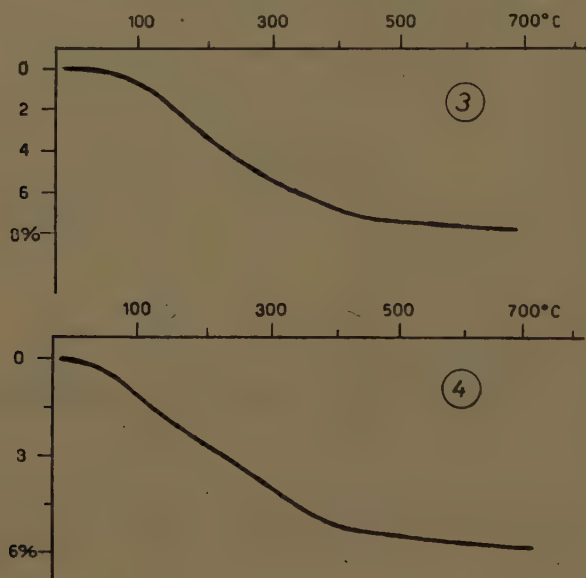


Fig. 5. — Diagrammi perdita di peso / temperatura.

(3) Solido di cui all'analisi chimica in tab. V, prima colonna.

(4) Solido di cui all'analisi chimica in tab. V, terza colonna.

Il diffrattogramma (H) della stessa fig. 2, relativo al vetro in esame dopo trattamento idrotermale nelle stesse condizioni ambientali ora precisate, ma a pressione e temperatura più basse ($\sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $\sim 280^\circ\text{C}$), risulta infine identico a quello del prodotto non trattato.

L'insieme delle risultanze sperimentali converge nell'indicare che:

a) il trattamento idrotermale del vetro *trachi-andesitico* comporta — in ambiente debolmente alcalino per potassa ed in condizioni moderate di pressione e di temperatura ($\sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $\sim 280^\circ\text{C}$) — la sua zeolitizzazione a *cabasite*. In base ai risultati dell'esame roentgenografico, a sostegno

¹⁰⁾ SERSALE R. Sulla natura zeolitica del tufo « lionato ». Nota II. L. c. a nota ⁹⁾, pag. 217.

dei quali stanno i risultati delle indagini complementari, si è potuta infatti rilevare nel solido a fine esperienza la presenza delle linee principali dello spettro del su ricordato termine zeolitico, anche se dette linee sono risultate molto meno intense di quanto, a parità di condizioni, si osservò per il vetro *alkali-trachitico*, per il quale il minerale zeolitico di neoformazione, a seguito di trattamento idrotermale, risultò un termine a più alto contenuto di potassio della serie delle cabasiti: l'*herschelite*. Per il vetro *trachi-andesi-*

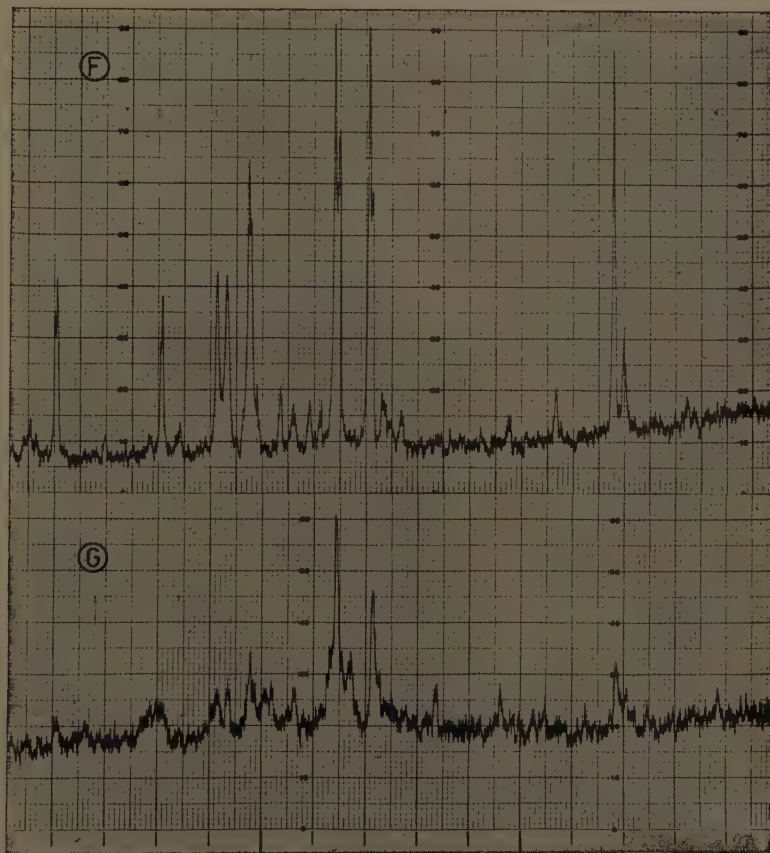


Fig. 6. — Radiazione $\text{Cu K}\alpha$. Zona compresa fra 5 e 20° θ .

(F) Leucite (Vesuvio).

(G) Solido ottenuto, adoperando come liquido di contatto la soluzione al 3% di KOH, per trattamento idrotermale a : $p \approx 60 \text{ Kg/cm}^2$; $t \approx 280^\circ\text{C}$, (cfr. tab. VII).

tico, l'ottenimento, in identiche condizioni operative, di un termine eminentemente calcico, è probabilmente da imputarsi al più alto quantitativo di calcio che entra nella sua costituzione, nonchè al minor contenuto di potassio;

b) l'aumento della concentrazione di potassa della soluzione di con-

tatto (KOH al 3%), già in condizioni moderate di pressione e di temperatura ($\sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $\sim 280^\circ\text{C}$) — quelle stesse, cioè, per le quali in ambiente debolmente alcalino per potassa (KOH 1%), come or ora ho fatto rilevare, si è conseguita la zeolitizzazione a *cabasite* del vetro *trachi-andesitico* — spostata invece la reazione nel senso della formazione di *leucite*;

TABELLA VII.

(percentuale sul secco a 105°C).

Ossidiana trachi-andesitica, sottoposta a trattamento idrotermale.

	<p>$p = \sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 280^\circ\text{C}$; sol. KOH 3% .</p>
SiO ₂	52,33
Al ₂ O ₃ (+TiO ₂ + Mn ₂ O ₄)	17,75
Fe ₂ O ₃	2,46
FeO	2,75
MgO	3,93
CaO	5,37
Na ₂ O	1,41
K ₂ O	11,00
H ₂ O+	3,28
	<hr/> 100,28

c) in ambiente debolmente potassico (KOH 1%), l'incremento dei fattori fisici che regolano il trattamento idrotermale comporta l'*analcimizzazione* del vetro in istudio, accompagnata da feldspatizzazione ad *ortoclasio*, tanto più marcata, quanto più severa la pressione e la temperatura. Un tale comportamento risulta pertanto del tutto simile a quello rilevato per il vetro *alcali-trachitico*;

d) in ambiente debolmente alcalino per soda (NaOH 1%), in condizioni moderate di pressione e di temperatura ($\sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $\sim 280^\circ\text{C}$) si consegue l'*analcimizzazione* del vetro *trachi-andesitico*;

e) perdurando l'ambiente sodico, l'incremento dei fattori fisici del trattamento idrotermale comporta un'incipiente feldspatizzazione ad *ortoclasio* (sodifero) del vetro *trachi-andesitico* analcimizzato. Si registra pertanto, nelle su riportate condizioni, identità di comportamento col vetro *alcali-trachitico*;

f) il trattamento idrotermale del vetro *trachi-andesitico*, in condizioni piuttosto severe di pressione e di temperatura ($\sim 120 \text{ Kg/cm}^2$; $\sim 330^\circ\text{C}$), senza l'aggiunta esterna di alcali alla soluzione di contatto ed adoperando

quindi la sola acqua, favorisce l'evoluzione del vetro di partenza verso l'analcimizzazione, così come osservato per quello *alcali-trachitico*.

Si constata pertanto che il comportamento del vetro *trachi-andesitico* sotto identiche condizioni di cimento, denuncia la posizione di intermedio che esso viene ad assumere fra i due termini della serie da me studiata fra i quali viene ad inserirsi: il vetro *alcali-trachitico* da un lato e quello *basaltico* dall'altro, propendendo, però, più verso il comportamento del primo. Il vetro *alcali-trachitico*, infatti, in determinate ed identiche condizioni operative risultò zeolitizzabile ad *herschelite* o ad *analcime*, secondo la natura chimica (potassa o soda) della soluzione di contatto impiegata. Il vetro *basaltico*, al contrario, risultò — sempre a parità di condizioni — soltanto *analchimizzabile*. Il vetro *trachi-andesitico* risulta zeolitizzabile a *casabite* in ambiente debolmente alcalino per potassa e ad *analcime* in quello debolmente alcalino per soda. In ambiente potassico e sempre nelle condizioni fisiche più favorevoli alla zeolitizzazione, però, l'aumento di concentrazione della soluzione di contatto — che per il vetro *alcali-trachitico* si rivela elemento favorevole all'analchimizzazione, accompagnata da feldspatizzazione ad ortoclasio, per il vetro *trachi-andesitico* favorisce invece la formazione di *leucite*.

Prima di terminare questa nota mi è gradito porgere al Prof. SCHERILLO sentiti ringraziamenti per i consigli ricevuti nel corso dell'espletamento delle ricerche.

Napoli, Istituto di Chimica Industriale dell'Università.

RIASSUNTO. — Nel proseguimento delle ricerche eseguite con lo scopo di studiare le modificazioni costituzionali e strutturali di una serie di vetri di differente tipo mineralogico e chimico, allorchè sottoposti a trattamento idrotermale, in condizioni normalizzate, vien dato conto dei risultati conseguiti a partire da un vetro trachi-andesitico, preparato per fusione e tempra di un campione di *ciminite*.

Si dimostra che è possibile, per trattamento idrotermale in condizioni moderate di pressione e di temperatura, zeolitizzare il vetro in istudio: a *casabite*, in ambiente debolmente potassico, e ad *analcime*, in quello debolmente sodico.

Si stabilisce che, in ambiente potassico, l'incremento dei fattori fisici del trattamento sposta la reazione nel senso della formazione di *analcime* e di *ortoclasio* e che la feldspatizzazione risulta tanto più marcata, quanto più elevate la pressione e la temperatura del trattamento.

Si pone in luce inoltre che l'incremento della concentrazione di potassa della soluzione di contatto sposta, già in condizioni moderate di temperatura e di pressione, la reazione idrotermale nel senso della formazione di *leucite*, diversamente da quanto constatato per il vetro *alcali-trachitico*.

Si precisa altresì che, in ambiente sodico, l'incremento dei fattori fisici del trattamento comporta un'incipiente feldspatizzazione ad ortoclasio (sodifero) del vetro *trachi-andesitico* analchimizzato e si sottolineano, infine, le diversità di comportamento riscontrate — a parità di condizioni sperimentali — fra il vetro trachi-andesitico ed i due termini ad esso più prossimi: il vetro *alcali-trachitico* da un lato, e quello *basaltico*, dall'altro.

SUMMARY. — With reference to the preceding researches that have been carried out for investigating the changes related to the composition and to the structure of a series of different glasses when submitted to hydrothermal treatment in standardized conditions, the results that have been obtained starting from a *trachy-andesitic* obsidian, prepared by melting and granulating a sample of *ciminite* (from Cimini Mountains, near Viterbo), have been discussed.

It has been stated that treating the above mentioned obsidian at moderate temperatures and pressures and in the presence of potassium hydroxide dilute solution, *chabazite* has been obtained, whereas, in the presence of sodium hydroxide dilute solution and in the same physical conditions, *analcite* has been obtained.

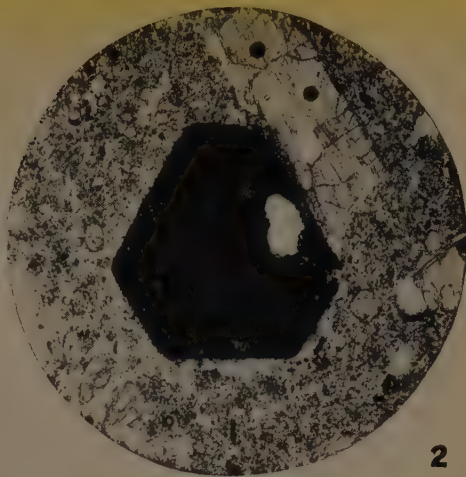
It has been successively shown that increasing the pressure and the temperature of the hydrothermal treatment, in the presence of potassium hydroxide dilute solution, *analcite* and *orthoclase* have been obtained; the higher the temperature and the pressure, the larger the feldspar formation.

It has been also thrown light upon the influence of the concentration of potassium hydroxide solution and it has been shown that its rise favours *leucite* formation, at variance with the behaviour of the *alkali-trachytic* glass.

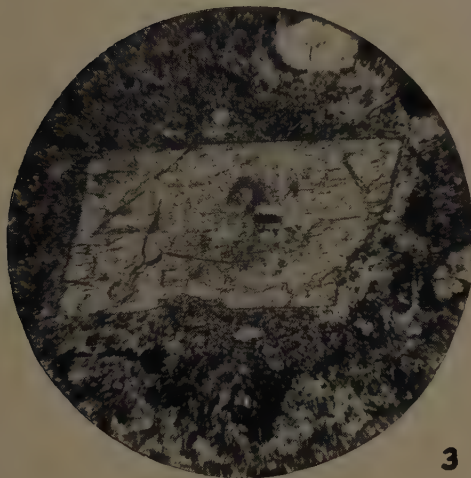
It has been proved too, that the rise of pressure and temperature of the hydrothermal treatment in the presence of sodium hydroxide dilute solution, promotes the incipient *orthoclase* formation of the previously zeolitised *trachy-andesitic* glass and the differences that have been observed, par of conditions, in the behaviour of the *trachy-andesitic* glass in comparison to that of the *alkali-trachytic* and of the *basaltic* one, have been after all emphasized.



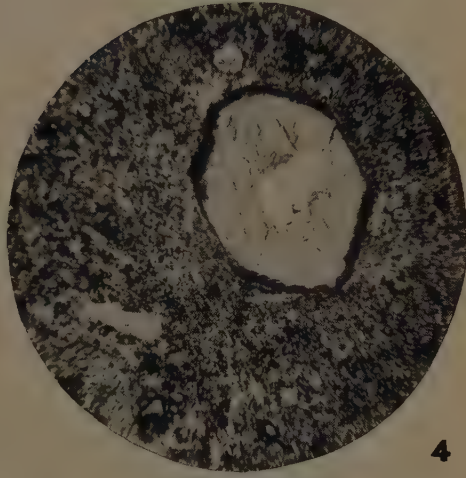
1



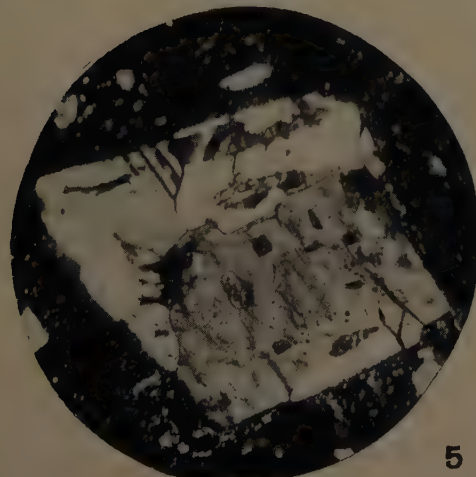
2



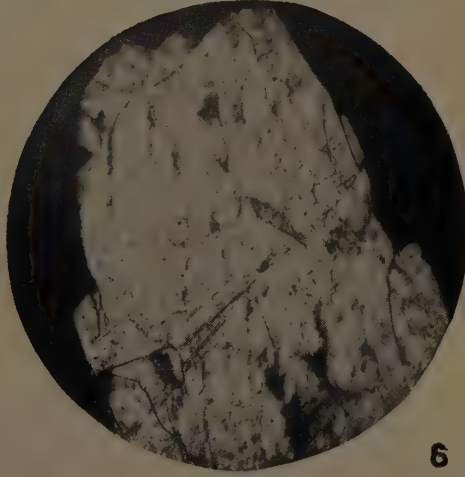
3



4



5



6

CIMINITE (SORIANO NEL CIMINO) - *Sezioni sottili.*

- (1) Nicols //; 40 \times ; Cristalli di plagioclasio e di biotite.
- (2) Nicols //; 40 \times ; Cristallo di biotite a contorno esagonale.
- (3) Nicols //; 60 \times ; Cristallo di pirosseno.
- (4) Nicols //; 60 \times ; Cristallo di olivina.
- (5) Nicols +; 40 \times ; Cristallo di plagioclasio.
- (6) Nicols \mp ; 40 \times ; Frammento di cristallo di ortoclasio.



Diam. camera mm. 114,59. Rad. Cu K.

- (1) Ossidiana trachi-andesitica, per fusione e tempra della *ciminite* (cfr. tab. I).
- (2) La stessa, dopo tratt. idrot. a $p = \sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 280^\circ\text{C}$; sol. KOH 1% (cfr. tab. II).
- (3) Cabasite (Rubendörfel).
- (4) Ossidiana trachi-andesitica, dopo tratt. idrot. a $p = \sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 280^\circ\text{C}$; sol. NaOH 1% (cfr. tab. V).
- (5) Analcime (Somma - Vesuvio).
- (6) Ossidiana trachi-andesitica, dopo tratt. idrot. a $p = \sim 120 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 330^\circ\text{C}$; sol. NaOH 1% (cfr. tab. V).
- (7) Ossidiana trachi-andesitica, dopo tratt. idrot. a $p = \sim 200 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 375^\circ\text{C}$; sol. NaOH 1% (cfr. tab. V).

Sull'unicità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie *)

Nota del socio corrispondente Carlo Ciliberto

(pervenuta all'Accademia il dì 11 settembre 1961)

Alla questione rivolta a stabilire dei criteri sufficienti a garantire l'unicità delle soluzioni del sistema differenziale:

[illegible]

quando è $n > 1$, sono state dedicate diverse ricerche. La letteratura in proposito è ormai abbastanza vasta e per alcune informazioni rinvio alla bibliografia posta alla fine di questo lavoro, pur non avendo la pretesa di ritenerla un elenco completo delle suddette ricerche ¹⁾.

Parecchi di tali criteri, indipendenti tra loro, sono abbastanza generali e fra essi uno dovuto a E. KAMKE [11] e alcuni dovuti a G. ZWIRNER [26], il primo ottenuto in un ordine di idee già seguito da E. BOMPIANI²⁾ e da L. TONELLI³⁾ e i secondi ottenuti in un ordine di idee seguito da G. SCORZA DRAGONI⁴⁾ per lo studio dell'unicità delle soluzioni del sistema (1) nel caso $n = 1$. Recentemente, poi, il risultato di KAMKE è stato generalizzato da F. BRAUER e S. STERNBERG [4] e da F. BRAUER [5], mentre i risultati di ZWIRNER sono stati generalizzati da L. FRANCHINI [7], che, peraltro, ha dato

^{*)} Il presente lavoro fa parte della realizzazione del programma del Gruppo di ricerca n. 19 del Comitato Nazionale per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche per il 1960-61.

¹⁾ Per altre notizie bibliografiche cfr. anche G. SANSONE. *Equazioni differenziali nel campo reale*, Zanichelli, Bologna, 1949, p. II, pag. 149.

²⁾ E. BOMPIANI. *Un teorema di confronto e un teorema di unicità per l'equazione differenziale $y' = F(x, y)$* , Rend. Acc. Naz. Lincei, (6), I (1925), 298-302.

³⁾ L. TONELLI, *Sull'unicità delle soluzioni di un'equazione differenziale ordinaria*. Rend. Acc. Naz. Lincei, (6), I (1925), 272-277.

⁴⁾ G. SCORZA DRAGONI. *Sulle condizioni sufficienti per l'unicità degli integrali di un'equazione differenziale*, Rend. Circ. Mat. Palermo, LIV (1930), 430-448.

anche una estensione al caso $n > 1$ dei risultati stabiliti da F. CAFIERO ⁵⁾ per l'unicità delle soluzioni del sistema (1) nel caso $n = 1$.

In questo lavoro mi propongo di stabilire nuovi criteri di unicità per le soluzioni del sistema (I); tali criteri costituiscono anch'essi una estensione di alcuni dei risultati ⁶⁾ stabiliti da CAFIERO e quelli contenuti nel n. 1 forniscono anche una generalizzazione del criterio dato da KAMKE [11] e di uno dei criteri stabiliti da ZWIRNER ⁷⁾. Nel n. 2 stabilisco un criterio che, se si prescinde dall'ipotesi fatta sulla struttura delle f_i , è più generale di quelli dati nel n. 1 e, infine, nel n. 3 faccio alcune osservazioni.

1. — Mostriamo che vale il seguente teorema:

I — Date n funzioni reali $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, ($i = 1, \dots, n$), definite nel campo

$$C: x_0 \leq x \leq x_0 + a, \quad b_i^{(1)} < y_i < b_i^{(2)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

supponiamo che per ogni punto $P(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$ di C si possa determinare una funzione $F_P(x, u)$ soddisfacente alle ipotesi di CARATHÉODORY in ogni campo del tipo ⁸⁾

$$(1) \quad x_0 + \beta_1 \leq x \leq x_0 + a, \quad \beta_2 \leq u < +\infty \quad (\beta_1 > 0, \beta_2 > 0),$$

e tale che siano verificate le seguenti condizioni:

a) risulta ⁹⁾

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n [\text{sign}(y_i - Y_i)] [f_i(x, y_1, \dots, y_n) - f_i(x, Y_1, \dots, Y_n)] \\ \leq F_P(x, \sum_{k=1}^n |y_k - Y_k|),$$

per quasi tutti gli x appartenenti ad un intorno destro di ξ e per (y_1, \dots, y_n) ,

(Y_1, \dots, Y_n) appartenenti ad un intorno di (η_1, \dots, η_n) e tali che $\sum_{k=1}^n |y_k - Y_k| > 0$;

⁵⁾ F. CAFIERO. Sui teoremi di unicità relativi ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine. Giornale di matematiche di Battaglini, (IV), 78 (1948-49), memoria I 10-45, memoria II 193-215.

⁶⁾ Cfr. loco cit. in ⁵⁾, I, § 2, n. 1, 20-22, e § 4, n. 1, 31-33.

⁷⁾ Cfr. [28], n. 3, pag. 95.

⁸⁾ Supponiamo, cioè, che $F_P(x, u)$ sia misurabile rispetto ad x per ogni fissato valore positivo di u , continua rispetto ad u per quasi tutti i valori di $x \in (x_0, x_0 + a)$ e comunque fissati due numeri $\beta_1 > 0$ e $\beta_2 > 0$ si possa determinare una funzione $q(x)$ sommabile secondo LEBESGUE in $(x_0 + \beta_1, x_0 + a)$, dipendente per ogni P da β_1 e β_2 , in modo che
risulti

$$|F_P(x, u)| \leq q(x),$$

nel campo definito dalle (1).

⁹⁾ Qui e nel seguito intenderemo che $\text{sign } y = 1$ se $y \geq 0$ e $\text{sign } y = -1$ se $y < 0$.

b) fissato un $\varepsilon > 0$ si può determinare un $h_\varepsilon > 0$ in modo tale che per ogni ξ_0 interno all'intervallo $(\xi, \xi + h_\varepsilon)$ l'integrale superiore ¹⁰⁾ della equazione

$$(3) \quad u = h_\varepsilon + \int_{\xi_0}^x F_P(t, u) dt ,$$

risulti a destra di ξ_0 minore od uguale ad ε .

In tali ipotesi il sistema differenziale:

$$(4) \quad \begin{cases} y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_i(x_0) = y_i^{(0)} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n,$$

ammette al più una soluzione assolutamente continua, essendo $y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ dei numeri reali tali da aversi $b_i^{(1)} < y_i^{(0)} < b_i^{(2)}$, $i = 1, \dots, n$.

Supponiamo, per assurdo, che esistano due soluzioni assolutamente continue distinte $(u_1(x), \dots, u_n(x))$, $(v_1(x), \dots, v_n(x))$ del sistema (4) e poniamo:

$$w_i(x) = u_i(x) - v_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad w(x) = \sum_{i=1}^n |w_i(x)|.$$

Ovviamente è $w(x_0) = 0$ ed esiste un valore ξ_1 , a destra di x_0 , nel quale è $w(\xi_1) > 0$. Indichiamo con (ξ, ξ') il massimo intervallo, contenente ξ_1 e contenuto in $(x_0, x_0 + a)$, nell'interno del quale è:

$$(5) \quad w(x) > 0, \quad \xi < x < \xi',$$

e chiamiamo con η_i , ($i = 1, \dots, n$), il valore comune assunto da $u_i(x)$ e $v_i(x)$, ($i = 1, \dots, n$), in ξ .

Determinato il punto $P(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$ di C e la funzione $F_P(x, u)$ ad esso corrispondente, indicheremo con k la semidimensione dell'intorno destro di ξ e le semidimensioni dell'intorno di (η_1, \dots, η_n) in cui è verificata la (2). Determiniamo, poi, un numero positivo $\delta < \min[k, \xi' - \xi]$ in maniera tale che si abbia:

$$(6) \quad | \eta_i - u_i(x) | \leq k, \quad | \eta_i - v_i(x) | \leq k, \quad \xi \leq x \leq \xi + \delta,$$

per $i = 1, \dots, n$.

Rileviamo che $|w_i(x)|$ è assolutamente continua in $(\xi, \xi + \delta)$, dato che è tale $w_i(x)$, quindi $|w_i(x)|$, ($i = 1, \dots, n$), e così anche $w(x)$, è dotata quasi ovunque in $(\xi, \xi + \delta)$ di derivata.

¹⁰⁾ In base alle ipotesi fatte tale integrale esiste in un intorno di ξ_0 ; in proposito cfr. loco cit. in ⁵⁾, I, § 1, 13-20.

Mostriamo, ora, che, tenute presenti la (5) e le (6), in base all'ipotesi a) risulta:

$$(7) \quad w'(x) \leq F_P(x, w(x)),$$

quasi ovunque in $(\xi, \xi + \delta)$.

Cominciamo con l'osservare che, valendo la (5), in $(\xi, \xi + \delta)$ è $|w_i(x)| \geq 0$, ($i = 1, \dots, n$). Sia ora x un punto tale che $\xi < x \leq \xi + \delta$ e in cui esiste la derivata di $|w_i(x)|$; ovviamente in esso esiste anche la derivata di $w_i(x)$ ¹¹.

Orbene tenuto conto di quanto rilevato in nota¹¹) e delle (6), per $w_i(x) \geq 0$ avremo:

$$|w_i(x)|' = w_i'(x) = f_i[x, u_1(x), \dots, u_n(x)] - f_i[x, v_1(x), \dots, v_n(x)],$$

e per $w_i(x) < 0$ avremo:

$$|w_i(x)|' = -w_i'(x) = -\left[f_i[x, u_1(x), \dots, u_n(x)] - f_i[x, v_1(x), \dots, v_n(x)] \right],$$

da cui, quasi ovunque in $(\xi, \xi + \delta)$ risulta:

$$\begin{aligned} w'(x) &= \sum_{i=1}^n |w_i(x)|' \\ &= \sum_{i=1}^n [\text{sign } w_i(x)] \left[f_i[x, u_1(x), \dots, u_n(x)] - f_i[x, v_1(x), \dots, v_n(x)] \right]. \end{aligned}$$

Di qui, tenuto conto della (2), segue subito che vale la (7) quasi ovunque in $(\xi, \xi + \delta)$.

Fissato, ora, $\varepsilon > 0$ tale da essere¹²)

$$\varepsilon < w(\xi + \delta),$$

indichiamo con h_i il numero positivo corrispondente per l'ipotesi b) e diciamo ξ_0 un punto interno sia a $(\xi, \xi + h_i)$ che a $(\xi, \xi + \delta)$ nel quale è:

$$0 < w(\xi_0) \leq h_i.$$

Di qui segue che, valendo la (7), per un noto teorema di confronto¹³),

¹¹) Rileviamo che per $\xi < x < \xi + \delta$, con $w_i(\xi + \delta) \neq 0$, è $|w_i(x)|' = w_i'(x)$, per $w_i(x) \geq 0$ (precisamente $|w_i(x)|' = w_i'(x) = 0$ per $w_i(x) = 0$) e $|w_i(x)|' = -w_i'(x)$ per $w_i(x) < 0$, mentre se $x = \xi$ o $x = \xi + \delta$ con $w_i(x) = 0$, si avrà $|w_i(x)|' = w_i'(x) = 0$, oppure, se $|w_i(x)|' \neq 0$, $w_i'(x) = |w_i(x)|'$ o $w_i'(x) = -|w_i(x)|'$ secondo che in un intorno a destra di ξ o a sinistra di $\xi + \delta$ risulti $w_i(x) > 0$ o $w_i(x) < 0$.

¹²) Il ragionamento che segue fino alla conclusione è simile a quello svolto da CAFIERO per dimostrare un criterio di unicità per una equazione ordinaria del primo ordine; in proposito cfr. loco cit. in ⁵), I, § 2, n. 1, 20-22.

¹³) Cfr. loco cit. in ⁵), I, § 1, n. 3, 19-20.

l'integrale superiore $u(x)$ dell'equazione (3) sarebbe definito in tutto $(\xi, \xi + \delta)$ e dovrebbe risultare:

$$u(x) \geq w(x), \quad \xi_0 \leq x \leq \xi + \delta,$$

e quindi, in particolare, si avrebbe:

$$u(\xi + \delta) \geq w(\xi + \delta) > \varepsilon,$$

in contrasto con quanto ammesso per ipotesi in b).

È possibile generalizzare il teorema I, in proposito vale il seguente teorema:

II. — Siano $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, ($i = 1, \dots, n$), n funzioni reali definite nel campo C e $\omega(u_1, \dots, u_n)$ una funzione definita e continua per $0 \leq u_i < +\infty$, ($i = 1, \dots, n$) con derivate parziali prime continue per

$\sum_{i=1}^n u_i > 0$, positiva per $\sum_{i=1}^n u_i > 0$, e nulla per $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0$; suppo-

niamo che per ogni punto $P(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$ di C si possa determinare una funzione $F_P(x, u)$ soddisfacente alle ipotesi di CARATHÉODORY in ogni campo del tipo indicato in (1) e tale che sia verificata l'ipotesi b) e inoltre la seguente altra condizione:

a') risulta

$$(8) \quad \sum_{i=1}^n [\text{sign}(y_i - Y_i)] \omega_{u_i}(|y_1 - Y_1|, \dots, |y_n - Y_n|) \left[f_i(x, y_1, \dots, y_n) - \right. \\ \left. - f_i(x, Y_1, \dots, Y_n) \right] \leq F_P(x, \omega(|y_1 - Y_1|, \dots, |y_n - Y_n|)),$$

per quasi tutti gli x appartenenti ad un intorno destro di ξ e per (y_1, \dots, y_n) ,

(Y_1, \dots, Y_n) appartenenti ad un intorno di (η_1, \dots, η_n) e tali che $\sum_{k=1}^n |y_k - Y_k| > 0$,

In tali ipotesi il sistema differenziale (4) ammette al più una soluzione assolutamente continua.

Supposto, per assurdo, che esistano due soluzioni assolutamente continue distinte $(u_1(x), \dots, u_n(x))$, $(v_1(x), \dots, v_n(x))$ del sistema (4), e posto:

$$w_i(x) = u_i(x) - v_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad W(x) = \omega(|w_1(x)|, \dots, |w_n(x)|)$$

basterà ripetere il ragionamento fatto nel caso del teorema I, sostituendo

$W(x)$ in luogo di $w(x)$, tenendo però conto che in un punto x tale che $\xi < x \leq \xi + \delta$ e di derivabilità per $W(x)$ è:

$$W'(x) = \sum_{i=1}^n \omega_{u_i}(|w_1(x)|, \dots, |w_n(x)|) |w_i(x)|',$$

e sfruttando l'ipotesi a') in luogo della a).

È ovvio, poi, che prendendo $\omega(u_1, \dots, u_n) = u_1 + \dots + u_n$ si ottiene il teorema I.

2. — Diamo ora un nuovo teorema di unicità che in un certo senso è più generale del teorema II, e cioè se si prescinde dalla ipotesi fatta sulla struttura delle $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, ($i = 1, \dots, n$), e di $\omega(u_1, \dots, u_n)$, esso contiene il teorema II.

III. — Siano $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, ($i = 1, \dots, n$), funzioni uniformemente continue rispetto a (y_1, \dots, y_n) in un intorno di ogni punto del campo C , e $\omega(u_1, \dots, u_n)$ una funzione definita come nel teorema II e avente le derivate parziali prime limitate in ogni insieme limitato contenente l'origine, supponiamo che per ogni punto $P(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$ di C , si possa determinare una funzione soddisfacente alle ipotesi di CARATHÉODORY in ogni campo del tipo (1) e tale che sia verificata la condizione a') e inoltre

c) fissato un $\varepsilon > 0$ si possa determinare un $h_\varepsilon > 0$ in modo tale che l'integrale superiore dell'equazione

$$u = \delta_1 h_\varepsilon + \int_{\xi + \delta_1}^x F_P(t, u) dt,$$

per ogni $0 < \delta_1 \leq h_\varepsilon$, risulti a destra di $\xi + \delta_1$ minore o uguale ad ε .

In tali ipotesi il sistema differenziale (4) ammette al più una soluzione assolutamente continua.

Ragionando come nel caso del teorema II si stabilisce che

$$W'(x) \leq F_P(x, W(x)),$$

quasi ovunque in $(\xi, \xi + \delta)$. Indi fissiamo un $\varepsilon > 0$ e $< W(\xi + \delta)$ e indichiamo con h_ε il numero positivo corrispondente ad ε per l'ipotesi c).

Per l'uniforme continuità delle $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, ($i = 1, \dots, n$), rispetto a (y_1, \dots, y_n) in un intorno del punto $P(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$ è possibile determinare un $\delta_1 < \min[\delta, h_\varepsilon]$ in modo tale che

$$(9) \quad |f_i(x, u_1(x), \dots, u_n(x)) - f_i(x, v_1(x), \dots, v_n(x))| \leq \frac{h_\varepsilon}{n M_i}, \quad \xi \leq x \leq \xi + \delta_1,$$

se

$$M_i = \sup_{(\xi, \xi + \delta)} |\omega_{u_i}(|w_1(x)|, \dots, |w_n(x)|)| \neq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ora, poichè, tenuto conto di quanto rilevato in nota ¹¹⁾, è

$$\begin{aligned} W(\xi + \delta_1) &= \int_{\xi}^{\xi + \delta_1} W'(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\xi}^{\xi + \delta_1} \omega_{u_i}(|w_1(t)|, \dots, |w_n(t)|) |w_i(t)|' dt \leq \sum_{i=1}^n M_i \int_{\xi}^{\xi + \delta_1} |w_i'(t)| dt \\ &= \sum_{i=1}^n M_i \int_{\xi}^{\xi + \delta_1} |f_i(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) - f_i(t, v_1(t), \dots, v_n(t))| dt, \end{aligned}$$

dalla (9) segue:

$$(10) \quad W(\xi + \delta_1) \leq \delta_1 h_1.$$

Allora, indicato con ξ_0 il punto $\xi + \delta_1$, la dimostrazione prosegue e si completa come nel caso del teorema II, facendo uso dell'ipotesi c) in luogo della b).

3. — Facciamo qualche osservazione:

A) Dalla stessa dimostrazione dei teoremi dei nn. precedenti risulta chiaro che nelle ipotesi poste in ciascuno di essi si può anche provare che il sistema differenziale (4) ammette al più una soluzione continua nel suo campo di esistenza e assolutamente continua in ogni intervallo non contenente il punto iniziale.

B) Nel teorema III in luogo dell'ipotesi di uniforme continuità delle $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, ($i = 1, \dots, n$), rispetto a (y_1, \dots, y_n) in un intorno di ogni punto di C, si può fare la seguente altra ipotesi meno restrittiva ¹⁴⁾:

¹⁴⁾ È inverso facile mostrare ciò. Detta k' la semidimensione dell'intorno di $P(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$ in cui le $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ sono uniformemente continue rispetto a (y_1, \dots, y_n) poniamo:

$$M_i' = \sup |\omega_{u_i}(u_1, \dots, u_n)|, \quad \text{per } 0 \leq u_i \leq 2k'$$

Ora se $M_i' \neq 0$, dato $h > 0$, per la citata proprietà delle f_i è possibile determinare un intorno di $P(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$ in modo tale che per (x, y_1, \dots, y_n) e (x, Y_1, \dots, Y_n) appartenenti a tale intorno risulti:

$$|f_i(x, y_1, \dots, y_n) - f_i(x, Y_1, \dots, Y_n)| \leq \frac{h}{nM_i'}, \quad i = 1, \dots, n$$

Tenuto conto di ciò e del fatto che:

$$\begin{aligned} &[\text{sign}(y_1 - Y_1)] \omega_{u_i}(|y_1 - Y_1|, \dots, |y_n - Y_n|) [f_i(x, y_1, \dots, y_n) - f_i(x, Y_1, \dots, Y_n)] \\ &\leq |\omega_{u_i}(|y_1 - Y_1|, \dots, |y_n - Y_n|)| |f_i(x, y_1, \dots, y_n) - f_i(x, Y_1, \dots, Y_n)|, \end{aligned}$$

segue subito che vale l'ipotesi d).

d) per ogni punto $P(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$ di C , dato $h > 0$ si può determinare un intorno destro di ξ ed un intorno di (η_1, \dots, η_n) in modo tale che risulti:

$$\sum_{i=1}^n [\text{sign}(y_i - Y_i)] \omega_{v_i}(|y_1 - Y_1|, \dots, |y_n - Y_n|) \cdot \\ \cdot [f_i(x, y_1, \dots, y_n) - f_i(x, Y_1, \dots, Y_n)] \leq h,$$

per quasi tutti gli x di detto intorno destro di ξ e per $(y_1, \dots, y_n), (Y_1, \dots, Y_n)$ appartenenti al detto intorno e tali che $\sum_{k=1}^n |y_k - Y_k| > 0$.

Invero, tenuto conto della nota ¹¹⁾, si ha:

$$W(\xi + \delta_1) = \int_{\xi}^{\xi + \delta_1} \sum_{i=1}^n \omega_{v_i}(|w_1(t)|, \dots, |w_n(t)|) |w_i(t)|' dt \\ = \int_{\xi}^{\xi + \delta_1} \sum_{i=1}^n [\text{sign } w_i(t)] \omega_{v_i}(|w_1(t)|, \dots, |w_n(t)|) [f_i(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) - \\ - f_i(t, v_1(t), \dots, v_n(t))] dt,$$

e di qui per l'ipotesi d) si ricava ancora la (10).

C) Rileviamo che nel caso di $n = 1$ i teoremi II e III danno due criteri di unicità che comprendono rispettivamente due teoremi dati da CA-
FIERO ¹⁵⁾.

Invero per $n = 1$ la (8) dell'ipotesi a') diventa:

$$(11) \quad [\text{sign}(y - Y)] \omega'(y - Y) [f(x, y) - f(x, Y)] \leq F_F(x, \omega(|y - Y|)),$$

e preso

$$\omega(u) = u, \quad u \geq 0$$

la (11) fornisce:

$$[\text{sign}(y - Y)] [f(x, y) - f(x, Y)] \leq F_F(x, |y - Y|),$$

e cioè per $y > Y$ risulta:

$$f(x, y) - f(x, Y) \leq F_F(x, y - Y),$$

per quasi tutti gli x in un intorno destro di ξ e per y e Y appartenenti ad

¹⁵⁾ Cfr. loco cit. in ⁶⁾.

un intorno di η . E quest'ultima è proprio l'ipotesi fatta da CAFIERO nei teoremi di unicità citati in ¹⁵⁾.

D) Se si cerca di soddisfare alle ipotesi del teorema II con funzioni del tipo:

$$(12) \quad \begin{aligned} \omega(u_1, \dots, u_n) &= (u_1^p + \dots + u_n^p)^\alpha, \quad 0 \leq u_i < +\infty, \quad i = 1, \dots, n, \\ F(x, u) &= \varphi(x) \gamma(u), \end{aligned}$$

con α e p reali e tali da essere $\alpha > 0$ e $p \geq 1$, $\varphi(x)$ funzione sommabile in ogni intervallo del tipo $(x_0 + \delta, x_0 + a)$, ($0 < \delta < a$), e $\gamma(u)$ funzione continua e positiva per $u > 0$ e tali che per ogni fissato $\varepsilon > 0$ si possa determinare un $h_\varepsilon > 0$ in modo che si abbia:

$$\int_{a_1}^{a_2} \varphi(x) dx \leq \int_{h_\varepsilon}^\varepsilon \frac{du}{\gamma(u)}, \quad x_0 + \delta \leq a_1 < a_2 \leq x_0 + a,$$

e se si suppone, infine, la (8) verificata per tutte le coppie (x, y_1, \dots, y_n) , (x, Y_1, \dots, Y_n) appartenenti a C e sempre con $\sum_{k=1}^n |y_k - Y_k| > 0$ allora si ottiene un criterio di unicità che contiene, come caso particolare, uno stabilito da ZWIRNER ¹⁶⁾.

E) Mostriamo, ora, che il teorema I contiene il criterio di unicità di KAMKE ¹⁷⁾, che si enuncia così:

Sia $\gamma(x, u)$ una funzione continua e non negativa definita per $x_0 < x < x_0 + a$ e $u \geq 0$, e si supponga che per ogni fissato α , con $0 < \alpha < a$, la funzione $u(x) \equiv 0$ sia l'unica soluzione dell'equazione:

$$(13) \quad u' = \gamma(x, u) \quad x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha,$$

per la quale si ha: $u(x_0) = u'(x_0) = 0$.

¹⁶⁾ Cfr. loco cit. in 7). Osserviamo che se $p > 1$, ponendo:

$$\omega^{(1)}(u_1, \dots, u_n) = \omega(|u_1|, \dots, |u_n|), \quad |u_i| < +\infty, \quad i = 1, \dots, n,$$

dove ω è la funzione data in (12), la (8) si muta nella seguente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \omega_{u_i}^{(1)}(y_1 - Y_1, \dots, y_n - Y_n) [f_i(x, y_1, \dots, y_n) - f_i(x, Y_1, \dots, Y_n)] \\ \leq \varphi(x) \gamma[\omega^{(1)}(y_1 - Y_1, \dots, y_n - Y_n)], \end{aligned}$$

e se poi $p = 2$ si ottiene il citato criterio di ZWIRNER.

¹⁷⁾ Cfr. [11].

Allora, se per $(x, y_1, \dots, y_n), (x, Y_1, \dots, Y_n) \in C$ con $x \neq x_0$, si ha:

$$(14) \quad \sum_{i=1}^n |f_i(x, y_1, \dots, y_n) - f_i(x, Y_1, \dots, Y_n)| \leq \gamma(x, \sum_{k=1}^n |y_k - Y_k|),$$

esiste al più una soluzione, continua e derivabile, per $x_0 \leq x < x_0 + a$, del sistema (4).

Rileviamo subito che in base alla (14) l'ipotesi a) del teorema I è certamente verificata, allora resta da provare che per la funzione $\gamma(x, u)$ è verificata l'ipotesi b).

Mostriamo che, nelle ipotesi fatte, per ogni fissato x'_0 interno a $(x_0, x_0 + a)$ e α con $x'_0 - x_0 < \alpha < a$ il sistema differenziale:

$$(15) \quad \begin{cases} u' = \gamma(x, u) \\ u(x'_0) = 0 \end{cases} \quad x'_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$$

ammette l'unica soluzione $u(x) \equiv 0$, per $x'_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$.

Infatti, poichè per le ipotesi poste è $\gamma(x, 0) = 0$ per $x_0 < x < x_0 + a$, per ogni funzione derivabile $u(x)$ soluzione del sistema (15) si ha:

$$u'(x'_0) = 0,$$

e quindi la funzione:

$$v(x) \begin{cases} \equiv 0 \\ = u(x) \end{cases} \quad \begin{cases} \text{per } x_0 \leq x \leq x'_0 \\ \text{per } x'_0 \leq x \leq x_0 + \alpha, \end{cases}$$

la quale è continua e derivabile in tutto l'intervallo $(x_0, x_0 + \alpha)$, risulta soluzione della (13) per $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$ e tale che $v(x_0) = v'(x_0) = 0$, quindi è $v(x) \equiv 0$ per $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$, per cui è $u(x) \equiv 0$ per $x'_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$.

Di qui, tenuto conto di un teorema stabilito da CAFIERO¹⁸⁾, ne viene subito che la funzione $\gamma(x, u)$ verifica l'ipotesi b) del teorema I.

F) È ovvio che si possono enunciare teoremi di unicità analoghi ai teoremi I, II e III e relativi alle soluzioni assolutamente continue del sistema (4) definite nell'intervallo $x_0 - a \leq x \leq x_0$.

¹⁸⁾ Cfr. F. CAFIERO, Su di un teorema di MONTEL relativo alla continuità, rispetto al punto iniziale, dell'integrale superiore ed inferiore di una equazione differenziale, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XVII (1948), 186-200; cfr. anche osservazione fatta in loco cit. in ⁵⁾, I, § 3, n. 2, 29-30.

BIBLIOGRAFIA

- [1] U. BARBUTI. *Sull'integrale massimo e minimo e sull'unicità della soluzione delle equazioni e dei sistemi differenziali del primo ordine*. Rend. Acc. Naz. Lincei, (8), 3 (1947), 272-276.
- [2] V. S. BARROSO. *On the uniqueness of the solutions of a system of ordinary differential equations in the classical case (and in the real domain)*. Gaz. Mat. Lisboa, 6 n. 25 (1945), 6-8.
- [3] F. BAUER. *A note on uniqueness and convergence of successive approximations*. Can. Math. Bulletin, 2 (1959), 5-8.
- [4] F. BRAUER and S. STERNBERG. *Local uniqueness, existence in large, and the convergence of successive approximations*. Amer. J. Math., 80 (1958), 421-430.
- [5] F. BRAUER. *Some results on uniqueness and successive approximations*. Canad. J. Math., 11 (1959), 527-533.
- [6] J. DIEUDONNÉ. *Sur la convergence des approximations successives*. Bull. Sci. Math., (2), 69 (1945), 62-72.
- [7] L. FRANCHINI. *Criteri di unicità per gli integrali di un sistema di equazioni differenziali ordinarie*. Annali dell'Università di Ferrara, (Nuova serie), Sez. VII, Scienze Matematiche, II (1953), 53-69.
- [8] L. GIULIANO. *Sull'unicità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie*. Boll. Un. Mat. It., (2), 2 (1940), 221-227.
- [9] L. GIULIANO. *Su un notevole teorema di confronto e su un teorema di unicità per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie*. Rend. R. Acc. Italia, (7), 1 (1940), 330-336.
- [10] K. HAYASHI and T. YOSCHIZAWA. *New treatise of solutions of a system of ordinary differential equations and its application to the uniqueness theorems*. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A. Math., 26 (1950), 225-233.
- [11] E. A. KAMKE. *Differentialgleichungen reeller Funktionen*. Leipzig, (1930), § 78, 139-140.
- [12] E. R. van KAMPEN. *Notes on systems of ordinary differential equations*. Am. J. Math., 63 (1941), 371-373.
- [13] M. A. KRASOSEL'SKII and S. G. KREĬN. *Non local existence theorems and uniqueness theorems for systems of ordinary differential equations*. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.), 102 (1955), 13-16 (Russian).
- [14] M. A. KRASNOSEL'SKII and S. G. KREĬN. *On a class of uniqueness theorems for the equation $y' = f(x, y)$* . Uspehi Mat. Nauk (N.S.), 11 (1956), 209-213 (Russian).
- [15] J. LA SALLE. *Uniqueness theorem and successive approximations*. Ann. of Math., (2), 50 (1949), 722-730.
- [16] E. J. MC SHANE. *On the uniqueness of the solutions of differential equations*. Bull. Am. Math. Soc., 45 (1939), 755-757.
- [17] M. MÜLLER. *Ueber die Eindeutigkeit der Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen und die konvergenz einer Gattung von Verfahren zur Approximation dieser Integrale*. Sitz. der Heidelberger Ak. Wiss. Math. nat. klasse, 1927, 9, pag. 38.
- [18] H. OKAMURA. *Sur l'unicité des solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires*. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A. Math., 23 (1941), 225-231.
- [19] H. OKAMURA. *Condition nécessaire et suffisante remplie pour les équation différentielles ordinaires sans points de PEANO*. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A. Math., 24 (1942), 21-28.
- [20] O. PERRON. *Ueber Ein- und Mehrdeutigkeit des Integrals eines Systems von Differentialgleichungen*. Math. Ann., 95 (1926), 98-101.

- [21] A. PHILIPPOV. *Sufficient conditions for uniqueness and non-uniqueness of solutions of differential equations*. C. R. (Doklady), Acad. Sc. URSS (N.S.), 60 (1948), 549-552 (Russian).
- [22] A. P. PLEHOTIN. *Theorem on the existence and uniqueness of the solution of a boundary value problem for a system of ordinary differential equations*. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.), 123 (1958), 613-615 (Russian).
- [23] A. PLIS and T. WAZEWSKI. *A uniqueness condition with a standard differential equation without uniqueness property*. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys., 6 (1958), 145-148.
- [24] A. ROSENBLATT. *Sull'unicità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie*. Rend. Acc. Naz. Lincei, (6), 8 (1928), 41-45.
- [25] G. ZWIRNER. *Sulle condizioni sufficienti per l'unicità degli integrali di un sistema di equazioni differenziali*. Rend. Sem. Mat. Univ. Roma, (IV), 1 (1936-37), 235-252.
- [26] G. ZWIRNER. *Criteri d'unicità per gli integrali d'un sistema di equazioni differenziali ordinarie*. Rend. Sem. Mat. Padova, 11 (1940), 90-96.

RIASSUNTO. — Vengono stabiliti nuovi criteri di unicità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali. Uno di tali criteri, i quali, peraltro, costituiscono una estensione di alcuni teoremi dati da CAFIERO per una sola equazione differenziale, generalizza un risultato di KAMKE e uno di ZWIRNER.

SUMMARY. — New criteria of uniqueness of the solutions of a system of differential equations are fixed. One of such criteria, that, however, are an extension of some theorems given by CAFIERO for one differential equation only, generalizes a result given by KAMKE and a result given by ZWIRNER.

Ricerche sulla zeolitizzazione dei vetri vulcanici per trattamento idrotermale.

Nota IX. Zeolitizzazione di ossidiane leuco-fonolitiche artificiali.

*Nota del prof. Riccardo Sersale,
presentata dal socio ord. G. Malquori*

(Adunanza del dì 6 maggio 1961)

Nella serie di vetri vulcanici di differente tipo mineralogico e chimico ¹⁾, che sottopongo ad azioni idrotermali con lo scopo di rilevare le modificazioni costituzionali e strutturali che ad esse azioni fanno seguito, l'ossidiana *leuco-fonolitica* viene a collocarsi fra quelle che derivano dalla fusione e successiva tempra di rocce francamente alcaline e, per precisare, rappresenta, fra dette ossidiane, il termine meno basico, seguito dalla *leucotefritica* ²⁾ e da quella *leucititica*, più basiche, rispettivamente.

Com'è noto ³⁾, con il nome di *fonoliti* si indicano quelle rocce i cui costituenti mineralogici essenziali risultano essere il sanidino e la nefelina. Prevalendo il primo, si hanno rocce che si riconnettono con le trachiti alcaline (*fonoliti trachitoidi*); se prevale invece la seconda, si hanno le *fonoliti nefelinitoidi*. Fra questi due ultimi tipi di rocce esiste tutta una serie continua di passaggi gradualì.

Alla famiglia delle *fonoliti* sono, però, da ricondurre pure rocce nelle quali al sanidino, in luogo della *nefelina*, è associata la *leucite*, donde il nome di *leuco-fonoliti*. Esse possono pertanto considerarsi come collegate con

¹⁾ SERSALE R. *Ricerche sulla zeolitizzazione dei vetri vulcanici per trattamento idrotermale*. Nota I. *Herschelite da vetro ricavato attraverso la fusione di roccia eminentemente sanidinica*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., [4], XXVI, pp. 15-21. Napoli, 1959. — Nota II. *Zeolitizzazione di ossidiane leucotefritiche artificiali*. Ibidem, [4], XXVI, pp. 154-166. Napoli, 1959. — Nota III. *Analcimizzazione di ossidiane basaltiche artificiali*. Ibidem, [4], XXVI, pp. 333-344. Napoli, 1959. — Nota IV. *Analcimizzazione di materiali piroclastici, alcalitrachitici*. Ibidem, [4], XXVI, pp. 345-354. Napoli, 1959. — Nota V. *Analcimizzazione di un'ossidiana artificiale, ricavata attraverso la fusione dell'haitynofro di Melfi*. Ibidem, [4], XXVI, pp. 394-404. Napoli, 1959. — Nota VI. *Zeolitizzazione delle pomici e delle « pozzolane » del Vesuvio*. Ibidem, [4], XXVI, pp. 423-440. Napoli, 1959. — Nota VII. *Analcimizzazione di ossidiane riolitiche*. Ibidem, [4], XXVII, pp. 595-609. Napoli, 1960. — Nota VIII. *Zeolitizzazione di ossidiane trachi-andesitiche artificiali*. Ibidem, [4], XXVI, pp. 171-186. Napoli, 1961.

²⁾ SERSALE R. L. c. a nota ¹⁾. Nota II.

³⁾ ARTINI E. *Le Rocce*, pag. 421. Milano, Hoepli, 1959.

le trachiti leucitiche, con la differenza che la leucite, in luogo che costituente accessorio, è questa volta costituente essenziale. Una tale precisazione può aiutare il lettore a localizzare l'ossidiana che è oggetto di studio, nella serie di vetri che ho finora presi in considerazione e può render conto del criterio al quale ci si è uniformati nella sua scelta. Si è infatti ritenuto interessante rilevare il comportamento, sotto trattamento idrotermale in condizioni normalizzate, di un vetro ricavato da una roccia, la quale, francamente alcalina, pure rappresenta il termine più prossimo alle trachiti alcaline (acide).

Quanto a composizione chimica, le *leuco-fonoliti* sono corrispondentemente caratterizzate da un tenore di silice non troppo elevato, da un alto tenore d'allumina e, particolarmente, di potassio, nonché da una scarsità, piuttosto notevole, di calcio e di magnesio.

Il campione di roccia dal quale, con la tecnica descritta nelle precedenti note ⁴⁾, si è ricavata l'ossidiana corrispondente, è stato prelevato dal Prof. SCHERILLO e dallo scrivente dalle formazioni sotto Poggio Muratella, lungo la strada che conduce da Trevignano a Bracciano, circondando l'omonimo lago.

L'analisi chimica di detto campione compare in tab. I, accanto a quella del medesimo campione sottoposto a trattamento di fusione e tempra, indispensabile all'ottenimento di un vetro da poter sottoporre ad azioni idrotermali.

Può constatarsi che i dati analitici relativi alla *leuco-fonolite* tal quale,

TABELLA I.
(percentuale sul secco a 105°C)

	Leuco-fonolite	Ossidiana leuco-fonolitica (per fusione e tempra della leuco-fonolite)
SiO ₂	56,25	56,43
Al ₂ O ₃ (+TiO ₂ + Mn ₂ O ₄ + P ₂ O ₅)	22,55	22,03
Fe ₂ O ₃	2,97	0,36
FeO	1,27	2,92
MgO	0,40	0,66
CaO	2,90	3,31
Na ₂ O	5,49	5,73
K ₂ O	7,85	8,40
H ₂ O ⁺	0,84	ass.
CO ₂	tr.	ass.
	100,52	99,84

⁴⁾ SERSALE R. L. c. a nota ¹⁾.

concordano con quelli segnalati da precedenti sperimentatori⁵⁾ per la medesima roccia.

I risultati dell'indagine ottica, eseguita con lo scopo di qualificare con tutta sicurezza il campione di partenza, compaiono poi in tav. I, la quale sottolinea la presenza dei costituenti mineralogici che contraddistinguono le *leuco-fonoliti*.

Si riconosce, infatti, la leucite: con geminazione polisintetica (microfotografia n° 1), con calcite in venule (microfotografia n° 2), parzialmente trasformata in pseudoleucite (microfotografia n° 3), nonché il sanidino (microfotografia n° 4).

Sono altresì riconoscibili, fra i costituenti accessori, il pirosseno (microfotografia n° 5) ed il plagioclasio (microfotografia n° 6).

Dal campione di *leuco-fonolite* in oggetto si è ricavato il vetro corrispondente, con le stesse modalità operative descritte nelle precedenti note⁶⁾. La tab. I, seconda colonna, mostra che — a parte l'aumento del tenore di ferro ferroso a scapito di quello ferrico, ad opera dell'ambiente riducente del forno fusorio — non si registrano variazioni di rilievo, nei limiti degli errori sperimentali, fra la composizione della roccia tal quale e la composizione dell'ossidiana da essa ricavata.

Il vetro *leuco-fonolitico* ottenuto è stato, come quelli di differente tipo precedentemente adoperati, sottoposto a trattamento idrotermale, in condizioni fisiche: dapprima moderate e successivamente più severe, adoperando come soluzione di contatto: prima la soluzione diluita di idrossido di potassio e poi quella di idrossido di sodio. I solidi ottenuti, accuratamente lavati fino ad eliminazione della reazione alcalina e convenientemente essiccati, sono stati sottoposti alle indagini che hanno consentito il rilevamento delle modificazioni strutturali e costituzionali, secondo quanto quì di seguito esposto.

I risultati dell'analisi chimica, relativi al gruppo di esperienze effettuate in ambiente potassico, compaiono in tab. II.

Si noti il calo del titolo di silice per effetto del trattamento in ambiente alcalino, l'aumento del tenore di potassio con conseguente diminuzione di quello di sodio, data la natura della soluzione alcalina adoperata (KOH 1%), nonché il discreto quantitativo di acqua fissata stabilmente, quantitativo che, come sempre, decresce al crescere dell'intensità del trattamento idrotermale cui si sottopone il vetro originario.

L'espulsione, poi, della surricordata acqua avviene, come mostra la fig. 1, con andamento del tutto regolare, senza cioè presenza di punti singolari nel diagramma di disidratazione termica del solido.

Corrispondentemente l'indagine roentgenografica ha consentito di rilevare che, anche questa volta, il vetro originario, ad opera del trattamento idro-

⁵⁾ SCHERILLO A. *Studi petrografici sulla regione Sabazia*. Per. Min., 4, pp. 267- 300. Roma, 1933.

⁶⁾ SERSALE R. L. c. a nota ¹⁾.

TABELLA II.

(percentuale sul secco a 105°C)

Ossidiana leuco-fonolitica sottoposta a trattamento idrotermale in presenza di soluzione di KOH all'1%.

	p=60 Kg/cm ² ; t=280°C.	p=120 Kg/cm ² ; t=330°C.	p=200 Kg/cm ² ; t=375°C.
SiO ₂	52,17	52,85	53,02
Al ₂ O ₃ (+TiO ₂ +P ₂ O ₅ +Mn ₂ O ₄)	21,14	21,42	21,45
Fe ₂ O ₃	1,86	1,60	1,19
FeO	1,30	2,03	2,19
MgO	0,50	0,34	0,33
CaO	3,30	3,26	2,97
Na ₂ O	3,90	4,73	4,84
K ₂ O	9,31	9,89	10,49
H ₂ O ⁺	6,02	3,67	3,43
	99,50	99,79	99,91
	(cfr.: fig. 1 (1); fig. 2 (B)).		(cfr.: fig. 1 (2); fig. 2 (C)).

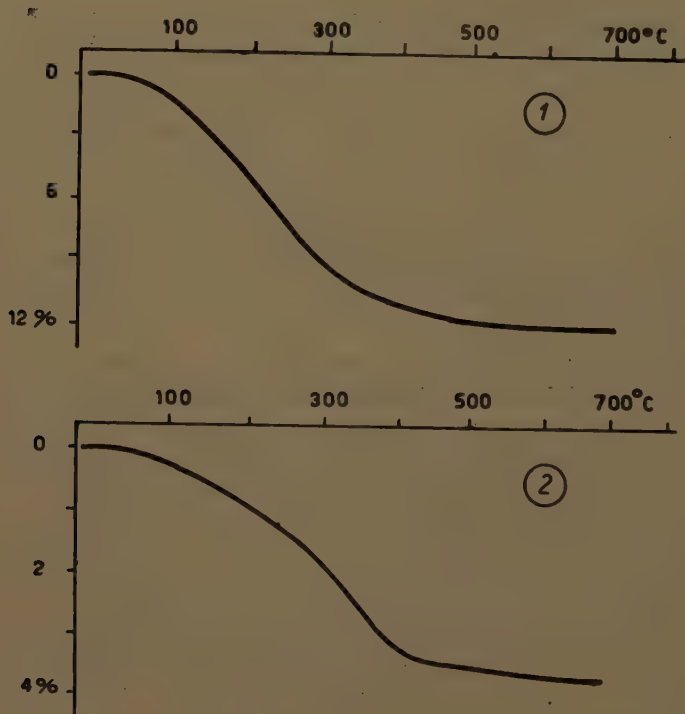


Fig. 1. — Diagrammi perdita di peso/temperatura.
(1) Solido di cui all'analisi chimica in tab. II, prima colonna
(2) Solido di cui all'analisi chimica in tab. II, terza colonna.

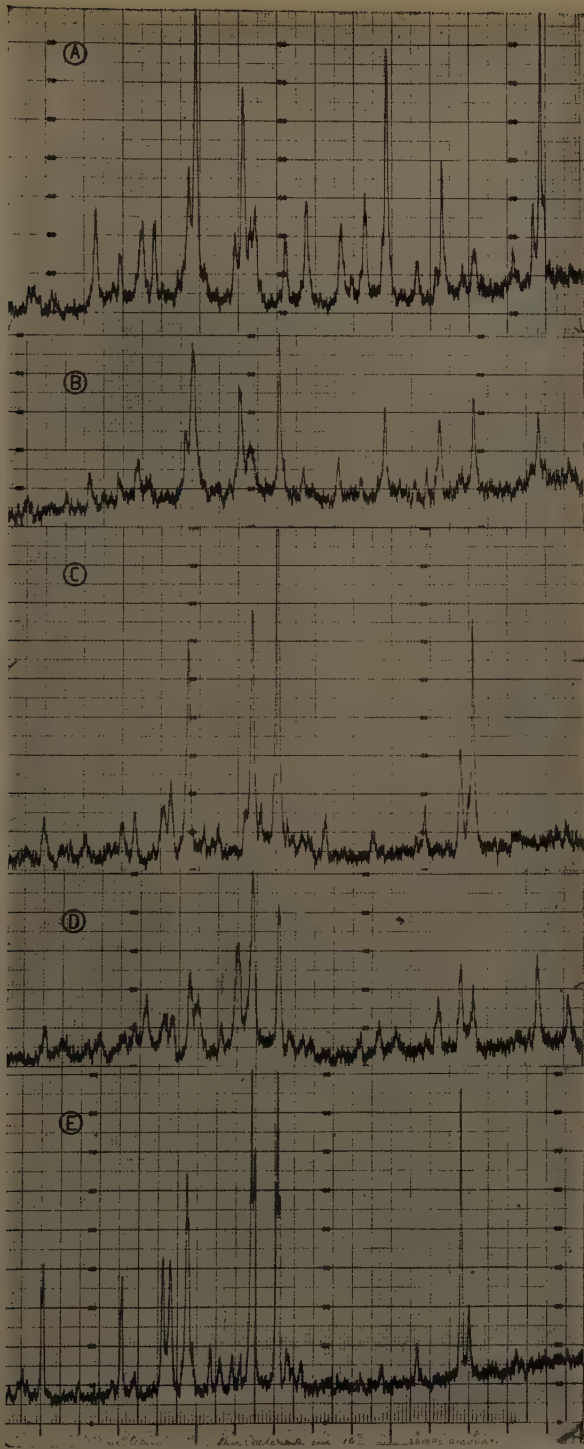


Fig. 2. — Radiaz. $\text{Cu K}\alpha$. Zona compresa fra 5 e 20° Θ .

termale in condizioni di temperatura e pressione moderate ($\sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $\sim 280^\circ\text{C}$), ha subito un processo di zeolitizzazione. Il termine zeolitico predominante che ha preso origine a seguito delle surricordate azioni idrotermali è risultato esser: l'*herschelite*, come mostra la fig. 2.

Il computo delle linee del diffrattogramma (B) in fig. 2 ha permesso altresì di riconoscere, accanto alle linee attribuite allo spettro dell'*herschelite* (diffrattogramma (A)), la presenza di alcune linee appartenenti allo spettro della *leucite*. Una tale affermazione è convalidata dal fatto che nelle medesime condizioni ambientali e per solo incremento delle condizioni fisiche che regolano il trattamento idrotermale ($120 \div 200 \text{ Kg/cm}^2$; $330 \div 375^\circ\text{C}$), il vetro originario fornisce un diffrattogramma (C) il cui esame consente di stabilire la scomparsa delle linee dello spettro dell'*herschelite* e la presenza di quelle appartenenti allo spettro della *leucite* (cfr. fig. 2, (E)).

Si constata quindi che, quanto a comportamento al trattamento di zeolitizzazione in ambiente debolmente potassico, non si registrano divergenze sostanziali fra il vetro *leuco-fonolitico* e quello *alcali-trachitico*⁷⁾ studiato in precedenza, se si eccettua la spiccata tendenza nel primo alla cristallizzazione della *leucite*, come del resto era prevedibile.

Sempre in ambiente potassico, per incremento delle condizioni fisiche — e pertanto per valori di pressione e di temperatura superiori a quelli compatibili con il decorso del surricordato processo di zeolitizzazione — si registra invece una nettissima diversità di comportamento fra i due tipi di vetri or ora nominati. L'evoluzione del vetro *leuco-fonolitico* procede nel senso della formazione di *leucite*, mentre il vetro *alcali-trachitico* si ordina nell'assetto strutturale dell'*ortoclasio*, termine intermedio di tale passaggio essendo l'*analcime*.

La tab. III dà conto delle variazioni di composizione chimica che il vetro *leuco-fonolitico* accusa dopo trattamento idrotermale nelle stesse condizioni fisiche più sopra indicate, ma in presenza di soluzione di idrossido di sodio, anzicchè di potassio, quale liquido di contatto.

I dati analitici pongono, anche questa volta, in rilievo il decremento del titolo di silice rispetto a quello del vetro originario. A tale decremento fa riscontro la fissazione di un discreto quantitativo di acqua, nonchè l'aumento del titolo di sodio, in dipendenza della natura chimica della soluzione di contatto adoperata per il trattamento idrotermale.

I diagrammi perdita di peso/temperatura, relativi ai solidi a fine esperienza di cui alla tab. III, indicano inoltre, come risalta dalla fig. 3, che l'espulsione termica dell'acqua stabilmente fissata dai solidi avviene con andamento del tutto regolare.

⁷⁾ SERSALE R. *Genesi e costituzione del tufo giallo napoletano*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., [4], XXV, pp. 181-207. Napoli, 1958.

— SERSALE R. L. c. a nota ¹⁾. Nota I.

TABELLA III.

(percentuale sul secco a 105°C)

Ossidiana leuco-fonolitica sottoposta a trattamento idrotermale in presenza di soluzione di NaOH all'1%.

	p= 60 Kg/cm ² ; t= 280°C.	p= 120 Kg/cm ² ; t= 330°C.	p= 200 Kg/cm ² ; t= 375°C.
SiO ₂	51,68	51,97	52,35
Al ₂ O ₃ (+TiO ₂ +P ₂ O ₅ +Mn ₃ O ₄)	20,96	21,49	21,27
Fe ₂ O ₃	1,98	1,79	1,49
FeO	1,34	1,74	1,90
MgO	0,47	0,41	0,39
CaO	3,09	3,44	3,34
Na ₂ O	8,91	8,28	8,53
K ₂ O	5,05	6,09	6,11
H ₂ O ⁺	6,51	5,14	4,73
	99,99 (cfr.: fig. 3 (3); tav.: II (2)).	100,35 (cfr.: tav. II (3))	100,11 cfr.: fig. 3 (4); tav.: II (4)).

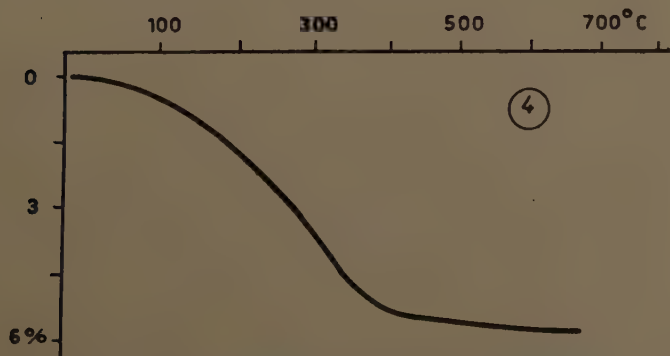
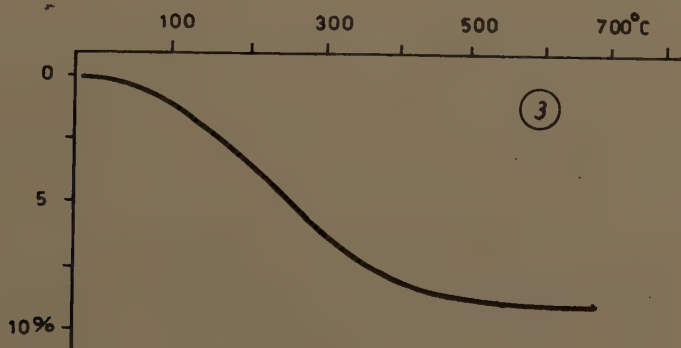


Fig. 3. — Diagrammi perdita di peso/temperatura.

(3) Solido di cui all'analisi chimica in tab. III, prima colonna.

(4) Solido di cui all'analisi chimica in tab. III, terza colonna.

Le indagini roentgenografiche relative ai solidi di cui alla tab. III — in armonia con le modificazioni di composizione rilevate mediante analisi chimica e con il comportamento alla disidratazione termica — hanno infine consentito di stabilire che, come tutti i tipi di vetri della serie finora studiata, anche il vetro *leuco-fonolitico* per trattamento idrotermale in ambiente sodico ed in condizioni fisiche normalizzate, si zeolitizza ad *analcime*.

Lo spettrogramma n° 2 in tav. II si riferisce infatti al vetro originario — cfr. spettrogramma n° 1 della medesima tav. II —, dopo trattamento idrotermale alla pressione di ~ 60 Kg/cm², alla temperatura di $\sim 280^\circ\text{C}$, in presenza di soluzione all'1% di NaOH. Gli spettrogrammi n.ri 3 e 4 sono invece stati ottenuti per trattamento del medesimo vetro, nello stesso ambiente, ma in condizioni fisiche più severe e, per precisare, alla pressione di ~ 120 Kg/cm², $t = \sim 330^\circ\text{C}$ ed alla pressione di ~ 200 Kg/cm², $t = \sim 375^\circ\text{C}$, rispettivamente.

Come può chiaramente rilevarsi dalla documentazione riportata in tav. II e com'è stato confermato mediante computo dei relativi spettrogrammi (cfr. anche tab. IV), i solidi a fine esperienza forniscono tutti uno spettrogramma analogo a quello dell'*analcime* (n° 7 della tav. II). Negli spettrogrammi relativi ai trattamenti idrotermali effettuati in condizioni fisiche più severe, si registra altresì la presenza di alcune righe attribuibili allo spettro dell'ortoclasio, in conformità di quanto sempre è stato constatato.

Pertanto, per quanto attiene al trattamento idrotermale del vetro *leuco-fonolitico* in ambiente sodico ed in condizioni fisiche normalizzate, il comportamento risulta del tutto simile a quello precedentemente rilevato per il vetro *alcali-trachitico*.

A conferma di quanto fin qui asserito in riguardo alla zeolitizzazione del vetro *leuco-fonolitico*: ad *herschelite* in ambiente potassico e ad *analcime* in quello sodico, ho creduto utile procedere anche alla valutazione della capacità di scambio basico da parte dei relativi solidi. Pertanto, in tab. V riporto i dati analitici desunti dalle determinazioni eseguite, dati sulla base dei quali è stata ricavata la rappresentazione grafica in fig. 4.

Può constatarsi che il comportamento del vetro *leuco-fonolitico* zeolitizzato: ad *herschelite* o ad *analcime* denuncia, attraverso l'acquisita capacità di scambio di ioni, l'avvenuta trasformazione nel senso indicato.

Risalta altresì la diminuzione di tale capacità per quei solidi ottenuti a seguito di trattamento idrotermale del vetro *leuco-fonolitico* in condizioni fisiche più severe, in armonia con quanto più sopra dettagliatamente esposto, nonchè, com'è ovvio, l'assenza della suddetta capacità per il vetro non trattato.

Ho infine, come sempre, voluto sottolineare gli effetti della variazione di concentrazione della soluzione di contatto adoperata, sulla struttura e sulla costituzione dei solidi ottenibili per trattamento idrotermale del vetro

TABELLA IV.

Analcime (Somma-Vesuvio).		Solido di cui allo spettro- trog. n° 2, tav. II.		Solido di cui allo spettro- trog. n° 3, tav. II.		Solido di cui allo spettro- trog. n° 4, tav. II.		Ossidiana leuco-fonolitica, dopo tratt. idrot. a p=120 Kg/cm ² , t=330°C; liquido di contatto: H ₂ O.	
Intensità	d in Å	Intensità	d in Å	Intensità	d in Å	Intensità	d in Å	Intensità	d in Å
f	5,60	f	5,64	f	5,62	f	5,62	f	5,60
ff	3,42	ff	3,44	ff	3,43	ff	3,43	ff	3,42
mf	2,92	mf	2,93	mf	2,93	mf	2,92	mf	2,92

ff = fortissima; f = forte; mf = media forte.

leuco-fonolitico. Ho pertanto eseguite due esperienze in condizioni fisiche identiche a quelle nelle quali ho conseguita la zeolitizzazione ad *herschelite* del vetro in istudio ($p = \sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 280^\circ\text{C}$), ma sostituendo la soluzione d'idrossido di potassio all'1% con quella al 3% o con la sola acqua, alternativamente.

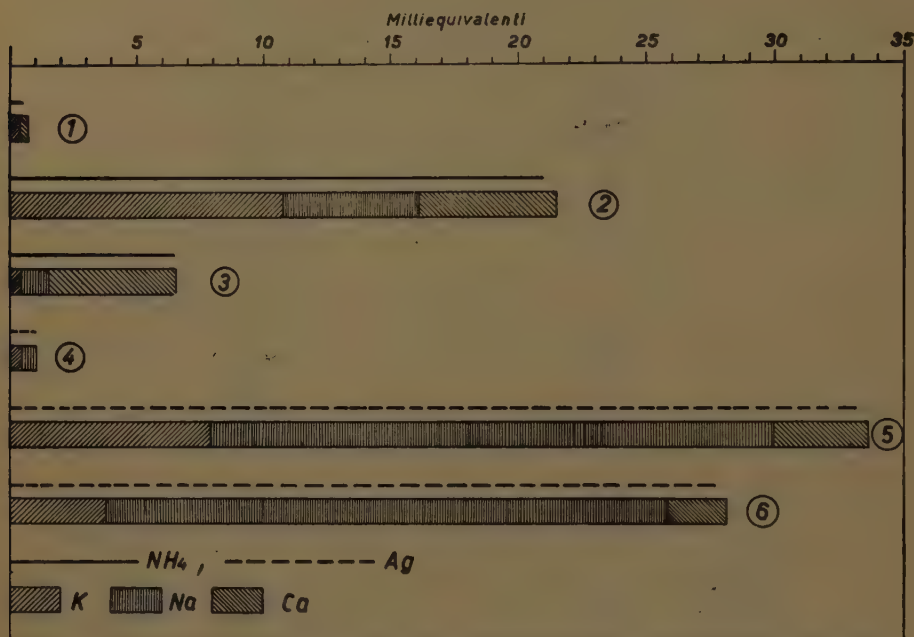


Fig. 4. — Rappresentazione dei risultati delle prove di scambio basico, di cui alla tab. V.

In presenza di sola acqua, inoltre, ho anche valutati gli effetti dell'incremento dei fattori fisici, regolandoli su valori di $\sim 120 \text{ Kg/cm}^2$ di pressione e di $\sim 339^\circ\text{C}$ di temperatura.

Ho constatato che l'aumento di titolo d'idrossido di potassio della soluzione di contatto, ferme restando le condizioni fisiche ai valori prescelti per la zeolitizzazione ad *herschelite* del vetro *leuco-fonolitico* ($p = \sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 280^\circ\text{C}$), si rivela fattore contrario al decorso del processo nella suddetta direzione (zeolitizzazione). Come infatti è stato stabilito in base all'indagine roentgenografica e come può rilevarsi dalla documentazione relativa in fig. 2, le linee più intense del diffrattogramma (D), ottenuto per trattamento del vetro in istudio nelle condizioni ora ricordate, appartengono allo spettro della *leucite*. Quelle relative allo spettro dell'*herschelite*, a differenza di quanto accertato per il diffrattogramma (B) nella stessa fig. 2, relativo alla identica esperienza effettuata adoperando invece come liquido di contatto la soluzione di KOH all'1%, anzicchè al 3%, sono ora di bassa intensità.

TABELLA V.

CAPACITÀ DI SCAMBIO BASICO.

(valutata con soluzioni N/10 di cloruro d'ammonio o di nitrato d'argento).

	Materiale di partenza	Milliequivalenti rimossi dalla soluzione		Milliequivalenti passati in soluzione			Totale milliequivalenti scambiati
				K	Na	Ca	
1	Ossidiana leuco-fonolitica (fusa e temprata).	NH ₄	0,61	0,46	0,28	tr.	0,74
2	La stessa, dopo tratt. idrot. a p = 5 60 Kg/cm ² ; t = 5 280°C; sol. KOH 1%.	NH ₄	21,14	10,80	5,28	5,42	21,50
3	n° 1, dopo tratt. idrot. a p = 5 200 Kg/cm ² ; t = 5 375°C; sol. KOH 1%.	NH ₄	6,47	0,44	1,04	5,00	6,48
4	Ossidiana leuco-fonolitica (fusa e temprata).	Ag	0,89	0,44	0,60	ass.	1,04
5	n° 4, dopo tratt. idrot. a p = 5 60 Kg/cm ² ; t = 5 280°C; sol. NaOH 1%.	Ag	33,10	7,92	22,00	3,65	33,57
6	n° 4, dopo tratt. idrot. a p = 5 200 Kg/cm ² ; t = 5 375°C; sol. NaOH 1%.	Ag	27,81	3,80	22,00	2,28	28,08

L'analisi chimica relativa al solido in parola compare in tab. VI. Si noti l'aumento del titolo di potassio, nonchè il calo dell'acqua stabilmente fissata, in raffronto con i medesimi dati rilevati per il solido ottenuto per trattamento idrotermale in presenza di soluzione di KOH all'1% (cfr. tab. II, prima colonna).

L'impiego della sola acqua quale liquido di contatto comporta infine, a pressioni e temperature moderate (p = 5 60 Kg/cm²; t = 5 280°C), l'incipiente *analcimizzazione* del vetro leuco-fonolitico (cfr. spettrogramma (5) in tav. II e tab. IV).

Nelle medesime condizioni ambientali detta *analcimizzazione* diviene più compiuta per semplice incremento dei fattori fisici (p = 5 120 Kg/cm²; t = 5 330°C) e, come è stato stabilito in base allo spettrogramma n° 6 in tav. II è accompagnata, come al solito, da incipiente feldspatizzazione ad ortoclasio.

* * *

L'insieme delle risultanze sperimentali converge nell'indicare che il trattamento idrotermale, in condizioni moderate di pressione e di tempera-

TABELLA VI.

(percentuale sul secco a 105°C).

Ossidiana leuco-fonolitica sottoposta a trattamento idrotermale in presenza di soluzione di KOH al 3%, a $p = \sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 280^\circ\text{C}$.

SiO ₂	50,78
Al ₂ O ₃ (+ TiO ₂ + Mn ₂ O ₄ + P ₂ O ₅)	20,88
Fe ₂ O ₃	1,66
FeO	1,79
MgO	0,37
CaO	3,41
Na ₂ O	2,59
K ₂ O	14,79
H ₂ O ⁺	4,17
	<hr/> 100,44

tura $p = \sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 280^\circ\text{C}$.) ed in ambiente debolmente alcalino per idrossido di potassio (KOH 1%), comporta la zeolitizzazione ad *herschelite* del vetro *leuco-fonolitico*. Il tenore, assai basso, di calcio delle leuco-fonoliti, in aggiunta — s'intende — alle condizioni ambientali nelle quali decorre il trattamento, giustifica l'ottenimento di un termine altamente potassico della serie delle cabasiti (*l'herschelite*).

Pertanto, limitatamente al trattamento idrotermale in ambiente potassico e nelle condizioni fisiche che risultano più favorevoli alla zeolitizzazione, non si registra sostanziale diversità di comportamento fra il vetro in istudio e quello *alcali-trachitico*.

Sempre in ambiente debolmente alcalino per idrossido di potassio, lo incremento delle condizioni fisiche del trattamento idrotermale comporta la cristallizzazione a *leucite* del vetro *leuco-fonolitico*, a differenza di quanto riscontrato per il vetro *alcali-trachitico*, per il quale un tale incremento provoca, secondo l'intensità dei suddetti fattori, prima l'*analcimizzazione* e successivamente la feldspatizzazione ad *ortoclasio*.

L'aumento di titolo della soluzione d'idrossido di potassio di contatto (dalla soluzione all'1% a quella al 3%), favorisce, anche nelle condizioni fisiche che si sono rivelate le più idonee alla zeolitizzazione ad *herschelite* ($p = \sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 280^\circ\text{C}$), il decorso della reazione nel senso della cristallizzazione a *leucite*. Al contrario, la riduzione del titolo di alcali, l'impiego, cioè, di sola acqua quale liquido di contatto, comporta nelle condizioni fisiche or ora ricordate l'incipiente *analcimizzazione* del vetro *leuco-fonolitico* *).

Ferme restando le condizioni ambientali in parola, l'incremento dei fattori fisici ($p = \sim 120 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 330^\circ\text{C}$) favorisce il decorso della reazione nel senso or ora ricordato.

*) Si rammenti che gli alcali di costituzione del vetro impartiscono all'acqua, adoperata quale liquido di contatto durante il trattamento idrotermale, una leggera alcalinità.

In ambiente debolmente alcalino, per idrossido di sodio (NaOH 1%) e tanto a moderate, quanto ad elevate pressioni e temperature, il trattamento idrotermale del vetro *leuco-fonolitico* provoca la sua *analcimizzazione*, anche questa volta accompagnata da feldspatizzazione ad *ortoclasio* (probabilmente sodifero). Detta feldspatizzazione risulta via via più accentuata a mano a mano che cresce l'intensità dei fattori fisici.

Pertanto, il trattamento idrotermale in ambiente sodico comporta per il vetro *leuco-fonolitico* le medesime trasformazioni conseguibili a partire da quello *alcali-trachitico*, a parte l'accentuata tendenza riscontrata a partire da quest'ultimo alla cristallizzazione dell'*ortoclasio*, accanto all'*analcime*.

Per quanto attiene poi al comportamento, sempre in condizioni sperimentali normalizzate, del vetro *leuco-fonolitico* rispetto a quello del vetro *leucotefritico*, che nella serie di vetri da me studiata e fra quelli ottenuti per fusione e tempra di rocce francamente alcaline segue il vetro in istudio, i risultati convergono nel segnalarne la sostanziale similitudine. Unica considerazione che conviene far risaltare è, però, che il processo di zeolitizzazione, in ambiente debolmente potassico e nelle condizioni fisiche che sono state prescelte e normalizzate, decorre più difficilmente di mano in mano che ci si sposta dal tipo di vetro meno basico (*leuco-fonolitico*) a quello più basico (*leucitico*), termine intermedio essendo il vetro *leucotefritico*, in quanto nelle suddette condizioni aumenta, di pari passo con la basicità, la sua tendenza a cristallizzare a leucite.

Ringrazio il Prof. SCHERILLO per i consigli ricevuti durante l'espletamento delle ricerche.

Napoli, Istituto di Chimica Industriale dell'Università.

RIASSUNTO. — Vien dato conto delle modificazioni costituzionali e strutturali conseguite sottoponendo ad azioni idrotermali, in condizioni normalizzate, un vetro *leuco-fonolitico*, preparato per fusione e successiva tempra di un campione di *leuco-fonolite*.

Si dimostra che anche il vetro in istudio è zeolitizzabile ad *herschelite* o ad *analcime* per trattamento idrotermale in condizioni fisiche identiche, ma in presenza, quale liquido di contatto, nel primo caso: di soluzione diluita d'idrossido di potassio, nel secondo: d'idrossido di sodio.

Si dimostra altresì che, in ambiente debolmente potassico, l'incremento dei fattori fisici che regolano il trattamento, favorisce la cristallizzazione a *leucite* del vetro originario e che analoga influenza esercita l'aumento di concentrazione della soluzione di contatto, in luogo dell'innalzamento della pressione e della temperatura di lavoro.

Si stabilisce ancora che in ambiente debolmente sodico l'incremento dei fattori fisici favorisce l'incipiente feldspatizzazione ad *ortoclasio* (sodifero) del vetro *leuco-fonolitico* analcimizzato e che la suddetta *analcimizzazione* è del pari conseguibile adoperando la sola acqua quale liquido di contatto, grazie alle piccole quantità di sodio di costituzione del vetro che passano in soluzione nel corso del trattamento idrotermale.

Si sottolineano infine le differenze riscontrate, in condizioni sperimentali del tutto simili, fra il comportamento del vetro *leuco-fonolitico* e quello dei vetri: *alcali-trachitico* e *leucotefritico*, precedentemente studiati.

SUMMARY. — An account for the changes in the composition and in the structure of an obsidian prepared by melting and granulating a sample of *leucite phonolite* rock and afterward submitted to hydrothermal treatment in standardized conditions, has been given by the author.

It has been at first demonstrated that the above mentioned glass can be turned into *herschelite* by means of hydrothermal actions in the presence of potassium hydroxide dilute solution and into *analcite* in the presence of sodium hydroxide dilute solution, in the same physical conditions.

It has been successively shown that the rise of the physical factors or the increase in the concentration of the potassium hydroxide solution, favour the conversion into *leucite* of the original glass.

It has been stated too, that in the presence of sodium hydroxide dilute solution the rise of the physical factors promotes the crystallization of the sodium-bearing *orthoclase*, together with *analcite*, and that the *leucite phonolite* glass can be likewise turned into *analcite* by making use of water as contact liquid, on account of the small quantities of the sodium of the glass that dissolve into the water during the hydrothermal treatment.

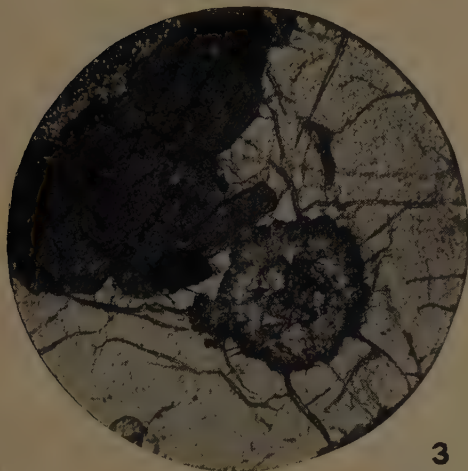
The differences that have been observed, par of conditions, in the behaviour of the *leucite phonolite* glass, in comparison to that of the *alkali-thachytic* one and to that of the *leucite tephrite* glass, have been at last emphasized.



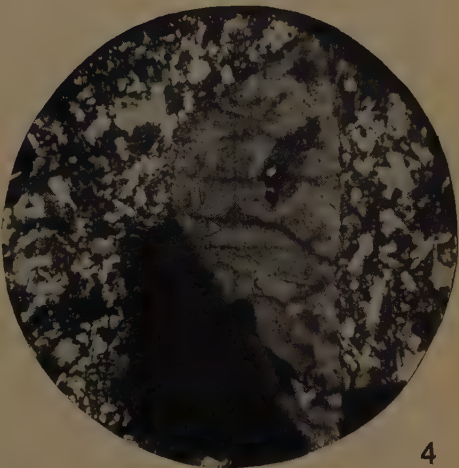
1



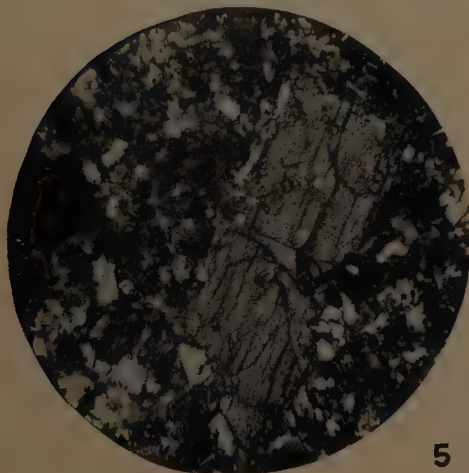
2



3



4



5



6

Leuco-fonolite di Poggio Muratella. Sezioni sottili.

- (1) *Nicols +* ; 40 \times . Leucite con geminazione polisintetica.
- (2) *Nicols +* ; 40 \times . Leucite con calcite in venule.
- (3) *Nicols //* ; 22 \times . Fenocristalli di leucite parzialmente trasformata in pseudoleucite.
Cristalli di pirosseno e di magnetite (neri).
- (4) *Nicols +* ; 40 \times . Fenocristallo di sanidino (geminato di Baveno).
- (5) *Nicols +* ; 40 \times . Fenocristallo di pirosseno.
- (6) *Nicols +* ; 40 \times . Fenocristallo di plagioclasio.

Diam. camera mm. 114,59. Rad. Cu K.



- (1) Ossidiana leuco-fonolitica (per fusione e tempra della leuco-fonolite di cui alla tav. I).
- (2) Solido di cui all'analisi in tab. III (prima colonna).
- (3) Solido di cui all'analisi in tab. III (seconda colonna).
- (4) Solido di cui all'analisi in tab. III (terza colonna).
- (5) Ossidiana leuco-fonolitica, dopo tratt. idrot. a $p = \sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 280^\circ\text{C}$; liquido di contatto: acqua.
- (6) Come (5), ma a $p = \sim 120 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 330^\circ\text{C}$.
- (7) Analcime (Somma - Vesuvio).

Problemi di Goursat e di Dirichlet per una classe di equazioni integro-differenziali a derivate totali.

Nota di D. Mangeron (a Jassy, Romania)

e L. E. Krivošein (a Frunze, URSS)

presentata dal socio Carlo Miranda

(Adunanza del dì 4 novembre 1961)

A Mauro Picone, nel suo 75^o compleanno.

Un cospicuo numero di lavori concernenti lo studio di vari problemi relativi alle equazioni differenziali a derivate totali inaugurato da uno degli autori della presente Nota con la risoluzione per primo del problema al contorno [1]

$$[A(x)u' + \lambda \beta(x)u]' + \lambda [\beta(x)u' + C(x)u] = 0, \quad u|_{FR} = 0,$$

ove FR è la frontiera di un dominio rettangolare $R(x'_i \leq x_i \leq x''_i)$ a 2 n dimensioni, mentre il simbolo ' indica la derivata totale nel senso di PICONE

$$u' \equiv Du = \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{2n}}$$

(vedasi, ad es., [2]), è stato continuato poscia nei diversi indirizzi, centrati intorno alle equazioni differenziali del tipo non ellittico [3], [4].

Vari studi concernenti problemi al contorno e sviluppi in serie di autofunzioni per le equazioni non ellittiche si sono inoltrati oggidi nelle ricerche sull'argomento riferentisi agli svariati operatori generali a derivate parziali [5] - [10], lasciando però quasi totalmente inabbordati gli studi delle classi di equazioni integro-differenziali a derivate totali.

L'avvicinamento di tali problemi è stato agevolato dal fatto che in relazione con le equazioni integro-differenziali, di importanza vieppiù crescente nella scienza e nella tecnica, ci troviamo in possesso di una vasta bibliografia (vedansi, ad es., [11]), tra cui ci è particolarmente gradito di citare i lavori di M. PICONE [12] e C. MIRANDA [13]. In questo ordine di idee si debbono pure mentovare, oltre un numero di pubblicazioni recenti, inserite nel « Bollettino dell'Istituto Politecnico di Iasi » degli autori stessi [14] -

[15], anche la ingente mole di lavori della Scuola di Ia. V. BYKOV [16], [17], la Tesi di abilitazione di L. E. KRIVOSEIN [18] ed altri ancora.

In questo lavoro si considera il problema della ricerca di funzioni, appartenenti allo spazio $C_{2n} [a, c] \times [b, d]$ e soluzioni dei problemi di GOURSAT e di DIRICHLET per alcune equazioni integro-differenziali lineari a derivate totali nel senso di M. PICONE.

Nel § 1 di esso si espone, prendendo le mosse dalla trasformazione integrale (3) e dalla funzione di GREEN (M), la teoria di FREDHOLM dei problemi (1) e (18) per le equazioni integro-differenziali (2) e (22).

Nel § 2, avendo alla base le equazioni integrali ottenute e tenendo conto di apposite condizioni, si danno le risoluzioni di vari problemi nell'ordine di idee di codesta Nota, facendo uso delle funzioni generalizzate di GREEN (funzioni M) e additando alla possibilità di estensioni corrispondenti alla Nota [19].

Rinunciando a soffermarci qui sui dettagli, sottolineiamo il fatto che i metodi qui applicati possono essere utilizzati non solo per la risoluzione di altre classi di equazioni integro-differenziali a derivate parziali, ma anche per la risoluzione di problemi di altro tipo ¹⁾.

§ 1.

Ci proponiamo di risolvere il problema omogeneo di GOURSAT

$$(1) \quad [D^i u]_{x=a} = [D^i u]_{y=b} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

per l'equazione lineare integro-differenziale a derivate totali

$$(2) \quad \begin{aligned} & D^n u(x, y) - \lambda (n-1)!^2 [A(x, y) u(x, y) + B(x, y) D^r u(x, y)] = \\ & = (n-1)!^2 [f(x, y) + \lambda \iint_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}(x, y, \xi, \eta) \sum_0^n F_p(\xi, \eta) D^p u(\xi, \eta) d\xi d\eta], \end{aligned}$$

ove D_u è la derivata totale di M. PICONE; $A(x, y)$, $B(x, y)$, $\mathfrak{S}(x, y, \xi, \eta)$, $F_p(\xi, \eta)$ sono funzioni continue note di argomenti reali x, y, ξ, η , che non si riducono allo zero nei domini \mathfrak{S}_1 e $\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_1$;

$$\mathfrak{S} = \{a \leq x, \xi \leq c; b \leq y, \eta \leq d\}; \quad \mathfrak{S}_1 = \{a \leq \xi \leq x, b \leq \eta \leq y\},$$

λ è un parametro e $u(x, y)$ ne è la soluzione ricercata.

¹⁾ Alcuni risultati della presente si trovano esposti in una Nota di prossima pubblicazione nei Rend. dell'Accad. Naz. dei Lincei.

Seguendo l'idea generale della Nota [4, pp. 544-546], costruiremo la soluzione del problema (1), (2) sotto la forma

$$(3) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{(n-1)!^2} \iint_{\mathfrak{S}_1}^{x, y} [(x - \xi)(y - \eta)]^{n-1} \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta \equiv \\ &\equiv \frac{1}{(n-1)!^2} \iint_{\mathfrak{S}_1} [(x - \xi)(y - \eta)]^{n-1} \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

ove $\varphi(x, y)$ è una nuova funzione incognita, ricercata nel dominio $(x, y) \in \mathfrak{S}$.

Tenendo conto del fatto che la funzione (3) testè introdotta soddisfa alle condizioni al contorno (1) ed applicando alla (3) l'operatore differenziale (2) si perviene all'equazione integrale

$$(4) \quad \begin{aligned} \varphi(x, y) - \lambda \iint_{\mathfrak{S}_1} C(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta &= F(x, y) + \\ + \lambda \iint_{\mathfrak{S}} D(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

ove $C(x, y, \xi, \eta)$, $F(x, y)$ e $D(x, y, \xi, \eta)$ sono funzioni note, mentre $\varphi(x, y)$ ne è la funzione da determinarsi.

Per la $\varphi(x, y)$ si trova l'equazione integrale

$$(5) \quad \varphi(x, y) - \lambda \iint_{\mathfrak{S}} R(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta = F(x, y),$$

ove la funzione $R(x, y, \xi, \eta)$ è definita come segue

$$(6) \quad R(x, y, \xi, \eta) \equiv \begin{cases} C(x, y, \xi, \eta) + D(x, y, \xi, \eta), & (\xi, \eta) \in \mathfrak{S}_1, \\ D(x, y, \xi, \eta), & (\xi, \eta) \in \mathfrak{S} - \mathfrak{S}_1, \end{cases}$$

Il sistema di equazioni (3), (5) risulta equivalente al problema (1), (2).

Adunque, se λ non è un autovalore del nucleo $R(x, y, \xi, \eta)$, dalla (5) risulta

$$(7) \quad \begin{aligned} \varphi(y, y) &= F(x, y) + \\ + \lambda \iint_{\mathfrak{S}} T(x, y, \xi, \eta, \lambda) F(\xi, \eta) d\xi d\eta &\equiv \Phi(x, y, \lambda), \end{aligned}$$

ove $T(x, y, \xi, \eta, \lambda)$ è il nucleo risolvante di FREDHOLM del nucleo $R(x, y, \xi, \eta)$. Nel caso considerato la soluzione del problema (1), (2) esiste e la si può mettere sotto la forma

$$(8) \quad u(x, y) = \frac{1}{(n-1)!} \iint_{\mathcal{S}_1} [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-1} \Phi(\xi, \eta, \lambda) d\xi d\eta.$$

Sia $\lambda = \lambda_1$ — un autovalore del nucleo $R(x, y, \xi, \eta)$ di rango ν . L'equazione (5) e per conseguenza anche il problema (1), (2) avranno soluzione allora ed allora soltanto quando i dati iniziali (1) appartengono alla varietà singolare S (vedansi, ad es., [16, § 1. 3.]). La risoluzione affermativa del problema conduce nel caso considerato all'esistenza delle eguaglianze

$$(9) \quad \iint_{\mathcal{S}} F(x, y) h_i(x, y) dx dy = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, \nu),$$

ove $h_i(x, y)$, ($i = 1, 2, \dots, \nu$) sono autofunzioni corrispondenti al valore λ_1 del nucleo $R(\xi, \eta, x, y)$.

Nell'ipotesi che per $\lambda = \lambda_1$ i dati (1) appartengono alla varietà singolare S ,

$$(10) \quad \varphi(x, y) = \varphi_0(x, y, \lambda_1) + \sum_1^{\nu} a_i \varphi_i(x, y),$$

ove $\varphi_0(x, y, \lambda)$ è una soluzione particolare dell'equazione (5), mentre le $\varphi_i(x, y)$, ($i = 1, 2, \dots, \nu$) sono autofunzioni del nucleo $R(x, y, \xi, \eta)$, corrispondenti al valore proprio λ_1 e a_1, a_2, \dots, a_ν sono costanti arbitrarie. Per conseguenza si ha

$$(11) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{(n-1)!} \iint_{\mathcal{S}_1} [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-1} [\varphi_0(\xi, \eta, \lambda_1) + \\ &+ \sum_1^{\nu} a_i \varphi_i(\xi, \eta)] d\xi d\eta \equiv \Psi(x, y, \lambda_1) + \sum_1^{\nu} a_i \Psi_i(x, y). \end{aligned}$$

Se si ha $f(x, y) \equiv 0$ per tutti $(x, y) \in \mathcal{S}$, allora l'equazione (5) prende la forma

$$(12) \quad \varphi(x, y) - \lambda \iint_{\mathcal{S}} R(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0.$$

Ne segue che, se λ non è un autovalore del nucleo $R(x, y, \xi, \eta)$, l'equazione (12) e dunque anche il problema (1), (2) non posseggono soluzioni diverse dalla banale. Se invece $\lambda = \lambda_1$ è un autovalore del nucleo $R(x, y, \xi, \eta)$ di rango ν , esiste soluzione non banale del problema (1), (2)

$$(13) \quad u(x, y) = \sum_1^{\nu} a_i \Psi_i(x, y),$$

che si ottiene dalla (11) ponendovi $\Psi^*(x, y, \lambda_1) \equiv 0$. In virtù della (13) risulta che $\Psi_i^*(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, \nu$) sono le autofunzioni del problema omogeneo al contorno (1), (2). Dal ciò che è stato detto risulta inoltre che i valori propri dell'equazione (12) sono simultaneamente anche i valori propri del problema omogeneo (1), (2).

I risultati ottenuti conducono alla formulazione dei seguenti teoremi.

Teorema 1. — Se $f(x, y) \not\equiv 0$, $(x, y) \in \mathfrak{S}$ e 1) λ non è un autovalore del nucleo $R(x, y, \xi, \eta)$, allora, nelle ipotesi di cui sopra, il problema (1), (2) possiede nel dominio \mathfrak{S} una soluzione unica, determinata dalla formula (8); 2) $\lambda = \lambda_1$ è un valore proprio del nucleo $R(x, y, \xi, \eta)$ di rango ν . Allora il problema (1), (2) non ha generalmente parlando soluzione alcuna. Affinchè il problema (1), (2) abbia soluzione è necessario e sufficiente che i dati iniziali (1) appartengano alla varietà singolare S . Nel caso affermativo la soluzione del problema (1), (2) esiste e la si può rappresentare mediante (11).

Teorema II. — Se $f(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \mathfrak{S}$ e λ non è un autovalore del nucleo $R(x, y, \xi, \eta)$, allora, nelle ipotesi di cui sopra, il problema (1), (2) ha soltanto la soluzione banale. Il problema (1), (2) ha soluzione non banale (13) quando e solo quando $\lambda = \lambda_1$ è un autovalore del nucleo $R(x, y, \xi, \eta)$ di rango ν .

Osservazioni.

1. Se $A(x, y) \equiv B(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \mathfrak{S}$, allora il nucleo $R(x, y, \xi, \eta) \equiv \mathfrak{D}(x, y, \xi, \eta)$ e dunque la trasformazione (8) ci conduce direttamente alla equazione integrale

$$(14) \quad \varphi(x, y) = F(x, y) + \lambda \iint_{\mathfrak{S}} \mathfrak{D}(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

col nucleo continuo $\mathfrak{D}(x, y, \xi, \eta)$.

2. Sia $T_1(x, y, \xi, \eta, \lambda)$ — il nucleo risolvete del nucleo $C(x, y, \xi, \eta)$.
Ne risulta dalla (4)

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= F(x, y) + \lambda \iint_{\mathcal{P}} \mathfrak{D}(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ (15) \quad &+ \lambda \iint_{\mathcal{P}_1} T_1(x, y, t, \tau, \lambda) [F(t, \tau) + \lambda \iint_{\mathcal{P}} \mathfrak{D}(t, \tau, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta] dt d\tau \equiv \\ &\equiv \mathfrak{F}(x, y, \lambda) + \lambda \iint_{\mathcal{P}} \mathfrak{D}_1(x, y, \xi, \eta, \lambda) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

ove $\mathfrak{D}_1(x, y, \xi, \eta, \lambda)$ è una funzione continua rispetto alle variabili x, y, ξ, η e analitica in λ . Nonostante ciò, a causa del fatto che l'equazione (15) è equivalente all'equazione (5), risulta che lo spettro degli autovalori λ del nucleo $\mathfrak{D}_1(x, y, \xi, \eta, \lambda)$ è discreto.

3. Supponiamo ora che il problema (1) si debba risolvere per l'equazione integro-differenziale non lineare

$$\begin{aligned} D^n u(x, y) &= \frac{\lambda}{(n-1)!} [A(x, y) u(x, y) + B(x, y) D^r u(x, y) + \\ (16) \quad &+ \iint_{\mathcal{P}} \mathfrak{K}[x, y, \xi, \eta, u(\xi, \eta)] d\xi d\eta], \end{aligned}$$

ove $u(\xi, \eta)$ vi entra in modo non lineare nella funzione $\mathfrak{K}[\cdot]$. Dalla (16) si ottiene

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \lambda \iint_{\mathcal{P}_1} [(x-t)(y-\tau)]^{n-1} \{ A(t, \tau) u(t, \tau) + B(t, \tau) D^r u(t, \tau) + \\ (17) \quad &+ \iint_{\mathcal{P}} \mathfrak{K}[t, \tau, \xi, \eta, u(\xi, \eta)] d\xi d\eta \} dt d\tau \equiv \lambda \iint_{\mathcal{P}_1} \mathfrak{L}(x, y, t, \tau) Q[u] dt d\tau. \end{aligned}$$

Se l'operatore (17) è un operatore di contrazione, esiste allora una soluzione unica $2n$ volte derivabile a derivate continue del problema (1), (2), che può essere costruita tramite il metodo di approssimazioni successive.

4. Il metodo esposto può essere utilizzato anche nel caso in cui i coefficienti delle funzioni $B(x, y)$ e $F_P(\xi, \eta)$ sono rispettivamente di forma ²⁾

$$\frac{\partial^k u(x, y)}{\partial x^k \partial y^i}, \quad \frac{\partial^s u(\xi, \eta)}{\partial \xi^k \partial \eta^i}; \quad k \leq n-1, \quad i \leq n-1.$$

§ 2.

Sia $r = p = 0$. In questo caso si può fare uso, allo scopo di risolvere il problema omogeneo al contorno

$$(18) \quad \begin{aligned} &u|_L \equiv 0, \quad D u|_{L_1} \equiv \dots \equiv D^{n-1} u|_{L_1} = 0, \\ &\left(\begin{array}{l} L - \text{contorno del dominio } \mathfrak{D} \\ L_1 \equiv \begin{array}{l} x = a, \quad b \leq y \leq d, \\ y = b, \quad a \leq x \leq c \end{array} \end{array} \right), \end{aligned}$$

per l'equazione integro-differenziale (2), della funzione

$$(M) \quad M(x, y, \xi, \eta) \equiv \left\{ \begin{array}{ll} \frac{[(x-a)(c-\xi)(y-b)(d-\eta)]^{n-1}}{[(c-a)(d-b)]^{n-1}(n-1)!^2} & \equiv x \leq \xi, y \leq \eta \\ \left[\frac{[(x-a)(c-\xi)]^{n-1}}{(c-a)^{n-1}} - (x-\xi)^{n-1} \right] \frac{[(y-b)(d-\eta)]^{n-1}}{(d-b)^{n-1}(n-1)!^2} & \equiv x \geq \xi, y \leq \eta \\ \frac{[(x-a)(c-\xi)]^{n-1}}{(c-a)^{n-1}(n-1)!^2} \left[\frac{[(y-b)(d-\eta)]^{n-1}}{(d-b)^{n-1}} - (y-\eta)^{n-1} \right] & \equiv x \leq \xi, y \geq \eta \\ \left[\frac{[(x-a)(c-\xi)]^{n-1}}{(c-a)^{n-1}} - (x-\xi)^{n-1} \right] \left[\frac{[(y-b)(d-\eta)]^{n-1}}{(d-b)^{n-1}} - (y-\eta)^{n-1} \right] & \equiv x \geq \xi, y \geq \eta \end{array} \right. \\ \equiv N(x, y, \xi, \eta) : (n-1)!^2$$

costruita nella Nota [20].

Invero, in virtù delle proprietà della funzione (M), abbiamo

$$(19) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= \iint_{\mathfrak{D}} N(x, y, \xi, \eta) \{ f(\xi, \eta) + \lambda [A(\xi, \eta) + B(\xi, \eta)] u(\xi, \eta) + \\ &+ \lambda \iint_{\mathfrak{D}} \mathfrak{S}(\xi, \eta, t, \tau) F_0(t, \tau) u(t, \tau) dt d\tau \} d\xi d\eta \equiv \\ &\equiv \Phi(x, y) + \lambda \iint_{\mathfrak{D}} W(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

²⁾ Allo sviluppo di alcuni delle osservazioni della presente come pure ad altre ancora è stata consacrata un'altra Nota di prossima pubblicazione in un altro periodico.

Dalla costruzione dell'equazione (19) risulta la sua equivalenza al problema (18), (2) nel senso che la soluzione di questa equazione risulta pure soluzione del problema (18), (2) e viceversa. Adunque, la risolubilità del problema (18), (2) sarà determinata dalla risolubilità dell'equazione (19).

Se, nella (2), si ha $f(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in P$, allora

$$(20) \quad u(x, y) = \lambda \iint_{\mathcal{P}} W(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Dalla (20) si osserva che il problema omogeneo (18), (2) ha la soluzione non banale soltanto nel caso in cui λ è un autovalore del nucleo $W(x, y, \xi, \eta)$. In tal modo gli autovalori e le autofunzioni dell'equazione (20) sono simultaneamente autovalori e autofunzioni del problema omogeneo al contorno (18), (2). Per la costruzione dei detti valori può essere utilizzato il metodo esposto dall'uno degli autori per un altro scopo nella Nota [20].

Osservazioni.

5. Se si introduce l'operatore

$$v(x, y) \equiv [A(x, y) + B(x, y)] u(x, y) + \iint_{\mathcal{P}} \mathfrak{s}(x, y, \xi, \eta) F_0(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

allora si ottiene, invece di una sola equazione (19), il sistema di equazioni integrali della forma

$$u(x, y) = \Phi(x, y) + \lambda \iint_{\mathcal{P}} N(x, y, \xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$v(x, y) = \Phi_1(x, y) + \lambda \iint_{\mathcal{P}} W_1(x, y, \xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

6. Una lieve modificazione del metodo esposto permette di studiare il problema (18), (2) anche nel caso in cui $p \neq 0$, $r \neq 0$.

Consideriamo ora in questo § 2 il caso in cui

$$(21) \quad \mathfrak{s}(x, y, \xi, \eta) \equiv \begin{cases} K(x, y, \xi, \eta), & (\xi, \eta) \in \mathcal{S}_1 \\ 0, & (\xi, \eta) \notin \mathcal{S}_1 \end{cases}$$

L'equazione integro-differenziale (2) prende adesso la forma

$$(22) \quad \begin{aligned} D^n u(x, y) - \lambda (n-1)! [A(x, y) u(x, y) + B(x, y) D^r u(x, y)] = \\ = (n-1)! [f(x, y) + \lambda \iint_{\mathcal{P}_1} K(x, y, \xi, \eta) \sum_0^n F_p(\xi, \eta) D^p u(\xi, \eta) d\xi d\eta]. \end{aligned}$$

Sia $f(x, y) \not\equiv 0$, $(x, y) \in \mathcal{P}_1$. Allora, introducendo (3) nella (22) ed eseguendo le trasformazioni necessarie, si ottiene la seguente equazione integrale con limiti d'integrazione variabili

$$(23) \quad \varphi(x, y) - \lambda \iint_{\mathcal{P}_1} T(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \pi(x, y),$$

ove $T(x, y, \xi, \eta)$ e $\pi(x, y)$ sono funzioni note.

Dall'esposizione di cui sopra risulta che il sistema di equazioni integrali (3), (23) è equivalente al problema (1), (22). Poichè l'equazione (23) ha una soluzione unica, ne segue che anche il problema (1), (22) possiede esso pure una sola soluzione. Invero, la soluzione dell'equazione integrale (23) esiste e la si può costruire sotto la forma di una serie

$$\varphi(x, y) = \sum_0^\infty \lambda^i \psi_i(x, y),$$

ove

$$\begin{aligned} \psi_0(x, y) &= \pi(x, y); \\ \psi_i(x, y) &\equiv \iint_{\mathcal{P}_1} T(x, y, \xi, \eta) \psi_{i-1}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ (i &= 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

convergente assolutamente ed uniformemente nel dominio considerato.

Per conseguenza,

$$(24) \quad u(x, y) = \frac{1}{(n-1)!^2} \iint_{\mathcal{P}_1} [(x-\xi)(y-\eta)]^{n-1} \sum_0^\infty \lambda^i \psi_i(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

è la soluzione del problema (1), (22).

Se nella (22) si ha $f(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \mathfrak{S}_1$, allora

$$(25) \quad \varphi(x, y) - \lambda \iint_{\mathfrak{P}_1} T(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0,$$

e perciò il problema omogeneo (1), (22) non ha altra soluzione $2n$ volte derivabile con derivate continue al di fuori della soluzione banale. I risultati acquisiti conducono al seguente

Teorema III. — Se $f(x, y) \not\equiv 0$, $(x, y) \in \mathfrak{S}_1$, allora il problema al contorno (1), (22), ha sempre nelle ipotesi considerate, una soluzione che può essere rappresentata sotto la forma (24). Se invece $f(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \mathfrak{S}_1$, allora il problema (1), (22) ha nello spazio C_{2n} soltanto la soluzione banale.

Osservazioni.

7. Se per l'equazione (22) si pone il problema (18) oppure il problema

$$(I) \quad [D^i u]_{x=\alpha} = [D^i u]_{y=\beta} = 0 \\ (i = 0, 1, \dots, n-1; \alpha \neq a, \beta \neq b),$$

allora, in certe ipotesi, è possibile 1) di non aver soluzione alcuna nel caso in cui $f(x, y) \not\equiv 0$, $(x, y) \in \mathfrak{S}_1$, 2) il problema possiede una soluzione non banale per $f(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \mathfrak{S}_1$.

8. I risultati acquisiti possono essere estesi, utilizzando il metodo di composizione formulato nella Nota [4] e già sfruttato, allo studio di vari problemi concernenti le equazioni integro-differenziali del tipo

$$K[u] = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ + \mu \int_R S[x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n, u(\cdot)] dR,$$

ove $K(\cdot)$ e $S(\cdot)$ sono operatori lineari analoghi a quelli considerati dal D. MANGERON oppure, seguendo quest'ultimo, dall'I. M. BEREZANSKI [10] ed altri ancora.

9. Si possono pure attaccare, seguendo la via tracciata nelle note [4] vari problemi al contorno non omogenei concernenti le equazioni integro-

differenziali oppure si possono dare delle soluzioni approssimative dei problemi di cui sopra, corrispondenti al caso in cui non è noto il nucleo risolvante dell'equazione integrale costruita.

BIBLIOGRAFIA

- [1] MANGERON D. *Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziali di quart'ordine con le caratteristiche reali doppie*. Rend. Accad. Sci. Fis. Mat., Napoli, (4), II, 1932, pp. 1-11.
- [2] PICONE M. *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica*. Ann. Sci. de l'Univ. de Jassy, I-e Section (Math., Phys., Chimie), XXVI, 1, 1940, pp. 183-232.
- [3] MANGERON D. *Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale non lineare alle derivate parziali di quarto ordine con le caratteristiche reali doppie*. Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sc. fis., mat. e nat., (6), XVI, 7-8, 1932, pp. 305-310.
- [4] ID. *Sur certains problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*. C. R. Acad. Sc. Paris, 204, 1937, pp. 94-96; 544-546; 1022-1024.
- [5] ROSENBLATT A. *Sur l'application de la méthode des approximations de M. Picard à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles et multiples*. C. R. Acad. Sc., Paris, 207, 1933, pp. 1278-1280.
- [6] SALVADORI M. *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica*. Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa, (2), V, 1936, pp. 51-72.
- [7] MANARESI F. *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XXIII, 1954, pp. 163-213.
- [8] STAMPACCHIA G. *Un teorema di calcolo delle variazioni ed applicazioni a problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali del tipo iperbolico*. Giorn. di Matem. di Battaglini, (4), 78, 1948-49, pp. 81-96.
- [9] DE GIORGI E. *Un teorema di unicità per il problema di Cauchy, relativo ad equazioni differenziali a derivate parziali di tipo parabolico*. Scritti Matematici offerti a Mauro Picone, Bologna, Azzoguidi, 1955, pp. 781-787.
- [10] BEREZANSKI Iu. M. *O kraevykh zadachakh dlya obshchikh differentsialnykh operatorov v castnykh proizvodnykh* (Sui problemi al contorno per gli operatori differenziali generali a derivate parziali). Doklady Akad. Nauk SSSR, 122, 6, 1958, pp. 959-962.
- [11] Referativny Zurnal Matematika. Sistematicheskii i predmetnyi ukazateli, 1956, pp. 102-103; 1957, pp. 111-112; 1958, p. 112; 1959, pp. 130-131.
- [12] PICONE M., FICHERA G. *Trattato di Analisi Matematica*, vol. II, Tumminelli, Roma, 1955, 883 pag. V, § 2, pp. 743-783.
- [13] MIRANDA C. *Uravnenia s castnymi proizvodnymi ellipticheskogo tipa* (Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico). Per. s. ital., I.L., M., 1957, 256 pp.
- [14] MANGERON D., KRIVOSEIN L. E. *Soluzione approssimativa dei problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali generalizzate*. Bul. Inst. Polit. Iasi, s. n. 6 (10), 1-2, 1960, pp. 17-26.
- [16] BYKOV Ia. V. *O nekotorykh zadachakh teorii integro-differentsialnykh uravnenii* (Sopra alcuni problemi concernenti la teoria delle equazioni integro-differenziali). Kirg. Gos. Univ., Frunze, 1957, 327 pp.
- [17] ID. *O nekotorykh metodakh postroeniia resenii integral'nykh i integro-differentsial'nykh uravnenii* (Sopra alcuni metodi di risoluzione delle equazioni integrali e integro-differenziali). Akad. Nauk Kirg. SSR, Frunze, 1961, 110 pp.

- [18] KRIVOSEIN L. E. *Priblizennoe resenie nekotoryh zadac dlea lineinyh integro-differentsial'nyh uravnenii* (Soluzione approssimativa di alcuni problemi concernenti equazioni lineari integro-differenziali). L'Autoresoconto della tesi di abilitazione (Cand. Sci. fis. mat.). Sredneasiatskii Univ., Taskent, 1958.
- [19] MANGERON D. *Sur les noyaux associés à certains problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*. Mathematica, Cluj, XIV, 1938, pp. 31-35.
- [20] ID. *Sopra i problemi di Dirichlet per le equazioni differenziali a derivate totali*. Bul. Inst. Polit. Iasi, s.n., 3 (7), 3-4, 1957, pp. 49-52.

RIASSUNTO. — In questo lavoro, prendendo le mosse dai risultati concernenti una nuova classe di problemi al contorno [1], [20]

$$[A(x)u' + \gamma B(x)u]' + \gamma [B(x)u' + C'(x)u] = 0, \quad x|_{FR} = 0,$$

ove FR è la frontiera di un dominio rettangolare a $2n$ dimensioni $R(x'_i \leq x_i \leq x''_i)$, mentre il simbolo ' indica la derivata totale nel senso di Picone [2], si considera il problema della ricerca di funzioni appartenenti allo spazio $C_{2n}[a, c] \times [b, d]$ e soluzioni dei problemi di Goursat e di Dirichlet (1) e (18) per le equazioni integro-differenziali a derivare totali (2) e (22).

SUMMARY. — Some theorems are presented concerning the problems of Goursat and Dirichlet (1) and (18) for the class of integro-differenzial equations (2) and (22) with total derivatives, where, analogously with the novel aspects of the theorems established by one of the authors [1], [20] for the boundary value problems

$[A(x)u' + \gamma B(x)u]' + \gamma [B(x)u' + C'(x)u] = 0, u|_{FR} = 0, R(x'_i \leq x_i \leq x''_i)$, the symbol ' is designating total differentiation in the sense of Picone:

$$u' = \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{2n}}.$$

Maggiorazione del gradiente delle funzioni biarmoniche di due variabili

*Nota del dott. Giorgio Adler (Budapest)
presentata dal socio Carlo Miranda*

(Adunanza del dì 4 novembre 1961)

§ 1. — Introduzione.

Sia u una funzione biarmonica, cioè soluzione dell'equazione

$$(1) \quad \Delta \Delta u = 0$$

in un campo piano limitato Ω , che verifichi sulla frontiera Σ di Ω le condizioni al contorno

$$(2) \quad u = f,$$

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g,$$

essendo ν la normale interna a Σ ed f e g due funzioni dell'arco s di Σ .

Il Prof. CARLO MIRANDA nel suo lavoro [2]¹⁾, in ipotesi convenienti per Σ e per la funzione u , stabilisce una formula di maggiorazione per il $|\text{grad } u|$ del tipo

$$(4) \quad \max_{P \in \Omega + \Sigma} |\text{grad } u(P)| \leq K_1 \max |f| + K_2 \max \left| \frac{df}{ds} \right| + K_3 \max |g|,$$

dove le costanti K_1 , K_2 e K_3 dipendono soltanto da Σ .

Nel caso particolare $f \equiv 0$ il MIRANDA riesce a determinare il valore numerico di K_3 (in questo caso $\max |f| = \max \left| \frac{df}{ds} \right| = 0$, quindi K_1 e K_2 non compaiono nella formula (4)), invece nel caso generale $f \not\equiv 0$ si limita soltanto alla dimostrazione dell'esistenza delle K_1 , K_2 e K_3 .

In questo articolo, basandoci sul metodo del MIRANDA — elaborando certe maggiorazioni assai sottili (principalmente nel Lemma 5) rela-

¹⁾ I numeri fra [] rimandano alla Bibliografia.

tive a integrali calcolati su Σ — e combinandolo con una formula di miglioramento, stabilita dall'autore per funzioni armoniche (vedere [1]), determineremo i valori numerici di K_1 , K_2 e K_3 nel caso generale $f \neq 0$. Benchè il risultato del MIRANDA si riferisca soltanto ai campi limitati, per mezzo della nostra formula numerica riusciremo ad estendere la miglioramento per un campo particolare non-limitato, precisamente per un semipiano.

§ 2. — Definizioni.

Siano Ω un campo (insieme aperto e connesso) piano limitato, Σ la sua frontiera (che supporremo assai regolare), s l'ascissa curvilinea su Σ , L la lunghezza di Σ . Siano P il punto generico del piano, Q quello di Σ , Q_0 un punto fissato di Σ , ν la normale interna a Σ in Q , ν_0 quella in Q_0 , τ la tangente a Σ in Q . Indicheremo con φ l'angolo formato dall'asse \overrightarrow{QP} con la normale ν , orientato nel verso che va da \overrightarrow{QP} a ν e con ϕ l'angolo analogo formato dall'asse QP con ν_0 ; porremo inoltre $r = \overline{PQ}$. Finora φ è determinato a meno di un multiplo intero di 2π . Accordiamoci di misurare φ su ogni componente Σ_i di Σ in tale modo che

$$\sup_{P \in \Omega} \max_{Q \in \Sigma_i} |\varphi|$$

sia minimale. Poniamo

$$\Phi = \max_i \sup_{P \in \Omega} \max_{Q \in \Sigma_i} |\varphi|.$$

Supponiamo che esista la normale ν in ogni punto Q di Σ . Consideriamo il sistema di coordinate cartesiane (ξ_1^Q, ξ_2^Q) coll'origine Q , di cui l'asse positivo ξ_2^Q abbia la direzione di ν . Sia $Z_Q(\rho)$ l'arco della curva Σ , connesso, contenente Q e appartenente alla striscia $-\rho \leq \xi_1^Q \leq \rho$, $-\infty < \xi_2^Q < \infty$.

Diremo che il campo Ω appartiene alla classe $\mathfrak{A}(\rho)$, se

- 1° in ogni punto della sua frontiera Σ esiste l'iperpiano tangente;
- 2° esiste un numero $\rho > 0$ tale che per ogni punto Q di Σ è possibile trovare

(i) un cerchio Γ_i di raggio ρ , la cui frontiera contiene Q , e la cui parte interna è collocata in Ω ,

(ii) un cerchio Γ_e di raggio ρ , la cui frontiera contiene Q , e che contiene almeno un punto non appartenente ad Ω , e non contiene nel suo interno nessuno punto dell'arco $Z_Q(\rho)$ di Q .

Se il campo Ω soddisfa solamente le condizioni 1° e 2° (i) per un qualsiasi $\rho > 0$, allora diremo che Ω appartiene alla classe α^* .

Conservando le notazioni di [1], siano

$$\mu_1(\rho) = \sup_{Q \in \Sigma} \left[\sup_{|\xi_1^Q| \leq \rho} \left| \frac{ds}{d\xi_1^Q} \right| \right],$$

$$\mu_2(\rho) = \sup_{Q \in \Sigma} \left[\sup_{|\xi_1^Q| \leq \rho} \left| \frac{d^2s}{d\xi_1^{Q^2}} \right| \right],$$

$$M_{1s}(f) = \sup |f'|,$$

$$M_{2s}(f) = \sup |f''|,$$

dove $f = f(s)$ è una funzione definita su Σ .

§ 3. — Teoremi ausiliari.

Si verifica facilmente che dall'ipotesi $\Sigma \in \alpha \rho$ risultano le seguenti disuguaglianze:

$$(5) \quad \begin{aligned} \mu_1\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) &\leq \sqrt{2}, \\ \mu_2\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) &\leq \frac{2}{\rho}. \end{aligned}$$

È evidente che per $\rho' > \rho''$ l'ipotesi $\Sigma \in \alpha(\rho')$ implichi $\Sigma \in \alpha(\rho'')$. Quindi, considerata la curva $\Sigma \in \alpha(\rho)$ come elemento di $\alpha\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)$, per le quantità $M_1(f)$ e $M_2(f)$, definite in [1], secondo i calcoli eseguiti alla fine del § 1 di [1] e secondo la (5), si ottiene:

$$(6) \quad \begin{aligned} M_1(f) &= M_{1s}(f), \\ M_2(f) &\leq \mu_1\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)^2 M_{2s}(f) + \mu_2\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) M_{1s}(f) \leq \\ &\leq \frac{2}{\rho} M_{1s}(f) + 2 M_{2s}(f). \end{aligned}$$

(Ricordiamo che, considerata Σ come elemento di $\mathfrak{A}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)$, nella definizione di $M_2(f)$ data in [1], adesso si deve sostituire $r = \frac{\rho}{\sqrt{2}}$).

In virtù della (6) il Teorema 1 di [1] fornisce il seguente lemma:

Lemma 1. — *Supponiamo che*

1° $\Omega \in \mathfrak{A}(\rho)$;

2° *la funzione* $H(P)$

(i) *sia armonica in* Ω *e ammetta derivate prime continue in* $\Omega + \Sigma$ *e*

(ii) *la sua traccia* $H(s)$, *come funzione di* s , *ammetta derivata seconda limitata.*

Allora

$$\begin{aligned} \max_{P \in \Omega + \Sigma} |\text{grad } H(P)| &< \frac{16\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{1}{\omega(1-\omega)} \frac{1}{\rho} \max |H(s)| + \\ &+ \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega}{1-\omega} \max \left| \frac{dH(s)}{ds} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{1-\omega} \rho \sup \left| \frac{d^2 H(s)}{ds^2} \right|, \end{aligned}$$

dove ω è un numero arbitrario verificante la limitazione $0 < \omega < 1$.

Il seguente lemma è il Teorema V²⁾ di [2]:

Lemma 2. — *Supponiamo che*

1° $\Omega \in \mathfrak{A}^*$;

2° *la funzione* $u(P)$

(i) *sia biarmonica in* Ω , *ammetta derivate prime continue in* $\Omega + \Sigma$,

(ii) *sia nulla su* Σ .

Allora

$$\max_{P \in \Omega + \Sigma} |\text{grad } u(P)| \leq \sqrt{56} \max_{P \in \Sigma} \left| \frac{\partial u(P)}{\partial \nu} \right|.$$

Lemma 3. — *Sia* $\Sigma \in \mathfrak{A}(\rho)$. *Allora per ogni punto* $Q_0 \in \Sigma$ *si ha:*

$$\int_{\Sigma} \left[\frac{|\cos \psi| |\cos^2 \varphi|}{r} \right]_{P \equiv Q_0} ds_Q < \frac{L}{\rho} + 5.$$

²⁾ È evidente che la condizione del citato teorema relativa a Σ può essere sostituita dalla condizione 1° qui sotto.

esprimere mediante l'angolo ausiliare α e l'angolo ψ^3):

$$(8) \quad \varphi = \psi - \alpha.$$

Dal fatto che $\Sigma \in \mathfrak{A}(\rho)$, segue:

$$(9) \quad |\alpha| \leq |\vartheta|, \quad |\psi - \frac{\pi}{2} \operatorname{sg} \psi| \leq \frac{|\vartheta|}{2} \quad \left(|\vartheta| \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

Dalle (8) e (9) risulta:

$$(10) \quad \begin{aligned} |\cos \varphi| &\leq |\psi - \alpha - \frac{\pi}{2} \operatorname{sg} \psi| \leq |\psi - \frac{\pi}{2} \operatorname{sg} \psi| + |\alpha| \leq \frac{3}{2} |\vartheta|, \\ |\cos \psi| &\leq \frac{1}{2} |\vartheta|. \end{aligned}$$

Dalla prima disuguaglianza della (9) si ricava:

$$(11) \quad |ds| \leq \rho |d\vartheta|.$$

È evidente che

$$(12) \quad r \geq \rho \sin |\vartheta| \geq \rho \frac{2}{\pi} |\vartheta|.$$

Dalle (10), (11) e (12) si ottiene immediatamente:

$$(13) \quad \int_{\dot{Z}_{Q_0}(Q)} \left[\frac{|\cos \psi| |\cos^2 \varphi|}{r} \right]_{P \equiv Q_0} ds_Q \leq \int_{\dot{Z}_{Q_0}(Q)} \frac{\frac{1}{2} |\vartheta| \frac{9}{4} \vartheta^2}{\frac{2}{\pi} \rho |\vartheta|} \rho |d\vartheta| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{9\pi}{16} \vartheta^2 d\vartheta < 5.$$

Sommando le (7) e (13) si ottiene il teorema.

Lemma 4. — Sia $\Sigma \in \mathfrak{A}(\rho)$ Allora per ogni punto $Q_0 \in \Sigma$ si ha:

$$\int_{\Sigma} \left| \frac{|\cos \psi \cos \varphi|}{r^2} \right|_{P \equiv Q_0} ds_Q < \frac{L}{\rho^2} + \frac{6}{\rho}$$

³⁾ Poichè dobbiamo maggiorare soltanto i seni ed i coseni di φ e di ψ , adesso possiamo considerare φ e ψ ridotti mod 2π in guisa tale che risulti $|\varphi| \leq \pi, |\psi| \leq \pi$.

Dimostrazione. — La dimostrazione è analoga alla dimostrazione del precedente Lemma 3.

Lemma 5. — Sia $\Sigma \in \mathfrak{A}(\rho)$ Allora per ogni punto $P \in \Omega$ si ha:

$$\int_{\Sigma} \frac{\cos^2 \varphi}{r} ds_Q < \frac{L}{\rho} + 4850.$$

Dimostrazione. — Se $P \in \Omega$ è tale da risultare

$$\min_{Q \in \Sigma} r \geq \rho ,$$

allora l'affermazione è evidente.

Sia $P \in \Omega$ tale che

$$\min_{Q \in \Sigma} r = t < \rho ,$$

e sia $Q_0 \in \Sigma$ un punto per il quale $\overline{PQ_0} = t$. È evidente che

$$(14) \quad \int_{\Sigma - Z_{Q_0}(Q)} \frac{\cos^2 \varphi}{r} ds < \frac{L}{\rho} .$$

Consideriamo i cerchi Γ_i e Γ_e relativi al punto Q_0 col centro O_1, O_2 , rispettivamente (vedere fig. 2). Come abbiamo stabilito nella dimostrazione del Lemma 3, fra i punti Q di $Z_{Q_0}(\rho)$ e gli angoli $\vartheta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ indicati sulla figura 2 c'è una corrispondenza biunivoca, e si ha:

$$(15) \quad |\alpha| \leq |\vartheta| .$$

Dalla figura 2 si ottiene la relazione

$$\varphi = \beta - \alpha ,$$

dalla quale segue:

$$(16) \quad \cos^2 \varphi \leq \left| \beta - \alpha - \frac{\pi}{2} \operatorname{sg} \beta \right|^2 \leq 2 \left[\alpha^2 + \left(\beta - \frac{\pi}{2} \operatorname{sg} \beta \right)^2 \right] .$$

È evidente che

$$(17) \quad \left| \beta - \frac{\pi}{2} \operatorname{sg} \beta \right| \leq \left| \gamma - \frac{\pi}{2} \operatorname{sg} \gamma \right| .$$

Sia $\vartheta = \Theta$ l'angolo per il quale $\overline{Q^*P} \perp \overline{Q_0P}$. Allora si ha:

$$\sin \left(\gamma - \frac{\pi}{2} \operatorname{sg} \gamma \right) = \frac{(1 - \cos \Theta) + (1 - \cos \vartheta)}{\sqrt{[(1 - \cos \Theta) + (1 - \cos \vartheta)]^2 + \sin^2 \vartheta}},$$

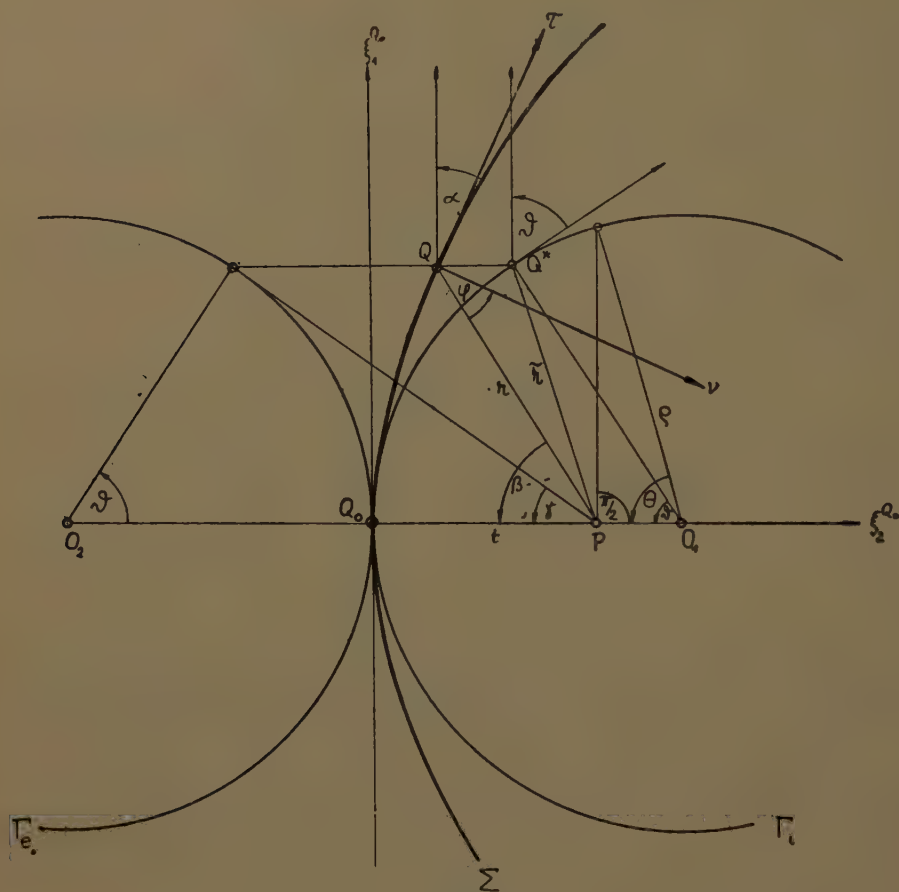


Fig. 2.

da cui segue

$$(18) \quad \left| \gamma - \frac{\pi}{2} \operatorname{sg} \gamma \right| \leq \frac{\pi}{2} \left| \sin \left(\gamma - \frac{\pi}{2} \operatorname{sg} \gamma \right) \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{\frac{1}{2} \Theta^2 + \frac{1}{2} \vartheta^2}{\sqrt{\frac{4}{\pi^4} \Theta^4 + \frac{4}{\pi^2} \vartheta^2}}.$$

Dalle (15), (16), (17) e (18) si ottiene:

$$(19) \quad \cos^2 \varphi \leq 2 \vartheta^2 + \frac{\pi^6}{32} \frac{(\Theta^2 + \vartheta^2)^2}{\Theta^4 + \pi^2 \vartheta^2} \equiv \Psi(\vartheta).$$

Come si vede dalla figura 2 e in virtù di disuguaglianze trigonometriche si ha

$$(20) \quad \begin{aligned} \tilde{r} &= \rho [\sin^2 \vartheta + (\cos \Theta - \cos \vartheta)^2]^{1/2} \geq \\ &\geq \rho \left[\frac{4}{\pi^2} \vartheta^2 + \frac{4}{\pi^4} (\Theta^2 - \vartheta^2)^2 \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

e di più, è valida la seguente disuguaglianza:

$$(21) \quad r \geq \begin{cases} \tilde{r} & , \quad \text{se } |\vartheta| \leq \Theta, \\ \rho \sin \vartheta, & \text{se } \Theta \leq |\vartheta| \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Dalle (19) e (21), tenendo conto della (11), otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{Z_{Q_0}(Q)} \frac{\cos^2 \varphi}{r} ds &\leq 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\Psi(\vartheta)}{r} \rho d\vartheta \leq \\ &\leq 2\rho \int_0^\Theta \frac{\Psi(\vartheta)}{\tilde{r}} d\vartheta + 2\rho \int_\Theta^{\pi/2} \frac{\Psi(\vartheta)}{\rho \sin \vartheta} d\vartheta \equiv 2\rho I_1 + 2I_2. \end{aligned}$$

Maggioreremo I_1 e I_2 separatamente. Valendosi della (20), si ha:

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \int_0^\Theta \left(2\vartheta^2 + \frac{\pi^6}{32} \frac{(\Theta^2 + \vartheta^2)^2}{\Theta^4 + \pi^2 \vartheta^2} \right) \frac{d\vartheta}{\rho \frac{2}{\pi^2} [\pi^2 \vartheta^2 + (\Theta^2 - \vartheta^2)^2]^{1/2}} = \\ &= \frac{\pi^2}{\rho} \int_0^\Theta \frac{\vartheta^2 d\vartheta}{[\pi^2 \vartheta^2 + (\Theta^2 - \vartheta^2)^2]^{1/2}} + \\ &+ \frac{\pi^6}{64 \rho} \int_0^\Theta \frac{(\Theta^2 + \vartheta^2)^2 d\vartheta}{(\Theta^4 + \pi^2 \vartheta^2) [\pi^2 \vartheta^2 + (\Theta^2 - \vartheta^2)^2]^{1/2}} \equiv \frac{\pi^2}{\rho} \mathfrak{J}_1 + \frac{\pi^2}{64 \rho} \mathfrak{J}_2. \end{aligned}$$

Considerato che $\Theta \leq \frac{\pi}{2}$, si ha

$$\mathfrak{J}_1 < \int_0^\Theta \frac{\vartheta^2 d\vartheta}{[\pi^2 \vartheta^2]^{1/2}} \leq \frac{\pi}{8}.$$

Per \mathfrak{J}_2 si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_2 &< \int_0^\Theta \frac{(\Theta^2 + \mathfrak{J}^2)^2 d\mathfrak{J}}{(\Theta^4 + \mathfrak{J}^2) [\mathfrak{J}^2 + (\Theta^2 - \mathfrak{J}^2)^2]^{1/2}} < \int_0^\Theta \frac{4 \Theta^4 d\mathfrak{J}}{(\Theta^4 + \mathfrak{J}^2) [\mathfrak{J}^2 + (\Theta^2 - \mathfrak{J}^2)^2]^{1/2}} = \\ &= 4 \Theta^4 \int_0^{\Theta/\sqrt{2}} \frac{d\mathfrak{J}}{(\dots) [\dots]^{1/2}} + 4 \Theta^4 \int_{\Theta/\sqrt{2}}^\Theta \frac{d\mathfrak{J}}{(\dots) [\dots]^{1/2}} < \\ &< 4 \Theta^4 \int_0^{\Theta/\sqrt{2}} \frac{d\mathfrak{J}}{(\Theta^4 + \mathfrak{J}^2) [\mathfrak{J}^2 + \frac{1}{4} \Theta^4]^{1/2}} + \\ &+ 4 \Theta^4 \int_{\Theta/\sqrt{2}}^\Theta \frac{d\mathfrak{J}}{\left(\frac{1}{2} \Theta^2\right) \left[\frac{1}{2} \Theta^2\right]^{1/2}} < 8 + 2 (\sqrt{2} - 1) \pi^2. \end{aligned}$$

Quindi

$$(22) \quad I_1 < \frac{\pi^2}{\rho} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi^8}{64 \rho} [8 + 2 (\sqrt{2} - 1) \pi^2].$$

Adesso maggioriamo I_2 :

$$\begin{aligned} (23) \quad I_2 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\Psi(\mathfrak{J})}{\sin \mathfrak{J}} d\mathfrak{J} < \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\frac{2}{\pi} \mathfrak{J}} \left(2 \mathfrak{J}^2 + \frac{\pi^6}{32} \frac{(\Theta^2 + \mathfrak{J}^2)^2}{\Theta^4 + \pi^2 \mathfrak{J}^2} \right) d\mathfrak{J} < \\ &< \int_0^{\pi/2} \left(\pi \mathfrak{J} + \frac{\pi^7}{64} \frac{(\Theta^2 + \mathfrak{J}^2)^2}{\pi^2 \mathfrak{J}^3} \right) d\mathfrak{J} < \frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi^7}{256} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

Dalle (22) e (23) risulta:

$$\begin{aligned} (24) \quad \int_{Z_{Q_0}(Q)} \frac{\cos^2 \varphi}{r} ds &< 2\rho \left(\frac{\pi^3}{8\rho} + \frac{\pi^8}{32\rho} [4 + (\sqrt{2} - 1) \pi^2] \right) + \\ &+ 2 \frac{\pi^8}{8} \left[1 + \frac{\pi^4}{32} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e} \right) \right] < 4850. \end{aligned}$$

Finalmente, dalle (14) e (24) si ottiene il teorema.

§ 4. — **Maggiorazione del gradiente.**

Teorema 1. — *Supponiamo che*

1° $\Omega \in \mathfrak{A}(\rho)$;

2° *la funzione* $u(P)$

(i) *sia biarmonica in* Ω ,

(ii) *sia continua con le sue derivate prime in* $\Omega + \Sigma$,

(iii) *soddisfi le condizioni al contorno (2) e (3).*

Allora

$$\begin{aligned} \max_{P \in \Omega + \Sigma} |\operatorname{grad} u(P)| &< \\ &< \frac{78}{\rho} \max |f| + \left[26400 + (41 + 25 \Phi) \frac{L}{\rho} \right] \cdot \\ &\cdot \max |f'| + \sqrt{56} \max |g|. \end{aligned}$$

Dimostrazione. — Dalla condizione 1° segue che Σ è costituita da un numero finito di curve semplici a due a due prive di punti comuni.

Sia

$$w(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} (2\varphi + \sin 2\varphi) f' ds.$$

Questa funzione è biarmonica in Ω , e di più, secondo i risultati di [2], è uniforme e continua con le sue derivate prime in $\Omega + \Sigma$. Dalla definizione segue immediatamente che

$$(25) \quad |w(P)| \leq L \max |f'| \frac{2\Phi + 1}{2\pi} \quad (P \in \Omega + \Sigma).$$

Indicando la traccia di w su Σ con $w(s)$, come funzione di s , sempre in virtù di [2], si ha

$$(26) \quad \left[\frac{\partial w}{\partial s} \right]_{Q_0 \in \Sigma} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \left[\frac{4 \cos \psi \cos^2 \varphi}{r} \right]_{P \equiv Q_0} f' ds + f'(Q_0).$$

Per una qualsiasi direzione λ si ottiene

$$(27) \quad \frac{\partial w(P)}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \left(-4 \frac{\sin \chi \cos^2 \varphi}{r} \right) f' ds \quad (P \in \Omega),$$

dove χ è l'angolo formato dall'asse \overrightarrow{QP} con λ , orientato nel verso che va da \overrightarrow{QP} a λ . Dalla (27), in virtù del Lemma 5, si ha

$$(28) \quad \begin{aligned} |\operatorname{grad} w(P)| &< \frac{2}{\pi} \int_{\Sigma} \frac{\cos^2 \varphi}{r} ds \max |f'| < \\ &< \frac{2}{\pi} \left(\frac{L}{\rho} + 4850 \right) \max |f'|. \end{aligned}$$

Sia $H(P)$ una funzione armonica in Ω , continua in $\Omega + \Sigma$ con le sue derivate prime che soddisfi la condizione al contorno

$$(29) \quad \left[\frac{\partial H}{\partial s} \right]_{Q_0 \in \Sigma} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \left[\frac{4 \cos \psi \cos^2 \varphi}{r} \right]_{P \equiv Q_0} f' ds.$$

Dal Lemma 3 si ottiene:

$$(30) \quad \max \left| \frac{\partial H}{\partial s} \right| < \frac{2}{\pi} \left(\frac{L}{\rho} + 5 \right) \max |f'|.$$

Dalla (26) segue:

$$\frac{\partial}{\partial s} (w - H) = f'.$$

Le costanti arbitrarie da cui dipende H (il numero di queste costanti è uguale al numero delle curve semplici e chiuse, dalle quali Σ è composta) siano tali che risulti

$$(31) \quad w(P) - H(P) = f(P) \quad (P \in \Sigma).$$

In conseguenza della (25) e della (31) si ha

$$(32) \quad \max |H(s)| \leq \max |f| + \frac{2\Phi + 1}{2\pi} L \max |f'|.$$

Derivando la (29), e basandoci sul Lemma 4, otteniamo:

$$\begin{aligned}
 \max \left| \frac{\partial^2 H}{\partial s^2} \right| &= \max \frac{2}{\pi} \left| \int_{\Sigma} (-2) \frac{\cos \psi \cos \varphi}{r^3} \sin (\varphi + \psi) f' ds \right| \leq \\
 (33) \quad &\leq \frac{4}{\pi} \max \int_{\Sigma} \frac{|\cos \psi \cos \varphi|}{r^2} ds \max |f'| < \frac{4}{\pi} \left(\frac{L}{\rho^2} + \frac{6}{\rho} \right) \max |f'|.
 \end{aligned}$$

Dalla (31) segue che $u(P) - w(P) + H(P)$ è nulla su Σ , e perciò, applicando il Lemma 2 a questa funzione, si ottiene

$$\begin{aligned}
 \max_{P \in \Omega + \Sigma} |\text{grad} [u(P) - w(P) + H(P)]| &\leq \\
 &\leq \sqrt{56} \max_{P \in \Sigma} \left| \frac{\partial u(P)}{\partial \nu} - \frac{\partial w(P)}{\partial \nu} + \frac{\partial H(P)}{\partial \nu} \right|,
 \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned}
 \max_{P \in \Omega + \Sigma} |\text{grad} u(P)| &\leq \sqrt{56} \left[\max |g| + \max \left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right| + \right. \\
 (34) \quad &+ \max \left| \frac{\partial H}{\partial \nu} \right| \left. \right] + \max_{P \in \Omega + \Sigma} |\text{grad} w(P)| + \max_{P \in \Omega + \Sigma} |\text{grad} H(P)|.
 \end{aligned}$$

Dalla (28), dal Lemma 1 con $\omega = \frac{1}{2}$ in virtù delle (30), (32) e (33), e dalla (34) segue il teorema.

Teorema 2. — *Supponiamo che siano soddisfatte le condizioni del Teorema 1. Allora*

$$\begin{aligned}
 \max_{P \in \Omega + \Sigma} |\text{grad} u(P)| &< \\
 &< \left[26400 + (60,5 + 25 \Phi) \frac{L}{\rho} \right] \max |f'| + \sqrt{56} \max |g|.
 \end{aligned}$$

Dimostrazione. — Applicando il Teorema 1 per la funzione

$$v = u - \frac{1}{2} (\max f + \min f),$$

considerato che $\text{grad } u \equiv \text{grad } v$ e di più, tenendo conto della disuguaglianza

$$\max_{\Sigma} |v| \leq \frac{1}{4} L \max |f'|,$$

si ottiene il teorema.

Sia (x, y) un sistema di coordinate cartesiane. Per la funzione $u(x, y)$, definita e continua con le sue derivate prime nel semipiano $y \geq 0$, verificante le condizioni al contorno

$$(2') \quad u(x, 0) = f(x),$$

$$(3') \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = g(x),$$

introduciamo le seguenti notazioni:

$$F = \max \left[\sup_{-\infty < x < \infty} |f'(x)|, \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} \max_{\substack{x^2 + y^2 = r^2 \\ y \geq 0}} |\text{grad } u(x, y)| \right],$$

$$G = \max \left[\sup_{-\infty < x < \infty} |g(x)|, \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} \max_{\substack{x^2 + y^2 = r^2 \\ y \geq 0}} |\text{grad } u(x, y)| \right].$$

Teorema 3. — *La funzione $u(x, y)$*

- (i) *sia biarmonica nel semipiano aperto $y > 0$,*
- (ii) *sia continua con le sue derivate prime nel semipiano chiuso $y \geq 0$,*
- (iii) *soddisfi le condizioni al contorno (2') e (3').*

Allora

$$\sup_{y \geq 0} |\text{grad } u(x, y)| \leq 27100 F + \sqrt{56} G.$$

Dimostrazione. — Siano Ω_R il campo indicato sulla figura 3, dove ε è un numero arbitrario positivo, L_R la lunghezza della sua frontiera. È evidente che:

1) $\Omega_R \in \mathcal{A}(R)$, indipendentemente da ε ,

$$2) \quad \frac{L_R}{R} = 4\varepsilon + 2\pi,$$

3) la quantità Φ relativa a Ω_R , indipendentemente da R e ε , è uguale a $\pi/2$.

In virtù di (1), (2) e (3), applicando il Teorema 2 per la funzione u

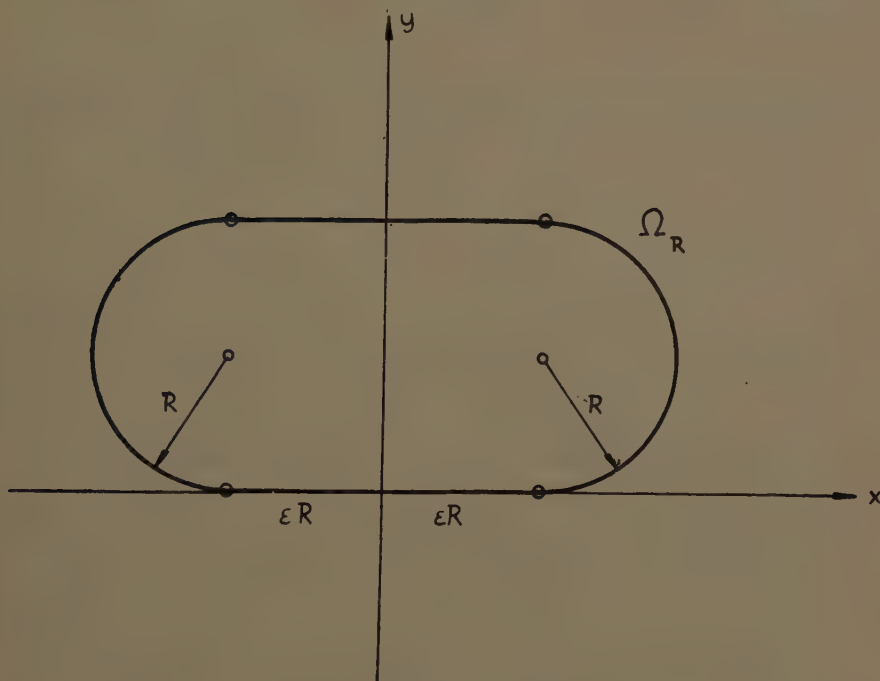


Fig. 3.

e per il campo $\Omega = \Omega_R$, con i passaggi al limite $R \rightarrow \infty$ e poi $\varepsilon \rightarrow 0$, si ottiene il teorema.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ADLER G. *Maggiorazione del gradiente delle funzioni armoniche mediante i loro valori al contorno*. Mem. Acc. Naz. Lincei, Cl. sc. fis., s. VIII, vol. VI sez. 1^a, fasc. 7^o, pp. 183-201. Roma, 1961.
- [2] MIRANDA C. *Formule di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche di due variabili*. Giorn. di Matemat. di Battaglini, LXXVIII (1948-49), pp. 97-118.

RIASSUNTO. — Per il gradiente delle funzioni biarmoniche di due variabili soddisfacenti le condizioni al contorno (2) e (3) si stabilisce una maggiorazione del tipo (4), dove le costanti K_1 , K_2 e K_3 dipendono soltanto dalla forma del dominio, e sono numericamente determinate. Il metodo è basato su un procedimento del MIRANDA (vedere [2]) e su un risultato anteriore dell'autore, relativo a funzioni armoniche (vedere [1]).

SUMMARY. — For the gradient of biharmonic functions of two variables, satisfying the boundary conditions (2) and (3), an estimate of form (4) is stated, where the constants K_1 , K_2 and K_3 depend on the form of the domain only and are numerically determined. The method is based on that of MIRANDA (see [2]) and on a previous result of the author concerning harmonic functions (see [1]).

Influenza dell'età e del digiuno sul colesterolo epatico in ratti Wistar maschi

*Nota dei dott. Lidia Foti, Teodoro De Leo e Isabella Trara Genoino
presentata dal socio ordinario Antonietta Orrù*

(Adunanza del dì 4 novembre 1961)

Il digiuno apporta in maniera più o meno cospicua, a seconda delle specie considerate, delle caratteristiche variazioni alla concentrazione dei lipidi epatici.

Secondo le esperienze condotte da MAC LACHLAN e coll. [1] sul topo durante un digiuno prolungato fino a 96 ore, tali variazioni si presentano sotto forma di un incremento iniziale, cui fa seguito un decremento.

Le esperienze di DEUEL e coll. [2] sul ratto hanno messo in evidenza, con un digiuno prolungato fino a 120 ore, un andamento simile anche se meno marcato, e questi risultati hanno trovato conferma anche da parte di altri AA. [3] [4] [5].

L'andamento osservato è dovuto alla mobilitazione dei grassi dai luoghi di deposito al fegato, che è l'organo prevalentemente preposto all'ossidazione degli acidi grassi. Nelle condizioni di digiuno, infatti, la principale fonte energetica per l'animale è costituita appunto dai lipidi. Finchè sono disponibili i grassi di deposito, la concentrazione epatica dei lipidi aumenta, ma, con il loro esaurirsi, anche i lipidi epatici risentono di questo decremento.

Come è stato notato da alcuni studiosi (HUTCHENS e coll. [6] WHYTNEY e ROBERTS [7]), anche la concentrazione del colesterolo epatico, presenta delle variazioni con il digiuno.

In precedenti ricerche [8] due di noi misero in evidenza un andamento caratteristico della concentrazione del colesterolo epatico di ratti Wistar maschi, alimentati con una dieta normale di composizione nota con basso contenuto di colesterolo (0,025%), con il variare dell'età, quando venivano sacrificati dopo 48 ore di digiuno.

Facendo seguito a tale nota, riferiamo indagini del tutto simili, eseguite su ratti maschi Wistar di eguali età, che vennero però sacrificati dopo 10 ore di digiuno, per poter osservare nelle varie età l'influenza della durata del digiuno sul colesterolo epatico.

^{*)} Indagini eseguite col contributo del C.N.R.

PARTE SPERIMENTALE

Le ricerche riferite nella presente nota furono eseguite su 37 ratti maschi Wistar alimentati, dalla fine dell'allattamento in poi, con una dieta normale, costituita da cibi naturali, la cui composizione è stata riportata per esteso in una precedente nota [9]. I ratti furono riuniti in 4 gruppi A, B, C e D, aventi rispettivamente le seguenti caratteristiche:

- 1) Gruppo A : Età giorni 47 ± 0 — Peso medio g 84 — Numero ratti 10
- 2) Gruppo B : Età giorni 110 ± 11 — Peso medio g 224 — Numeri ratti 8
- 3) Gruppo C : Età giorni 265 ± 45 — Peso medio g 241 — Numero ratti 10
- 4) Gruppo D : Età giorni 510 ± 30 — Peso medio g 314 — Numero ratti 9

Essi vennero sacrificati dopo 10 ore di digiuno per decapitazione; sul fegato, prelevato con la tecnica già descritta [9], furono determinati: *a*) il contenuto di acqua; *b*) l'azoto totale; *c*) il colesterolo totale e libero con i metodi riferiti nei particolari in una precedente nota [8].

I risultati delle misure sono riportati nelle tabelle I, II e III e nei grafici delle figure 1 e 2. (Per l'errore standard della media è stata utilizzata la formula:

$$S E = \frac{\sqrt{\frac{\sum d^2}{n-1}}}{\sqrt{n}}$$

dove *n* è il numero dei casi e *d* è la differenza tra ciascun valore e la media del gruppo. Per i valori di *p* si fa riferimento alle formule già riportate in una nota precedente [10].

RISULTATI.

Umidità e azoto. Il contenuto in acqua del fegato, espresso in mg/g fegato, presenta (vedi tabella I) un leggero decremento allorchè si passa dai ratti di 47 giorni a quelli di 110 ± 11 . A tale leggero decremento, corrisponde un leggero aumento della concentrazione dell'azoto totale. Per tutte le altre età considerate, sia il contenuto in acqua che la concentrazione dell'azoto totale, restano costanti non essendo, le piccole variazioni tra gruppo e gruppo, statisticamente significative.

Colesterolo. La concentrazione del colesterolo totale e delle sue due frazioni (che risultano in media il 71% per quella libera ed il 29% per quella esterificata), espressa in mg/g fegato fresco, presenta un andamento caratteristico in funzione dell'età (vedi tabella II e grafico di figura 1): per i primi due gruppi di ratti, e cioè fino a 110 giorni circa, è piuttosto elevata, diminuisce significativamente tra i 110 ed i 265 giorni, per mantenersi a questo livello per le età maggiori.

TABELLA I.

Contenuto in acqua e concentrazione dell'azoto totale nei ratti Wistar maschi di varie età.

Gruppo ratti	Acqua		Azoto totale			
	mg/g fegato + S. E.	Livelli di probabilità	mg/g fegato secco + S. E.	Livelli di probabilità	mg/g fegato fresco + S. E.	Livelli di probabilità
A	706 + 2	0,02 < p < 0,05	113 + 9	0,02 < p < 0,05	33,2 + 2,6	0,02 < p < 0,05
B	692 + 6	0,4 < p < 0,5	137 + 11	0,1 < p < 0,2	42,2 + 3,4	0,1 < p < 0,2
C	698 + 4	0,3 < p < 0,4	123 + 2	0,1 < p < 0,2	37,1 + 0,6	0,1 < p < 0,2
D	692 + 3		118 + 3		36,6 + 0,9	
Età gg 47 + 0						
Peso medio g 84						
Età gg 110 + 11						
Peso medio g 224						
Età gg 265 + 45						
Peso medio g 241						
Età gg 510 + 30						
Peso medio g 314						

TABELLA II.

Concentrazione del colesterolo epatico nei ratti Wistar maschi di varie età.

Gruppo ratti		Colesterolo in mg/g fegato (valori medi \pm S. E.)				
		Colesterolo totale	Livelli di probabilità	Colesterolo esterificato	Livelli di probabilità	Colesterolo libero
A	(Peso medio fegato \pm S. E. g 3,13 \pm 0,20)	2,36 \pm 0,16	0,05 $<$ p $<$ 0,1	0,65 \pm 0,09	0,1 $<$ p $<$ 0,2	1,71 \pm 0,13
B	(Peso medio fegato \pm S. E. g 6,08 \pm 0,24)	3,07 \pm 0,32	0,001 $<$ p $<$ 0,01	1,07 \pm 0,29	0,02 $<$ p $<$ 0,05	2,00 \pm 0,25
C	(Peso medio fegato \pm S. E. g 8,43 \pm 0,42)	1,90 \pm 0,14	0,9 $<$ p	0,53 \pm 0,07	0,8 $<$ p $<$ 0,9	1,37 \pm 0,13
D	(Peso medio fegato \pm S. E. g 9,47 \pm 0,26)	1,92 \pm 0,12		0,50 \pm 0,09		1,42 \pm 0,08

Tale andamento non si modifica affatto se i risultati si riferiscono, anzichè al fegato nelle condizioni naturali di umidità, al fegato secco, e ciò anche per quei due gruppi in cui si è rilevata una variazione del contenuto in acqua del fegato.

Il contenuto in colesterolo totale dell'intero fegato (come quello delle

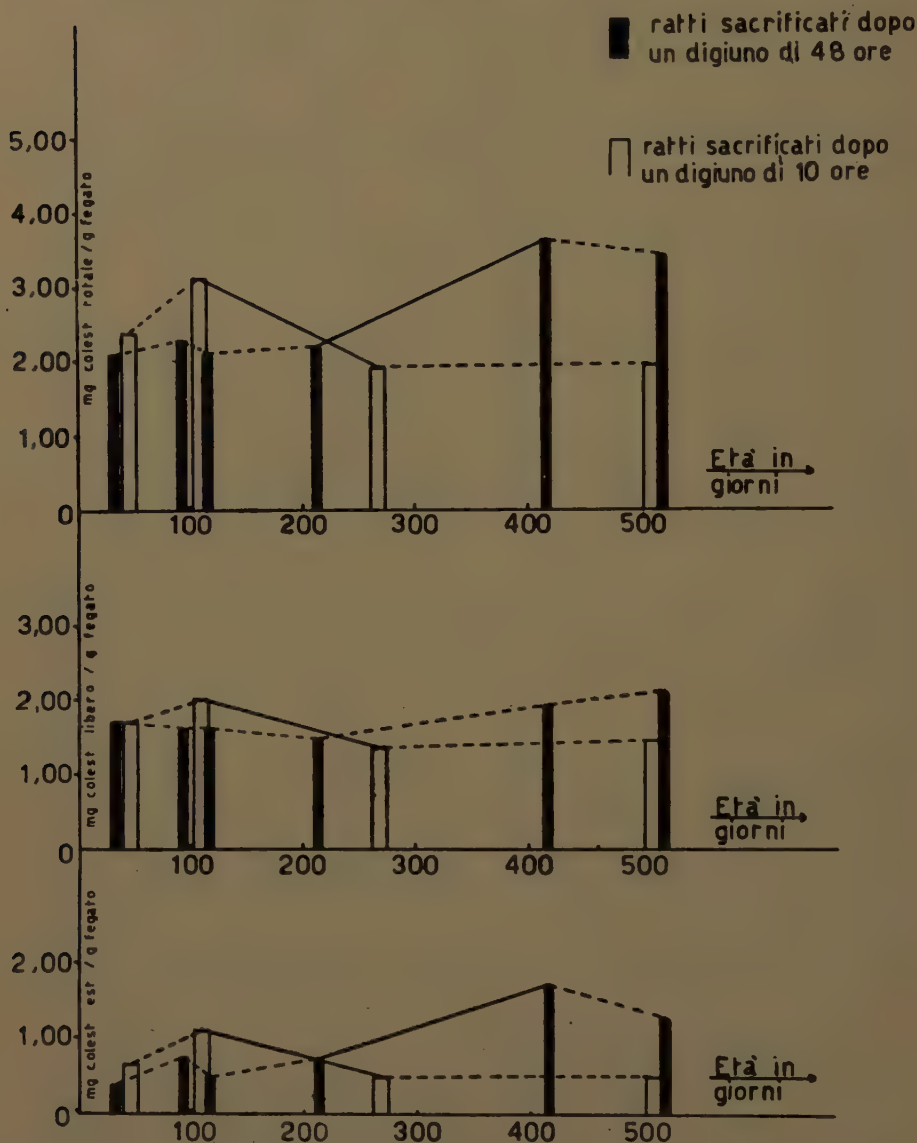


Grafico n. 1. — Concentrazione del colesterolo epatico nei ratti Wistar maschi in funzione dell'età e della durata del digiuno.

----- Variazioni non significative.

————— Variazioni significative.

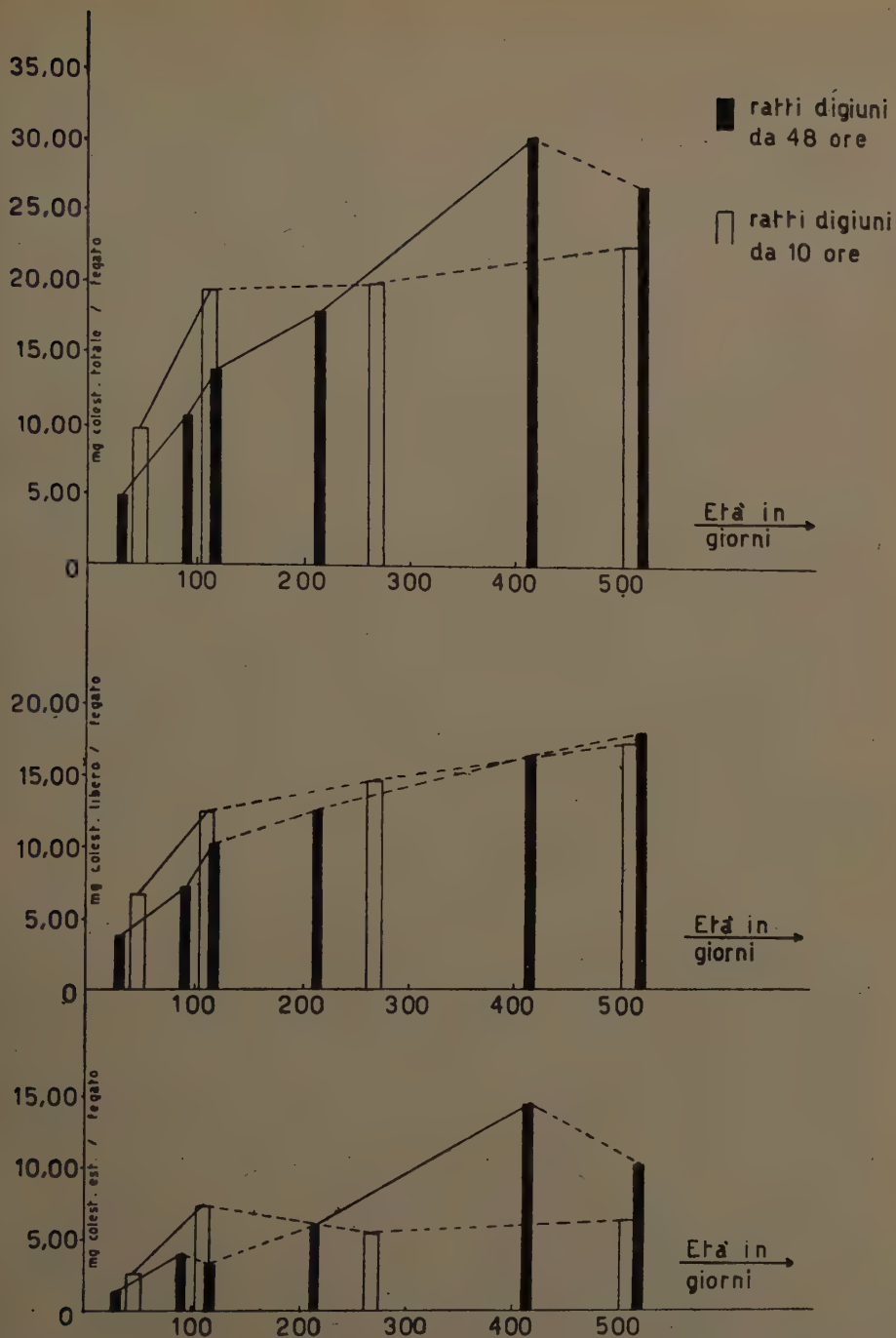


Grafico n. 2. — Quantità totale del colesterolo epatico nei ratti Wistar maschi in funzione dell'età e della durata del digiuno.

— — — — — Variazioni non significative.
— — — — — Variazioni significative.

due frazioni libera ed esterificata) d'altra parte presenta un incremento significativo allorchè si passa dai ratti di 47 a quelli di 110 giorni circa, facilmente spiegabile, per il notevole incremento, a quell'età, del peso del fegato (vedi tabella III). Alle età successive si ha un compenso tra la diminuzione della concentrazione (vedi grafico di fig. I) e l'ulteriore aumento del peso del fegato, per cui il valore colesterolo per fegato resta praticamente costante.

Ai fini che questa nota si propone, mettiamo a confronto, nei grafici delle figure 1 e 2 e nella tabella IV, i valori ottenuti per questi ratti, sacrificati dopo un digiuno di 10 ore, con quelli ottenuti per ratti dello stesso ceppo, tenuti alla stessa alimentazione, ma che furono sacrificati dopo 48 ore di digiuno, sui quali si è già riferito in una precedente nota (8).

Dal confronto tra gruppi di ratti di età paragonabili e fino ai 265 giorni di età, si può rilevare che i valori della concentrazione del colesterolo totale e delle sue due frazioni, sono pressochè eguali, non essendo le differenze significative. Invece, per i gruppi di ratti più vecchi (510-520 giorni di età) i livelli della concentrazione, raggiunti nei due casi, differiscono significativamente (vedi tab. IV). Per questi ultimi gruppi, infatti, il digiuno prolungato fino a 48 ore dà luogo ad un notevole incremento della concentrazione del colesterolo epatico a carico in particolare della frazione esterificata, non mostrando quella libera variazioni significative. Poichè la durata del digiuno, presa in considerazione, non apporta variazioni degne di nota al peso dei fegati, per il contenuto in colesterolo dell'intero organo valgono le stesse osservazioni fatte per i valori che rappresentano la concentrazione. I valori cioè che esprimono le quantità totali di colesterolo, presentano delle divergenze significative solo per i gruppi di ratti più vecchi e solo a carico della frazione esterificata.

DISCUSSIONE

Pochi, in effetti, sono gli studiosi che si sono interessati di stabilire le variazioni apportate dalla durata del digiuno alla concentrazione del colesterolo epatico nei ratti; HUTCHENS e coll. [6], sperimentando su ratti maschi adulti SPRAGUE-DAWLEY del peso di 200-250 g, tenuti a digiuno, per periodi di tempo variabili fino a 240 ore, osservarono un leggero graduale aumento della concentrazione del colesterolo epatico (da 2,50 a 3,48 mè/g fegato fresco). WHYTNEY e ROBERTS [7], dopo aver tenuto ratti maschi adulti dello stesso ceppo, del peso di 300-350 g a digiuno per 24 ore, osservarono un leggerissimo incremento del colesterolo (da 1,2 a 1,4 mg/g fegato fresco). GUARDAMAGNA e coll. [11] sperimentarono, invece, su ratti (di ceppo non specificato) di età diverse e osservarono una diminuzione della concentrazione del colesterolo per i ratti più vecchi, senza tuttavia indicare la durata del digiuno. Tutti gli studiosi su citati non hanno però preso in considerazione le due variabili insieme: durata del digiuno ed età dei soggetti, che appaiono influenzare la concentrazione del colesterolo epatico. Non è possibile, quindi, mettere a confronto i loro con i nostri risultati. Ciò pre-

TABELLA III.

Quantità totale di colesterolo epatico nei ratti Wistar maschi di varie età.

Gruppo ratti	Colesterolo mg/ fegato (valori medi \pm S. E.)				
	Colesterolo totale	Livelli di probabilità	Colesterolo esterificato	Livelli di probabilità	Colesterolo libero
A Peso medio fegato \pm S. E. g 3,13 \pm 0,20	7,39 \pm 0,79	$p < 0,001$	2,09 \pm 0,37	$0,001 < p < 0,01$	5,30 \pm 0,58
					$0,001 < p < 0,01$
B Peso medio fegato \pm S. E. g 6,08 \pm 0,24	19,58 \pm 2,34	$0,1 < p < 0,2$	7,37 \pm 2,16	$0,1 < p < 0,2$	12,21 \pm 1,46
					$0,7 < p < 0,8$
C Peso medio fegato \pm S. E. g 8,43 \pm 0,42	16,02 \pm 0,96	$0,1 < p < 0,2$	4,47 \pm 0,67	$0,8 < p < 0,9$	11,55 \pm 0,93
					$0,1 < p < 0,2$
D Peso medio fegato \pm S. E. g 9,47 \pm 0,26	18,18 \pm 1,15		4,73 \pm 1,27		13,45 \pm 0,70

TABELLA IV.

Variazioni della concentrazione del colesterolo epatico nei gruppi di ratti sacrificati dopo 10 e 48 ore di digiuno.

C O L E S T E R O L O T O T A L E								
	Età in gg 30 - 47		Età in gg 92 - 117		Età in gg 213 - 265		Età in gg 510 - 530	
	mg/g fegato fresco \pm S. E.	Livelli di probabilità	mg/g fegato fresco \pm S. E.	Livelli di probabilità	mg/g fegato fresco \pm S. E.	Livelli di probabilità	mg/g fegato fresco \pm S. E.	Livelli di probabilità
Ratti digiuni da 10 ore	$2,36 \pm 0,16$	$0,2 < p < 0,3$	$3,07 \pm 0,32$	$0,2 < p < 0,3$	$1,90 \pm 0,14$	$0,3 < p < 0,4$	$1,92 \pm 0,12$	$0,001 < p < 0,01$
Ratti digiuni da 48 ore	$2,07 \pm 0,14$		$2,32 \pm 0,12$		$2,14 \pm 0,67$		$3,34 \pm 0,36$	
C O L E S T E R O L O E S T E R I F I C A T O								
Ratti digiuni da 10 ore	$0,65 \pm 0,09$	$0,05 < p < 0,1$	$1,07 \pm 0,29$	$0,5 < p < 0,6$	$0,53 \pm 0,07$	$0,2 < p < 0,3$	$0,50 \pm 0,09$	$0,01 < p < 0,02$
Ratti digiuni da 48 ore	$0,39 \pm 0,09$		$0,72 \pm 0,20$		$0,67 \pm 0,10$		$1,24 \pm 0,24$	
C O L E S T E R O L O L I B E R O								
Ratti digiuni da 10 ore	$1,71 \pm 0,13$	$0,8 < p < 0,9$	$2,00 \pm 0,25$	$0,5 < p < 0,6$	$1,37 \pm 0,13$	$0,7 < p < 0,8$	$1,42 \pm 0,08$	$0,01 < p < 0,02$
Ratti digiuni da 48 ore	$1,68 \pm 0,19$		$1,60 \pm 0,25$		$1,47 \pm 0,25$		$2,10 \pm 0,26$	

messo si può tentare di spiegare la diversa concentrazione del colesterolo epatico in funzione dell'età, quando varia la durata del digiuno, prendendo in considerazione i vari fattori che possono influenzarla: la sintesi «in loco», l'apporto del colesterolo esogeno (alimentare ed extraepatico) la diffusione (verso il sangue e la bile) ed il suo catabolismo.

MORRIS e CHAIKOFF [12], alimentando per un periodo variabile fino a 45 giorni ratti giovani con una dieta cui era stato aggiunto colesterolo marcato (0,05%), trovarono che il colesterolo epatico proveniva per circa il 70-80% dalla sintesi «in loco».

D'altra parte nostre ricerche (in corso di pubblicazione) hanno messo in evidenza che la velocità di tale sintesi (misurata in vitro) dopo 10 ore di digiuno, si mantiene bassa e costante fino ai 110 giorni di età circa, aumenta progressivamente fino ai 345 per riportarsi, verso i 505 giorni circa, ai valori iniziali.

Da ciò si può dedurre che nei ratti giovani fino ai 110 giorni di età, si ha tra la velocità di sintesi epatica e quella di diffusione e di catabolismo, un equilibrio che si manifesta con la costanza della concentrazione del colesterolo epatico. La successiva diminuzione di tale concentrazione dai 110 ai 256 giorni, nonostante l'aumentata velocità di biosintesi, quale da noi osservata sul fegato in vitro, dimostrerebbe una maggiore possibilità di utilizzazione del colesterolo epatico, sia nella diffusione come nelle sue trasformazioni.

Dai 265 ai 505 giorni circa, alle variazioni della biosintesi in vitro, dovrebbe corrispondere una variazione nello stesso senso delle velocità di utilizzazione (diffusione e catabolismo), da cui la costanza della concentrazione del colesterolo.

Nelle condizioni di digiuno prolungato [48 h] i fattori che possono entrare in gioco per la regolazione della concentrazione del colesterolo sono: la velocità di biosintesi epatica, il colesterolo extraepatico proveniente dalle riserve, le velocità di diffusione verso il sangue e la bile ed il catabolismo (l'apporto dato dal colesterolo alimentare può, in questo caso, considerarsi nullo).

In queste condizioni nei ratti giovani fino ai 200 giorni di età, per i quali, come l'esperienza ha dimostrato, la velocità di sintesi in vitro resta costante (nostri dati non ancora pubblicati), la costanza della concentrazione del colesterolo si deve attribuire all'equilibrio tra biosintesi ed utilizzazione. Nei ratti delle età successive (per i quali è stato dimostrato con esperienze in vivo ed in vitro che la velocità di biosintesi diminuisce), si deve ammettere un maggiore apporto di colesterolo extraepatico proveniente dalle riserve ed una diminuita velocità di utilizzazione, che portano ad un aumento della concentrazione del colesterolo epatico.

È interessante, infatti, notare che l'incremento della concentrazione, che si verifica nel digiuno prolungato, avviene a spese del colesterolo esterificato, che appare essere la frazione più mobile che fornisce all'epatocellula con il colesterolo anche gli acidi grassi.

CONCLUSIONE

I nostri risultati ci permettono di affermare che nei ratti Wistar maschi, tenuti dallo svezzamento in poi ad alimentazione mista standardizzata (colesterolo 0,025%):

a) la concentrazione del colesterolo totale e delle sue due frazioni libera ed esterificata dopo 10 ore di digiuno, presenta valori elevati e costanti fino a circa 110 giorni di età, decresce poi fino a 265 giorni, per restare successivamente costante fino ai 510 giorni;

b) la concentrazione del colesterolo totale e delle sue due frazioni libera ed esterificata, dopo 48 ore di digiuno presenta valori praticamente coincidenti con quelli del gruppo precedente fino ai 200 giorni di vita circa. Successivamente il digiuno prolungato produce un incremento dei valori della concentrazione, che si verifica a carico della frazione esterificata, e può essere messo in relazione al maggiore apporto del colesterolo proveniente dalle riserve extraepatiche.

BIBLIOGRAFIA

- [1] MAC LACHLAN P. L., HODGE H. C., BLOOR W. R., WELCH E. A., TRUAX F. L., TAYLOR J. D. *J. Biol. Chem.* **143** (1942), 473.
- [2] DEUEL H. J., GULICK M., GRUNEWALD C. F., CUTLER C. H. *J. Biol. Chem.* **104** (1934), 519.
- [3] HODGE H. C., MAC LACHLAN P. L., BLOOR W. R., WELCH E. A., KORNBERG S. E., FALKENHERM M. *Proc. Soc. Exp. Biol. Med.* **68** (1948), 332.
- [4] BARRETT H. M., BEST C. H., RIDOUT J. H. *J. Physiol.* **93** (1938), 367.
- [5] DIBLE J. H. *J. Pathol. Bacteriol.* **95** (1932), 451.
- [6] HUTCHENS T. T., VAN BRUGGEN J. T., COCKBURN R. M., WEST E. S. *J. Biol. Chem.* **208** (1954), 115.
- [7] WHYTNEY J. E., ROBERTS S. *Am. J. Physiol.* **181** (1955), 446.
- [8] FOTI L., DE LEO T. *Ric. Sc.* **12** (1960), 2021.
- [9] DE LEO T., FOTI L. *Rend. Acc. Sc. Fis. Mat.* **27** (1960), 218.
- [10] DE LEO T., FOTI L. *Ric. Sc.* **11** (1960), 1696.
- [11] GUARDAMAGNA C., MASSARI N., SANTAMBROGIO C. *Atti Soc. Lomb. Sc. Med. Biol.* **14** (1959), 562.
- [12] MORRIS M. D., CHAIKOFF I. L. *J. Biol. Chem.* **234** (1959), 1095.

RIASSUNTO. — I valori del colesterolo epatico di ratti Wistar maschi normali di varie età, presentano un comportamento diverso in rapporto alla durata del digiuno (10h e 48h) che precede il prelievo del fegato. Per età superiori a 200 giorni, il digiuno prolungato (48h) produce un aumento di tali valori, che si verifica a carico della frazione esterificata e può mettersi in relazione al maggiore apporto di colesterolo dalle riserve extraepatiche.

SUMMARY. — The values of hepatic cholesterol of normal male Wistar rats of varying age show a different course according to the duration of fasting (10h and 48h) before taking away liver. In rats aged over 200 days, from a protract fasting (48h) follows an increase in such values which is shown by esterified fraction, and it can be accounted for in relation to a higher supply of cholesterol from extrahepatic reserves.

Rapporti tra alimentazione e colesterolo epatico ed ematico in ratti maschi Wistar

Nota I: Influenza di una dieta normoprotidica-iperlipidica

*Nota del prof. Francesco Badolato e della dott. Iride Bucci,
presentata dal socio ordinario Antonietta Orrù (*)*

(Adunanza del dì 4 novembre 1961)

Il ruolo dei vari fattori dietetici sulla concentrazione del colesterolo ematico, suscita l'interesse crescente dei biologi per cui un numero notevolissimo di esperienze è rivolto a stabilire i rapporti tra essi intercorrenti.

Uno sguardo alla bibliografia che si riferisce a tale argomento rivela però immediatamente il disaccordo tra i diversi dati sperimentali e le conclusioni che da essi si possono trarre. Tale disaccordo che spesso riguarda l'effetto di uno stesso principio nutritivo è da ascriversi alle condizioni sperimentali estremamente variabili in cui i vari ricercatori si sono posti.

Questo stato di cose ci ha indotti ad istituire una serie di indagini rivolte ad accertare il comportamento del colesterolo nel sangue (plasma e parte figurata) e nel fegato di ratti maschi Wistar, sottoposti, per periodi di tempo prolungati e noti, a partire dallo svezzamento a diete speciali in cui si facciano variare sistematicamente l'ammontare e la natura dei lipidi e dei protidi.

Le variazioni del colesterolo ematico di ratti Wistar ad alimentazione normale, col variare dell'età, sono state già messe in evidenza dalle indagini eseguite da DE LEO e coll. [1], che hanno portato alla conclusione che la concentrazione percentuale del colesterolo totale serico e delle sue frazioni, presenta un andamento tipico in funzione dell'età: dai valori più elevati che si riscontrano all'inizio dello svezzamento, si passa ai valori più bassi per l'età di 117 giorni circa; essi risalgono poi gradualmente verso i 407 giorni.

FOTI e coll. [2] hanno preso in esame anche il comportamento del colesterolo epatico in ratti maschi Wistar ad alimentazione normale standardizzata, col variare dell'età, e l'hanno messo in rapporto col comportamento corrispondente del colesterolo serico.

Dalle loro indagini è risultato evidente che:

a) i livelli del colesterolo totale (come delle due frazioni che lo compongono) per l'intero fegato, sono sempre notevolmente maggiori di

*) Indagini eseguite col contributo del C.N.R.

quelli dello stesso composto circolante nel siero, indipendentemente dall'età dei soggetti in esame;

b) l'andamento del colesterolo epatico totale appare, invece, diverso da quello del colesterolo dell'intero siero, col variare dell'età;

c) le maggiori modificazioni si osservano sempre a carico del colesterolo esterificato.

Per quanto riguarda il colesterolo nella parte globulare del sangue, poche e discordanti sono le notizie bibliografiche, e non si riferiscono al ratto.

Secondo WACKER e HACK [3], i globuli rossi di coniglio, di cane e di vitello sono ricchi di colesterolo, che vi si trova allo stato libero; anche BODANSKY [4], nei globuli rossi di cani normali, ha trovato solamente colesterolo libero; secondo CYTROMBERG [5] e ROHAMAN [6], negli eritrociti di cavallo si trovano invece grandi quantità di colesterolo esterificato. PFEIFFER [7] e THAYSEN e coll. [8] hanno messo in evidenza che le quantità di colesterolo totale nei globuli rossi di bue non sono costanti.

Secondo HAGERMAN e GOULD [9] il colesterolo degli eritrociti entra in rapido equilibrio con il colesterolo libero del plasma, con un meccanismo non ben chiaro. Tale equilibrio si realizza in 4h, ma nella prima ora si raggiunge quasi la metà dell'equilibrio stesso.

Questi fatti hanno fatto pensare ad una funzione del colesterolo dei globuli rossi, differente da quella prettamente strutturale.

Numerosissime sono le indagini fatte allo scopo di stabilire i rapporti tra colesterolo serico ed epatico e l'alimentazione dei soggetti in esame.

Per quello che riguarda il colesterolo serico, si rimanda alla rivista di PORTMAN e STARE [10], corredata da una estesissima bibliografia, da cui si rileva la già enunciata discordanza esistente tra i dati presentati dai diversi ricercatori.

Per quanto riguarda le modificazioni del colesterolo epatico, in rapporto ai costituenti della dieta, con particolare riguardo al ratto, si citeranno i lavori che si sono potuti reperire.

Secondo WHITNEY e ROBERTS [11], AVIGAN e STEINBERG [12], una dieta ricca di lipidi anche se insaturi, eleva il livello del colesterolo epatico; KLEIN [13] ha messo in evidenza, infatti, che tanto il grado di insaturazione quanto l'ammontare della quantità di grasso, influenza la concentrazione del colesterolo nel fegato di ratto.

Secondo ALFIN SLATER [14], DEUEL e coll. [15], AFTERGOOD e coll. [16], KLEIN [13] una certa quantità di grasso è però necessaria nell'alimentazione per provvedere la concentrazione di acidi grassi insaturi richiesta per il trasporto e metabolismo del colesterolo.

OKEY e coll. [17], somministrando a ratti appena svezzati, per sette settimane, diete contenenti il 10% di olio di oliva e il 15% di proteine (caseina e albumina) hanno osservato che, mentre non si hanno variazioni del colesterolo serico, aumentano i lipidi ed il colesterolo epatico. Essi riten-

gono che tali effetti attribuiti all'olio d'oliva, possano essere ascritti alla risultante di un'azione specifica dello squalene (idrocarburo insaturo presente nell'olio d'oliva, considerato il precursore, nella biosintesi, del colesterolo [18]) e di un'azione di massa prodotta dall'apporto notevole di oleato sull'assorbimento e l'esterificazione del colesterolo, nonchè sull'accumulo di gliceridi.

CHANNON e coll. [19] hanno osservato che la somministrazione della metionina con gli alimenti, abbassa leggermente la concentrazione del colesterolo epatico dei ratti, e OKEY e coll. [20] [21] hanno dimostrato che nei ratti il supplemento di ovalbumina o metionina nella dieta, peraltro adeguata (per quanto riguarda l'accrescimento) in proteine, porta ad una diminuzione del livello del colesterolo epatico. L'aggiunta di cistina ha effetto opposto.

NATH e coll. [22], nel definire l'effetto delle proteine dietetiche sul livello del colesterolo serico, hanno determinato anche il colesterolo totale epatico ed osservato che era leggermente più basso per i ratti alimentati con la dieta contenente il 40% di caseina, mentre nessun effetto apprezzabile si osservava se la caseina veniva sostituita, in parte o totalmente con zeina o glutine.

Le ricerche di KRITCHEVSKY e coll. [23] mostrano che i mitocondri epatici di ratti alimentati con grassi saturi, ossidano il colesterolo $26C^{14}$ a $C^{14}O_2$ in proporzioni maggiori dei mitocondri epatici di ratti alimentati con grassi insaturi. I valori del colesterolo epatico da essi trovati, sono maggiori quando gli animali sono alimentati con grassi insaturi.

In questa nota riferiamo i valori del colesterolo epatico ed ematico in ratti maschi Wistar alimentati dallo svezzamento fino a 120 giorni di età con diete di origine vegetale normoprotidiche ed iperlipidiche in grado diverso.

PARTE SPERIMENTALE

Le esperienze sono state condotte su n° 44 ratti Wistar provenienti da genitori alimentati con dieta standard normale (vedi appresso). Detti ratti, a partire dallo svezzamento (30 giorni di età), furono divisi in tre gruppi.

Ai ratti del *primo gruppo* si somministrò la dieta normale standard, ad libitum. Questa dieta forniva, nelle condizioni di umidità naturale, l'8,2% di proteine (di cui il 52,2% di origine animale ed il 47,8% di origine vegetale), il 3,9% di lipidi ed il 25% di glucidi. (Tali valori, riportati all'alimento secco, diventano rispettivamente: 21,2%, 10,2% e 66,2%).

Il valore energetico di tale dieta era di 168 Calorie/100 g di alimento fresco e di 442. Calorie/100 g di alimento secco, di cui il 19,5% sotto forma di protidi, il 20,7% sotto forma di lipidi ed il 59,8% come glucidi. Il colesterolo totale nella dieta allo stato di umidità naturale risultò pari a 0,024%; di cui 0,021% allo stato libero e 0,003% come estere. (Per 100 g di alimento secco, i valori sono rispettivamente: 0,09%, 0,07% e 0,013%). Per la composizione di tale dieta si rinvia ad una nota precedente [24].

Ai ratti del *secondo gruppo* venne somministrata, dopo i 30 giorni di età e fino a 120 giorni, una dieta esclusivamente vegetale (*dieta n° 1*) composta di olio d'oliva, glutine di frumento^(*) e amido nelle proporzioni indicate nella tabella I.

TABELLA I
Composizione della dieta n. 1.

Composizione della dieta in g	Protidi g	Lipidi g	Glucidi g
Glutine: 20	16,50	1,4	—
Olio: 20	—	19,8	—
Riso: 20	1,40	0,17	15,43
Amido: 40	—	—	34,76
Sali: 4			
Totale: 104	17,90	21,37	50,19
Valori %	17,20	20,54	48,25
Calorie totali 446,6	68,80	184,8	193,0
Calorie %	15,4	41,4	43,4

NOTA. — A 100 g di tale dieta sono state aggiunte le seguenti vitamine sottoforma di « Protovit liquido »: Axeroftolo 625 U.I.; tiamina 240 γ ; riboflavina 120 γ ; niacina 1200 γ ; piridoxina 120 γ ; pantenolo 1200 γ ; biotina 12 γ ; acido ascorbico 6200 γ ; vitamina D 125 U.I.; vitamina E 300 γ . La miscela salina è quella di Mc.Collum.

Con tale dieta venivano forniti all'animale protidi nella proporzione del 17,2%, lipidi in quella del 20,54% e glucidi in quella del 48,25%, con un apporto calorico totale di 446,6 Calorie/100 g di alimento secco. Il colesterolo è completamente assente.

Ai ratti del *terzo gruppo* venne somministrata, dallo svezzamento e fino a 120 giorni di età, una dieta (*dieta n° 2*) costituita dagli stessi componenti della dieta n° 1 in proporzioni diverse (tabella II).

Con tale dieta l'apporto di principi alimentari era: 17,2% di protidi, 39,5% di lipidi e 31,5% di glucidi, ed il valore energetico totale di 551,1 calorie/100 g di alimento secco. Anche in questa manca il colesterolo.

Dall'olio usato per l'esperimento si determinò il numero di iodio, che risultò pari a 82, e la quantità di squalene presente, secondo il metodo di HADORN e JUNGKUZ [2] modificato da FABBRIS e VITAGLIANO [25]: esso risultò pari a mg 177/100 ml di olio.

^(*) Il glutine di frumento ci è stato gentilmente offerto dalla Ditta Buitoni, alla quale va il nostro ringraziamento.

TABELLA II.

Composizione della dieta n. 2.

Composizione della dieta in g	Protidi g	Lipidi g	Glucidi g
Glutine: 20	16,50	1,40	—
Olio: 40	—	39,60	—
Riso: 20	1,40	0,17	15,43
Amido: 20	—	—	17,38
Sali: 4			
Totale 104	17,90	41,17	32,81
Valori %	17,21	39,58	31,54
Calorie totali 551,1	68,8	356,2	126,1
Calorie %	12,3	64,6	22,8

NOTA. — A 100 g di tale dieta sono state aggiunte le seguenti vitamine sotto-forma di « Protovit liquido »: Axeroftolo 625 U.I.; tiamina 240 γ ; riboflavina 120 γ ; niacina 1200 γ ; piridoxina 120 γ ; pantenolo 1200 γ ; biotina 12 γ ; acido ascorbico 6200 γ ; vitamina D 125 U.I.; vitamina E 300 γ . La miscela salina è quella di Mc.Collum.

Per ogni gruppo, un certo numero di animali venne sacrificato all'età di 90 giorni ed un altro a 120 giorni (cioè rispettivamente dopo 60 e 90 giorni di alimentazione speciale).

Previo digiuno di 12h, da ogni animale, si prelevava dopo decapitazione, tutto il sangue che, reso incoagulabile con fluoruro sodico, si centrifugava a 3000 giri per separare il plasma dalla parte figurata. Su un'aliquota di plasma si determinava il colesterolo. La parte corpuscolare veniva sospesa in NaCl al 9‰ riportandola allo stesso volume del sangue prelevato. Di tale sospensione si pipettavano 2 ml in una provetta da centrifuga e dopo lavaggio ripetuto con NaCl 9‰, si allontanava il supernatante, e sul sedimento si eseguiva la determinazione del colesterolo, riferendo poi i valori a 100 ml di sangue in toto. Dall'animale così dissanguato si asportava, quindi, il fegato che, lavato a 0°C con NaCl 9‰ ed accuratamente asciugato, si pesava; su una porzione di esso si eseguiva la determinazione del colesterolo.

Il metodo utilizzato per la determinazione del colesterolo totale e libero è quello di SCHOENEIMER e SPERRY [26]. —

Sul fegato si determinava, inoltre, l'umidità, l'azoto totale (col metodo di KJELDHAL), il contenuto in lipidi totali (metodo KUMAGAWA) ed il relativo numero di iodio (metodo WIJSS). —

I valori medi sono riportati nelle tabelle III e IV; e sul grafico della

TABELLA III.

Gruppi di ratti	Età (giorni)	Peso finale in g \pm E. S.	Peso fegato in g \pm E. S.	Umidità % g \pm E. S.	N. totale		Lipidi totali		N. Iodio \pm E. S.
					% g	per fegato g	% g \pm E. S.	per fegato g	
Controllo (ratti n. 8)	90	100 \pm 5,5	3,83 \pm 0,32	70 \pm 0,35	3,5	0,10	5,5 \pm 0	0,20	91 \pm 0,92
Dieta n. 1 (ratti n. 6)	90	144 \pm 4,5	4,51 \pm 0	65,5 \pm 0,5	3,3	0,14	14,6 \pm 0,6	0,65	93 \pm 3,7
Dieta n. 2 (ratti n. 6)	90	115 \pm 10	4,41 \pm 0,2	65,0 \pm 0,4	2,7	0,11	18,1 \pm 1,09	0,78	112 \pm 2,4
Controllo (ratti n. 11)	120	140 \pm 4,5	5,03 \pm 0,36	70 \pm 0	3,4	0,16	4,9 \pm 0,21	0,23	96 \pm 0,78
Dieta n. 1 (ratti n. 6)	120	145 \pm 8,7	5,20 \pm 0,4	62,0 \pm 1,0	3,3	0,16	16,6 \pm 1,9	0,87	93 \pm 1,7
Dieta n. 2 (ratti n. 7)	120	157 \pm 10,7	5,22 \pm 0,3	65,3 \pm 1,9	3,3	0,16	12,4 \pm 1,9	0,64	99 \pm 5,3
Significatività delle differenze ricavate dal <i>t</i> di Student									
Controllo- Dieta n. 1	90	p < 0,001	0,01 < p < 0,02	P < 0,001	—	—	P < 0,001	0,5 < p < 0,6	
Controllo- Dieta n. 2	90	0,1 < p < 0,2	0,1 < p < 0,2	P < 0,001	—	—	P < 0,001	P < 0,001	
Dieta n. 1- Dieta n. 2	90	0,01 < p < 0,02	0,4 < p < 0,5	0,4 < p < 0,5	—	—	0,02 < p < 0,05	0,001 < p < 0,01	
Controllo- Dieta n. 1	120	0,6 < p < 0,7	0,7 < p < 0,8	P < 0,001	—	—	P < 0,001	0,1 < p < 0,2	
Controllo- Dieta n. 2	120	0,05 < p < 0,1	0,6 < p < 0,7	0,001 < p < 0,01	—	—	P < 0,001	0,3 < p < 0,4	
Dieta n. 1- Dieta n. 2	120	0,3 < p < 0,4	0,6 < p < 0,7	0,1 < p < 0,2	—	—	0,1 < p < 0,2	0,3 < p < 0,4	

TABELLA IV.

Valori medi che si riferiscono al colesterolo epatico.

Gruppi di ratti	Età (giorni)	Colesterolo/100 g di fegato fresco			Colestat. per fegato fresco			Rapporto L/E	Colestat./100 g di lipidi totali epatici	
		Totale mg ± E. s.	Libero mg ± E. s.	Esterif. mg	Totale mg	Libero mg	Esterif. mg		Totale	Libero
Controllo (ratti n. 6)	90	212 ± 14,6 σ = 35	162 ± 11,3 σ = 27	50	8,08	6,18	1,90	3,28	3,85	2,94
Dieta n. 1 (ratti n. 6)	90	1555 ± 179 σ = 432	844 ± 15 σ = 36	1211	45,05	11,53	35,51	0,28	10,65	2,85
Dieta n. 2 (ratti n. 6)	90	1049 ± 176,6 σ = 424	263 ± 16,7 σ = 40	786	70,48	15,56	54,92	0,33	5,79	1,45
Controllo (ratti n. 8)	120	210 ± 27,1 σ = 27	189 ± 25,2 σ = 25	21	9,94	9,02	0,91	11,70	4,28	3,85
Dieta n. 1 (ratti n. 6)	120	1281 ± 235 σ = 564	344 ± 30 σ = 74	954	66,04	17,45	48,59	0,40	7,7	2,07
Dieta n. 2 (ratti n. 7)	120	983 ± 118,3 σ = 307	312 ± 26,5 σ = 69	664	52,46	17,01	35,49	0,48	7,8	2,51
Significatività delle differenze ricavate dal <i>t</i> di Student										
Controllo- Dieta n. 1	90	P < 0,001	P < 0,001							
Controllo- Dieta n. 2	90	P < 0,001	P < 0,001							
Dieta n. 1- Dieta n. 2	90	0,05 < p < 0,1	0,001 < p < 0,01							
Controllo- Dieta n. 1	120	P < 0,001	P < 0,001							
Controllo- Dieta n. 2	120	P < 0,001	P < 0,001							
Dieta n. 1- Dieta n. 2	120	0,2 < p < 0,3	0,3 < p < 0,4							

fig. 1 ove si trovano riferiti sia in rapporto a 100 g di fegato e sia come valore medio assoluto per fegato.

Nella tabella V e sul grafico della fig. 1 sono riportati i valori percentuali medi del colesterolo plasmatico e globulare.

I valori sperimentali sono stati elaborati statisticamente.

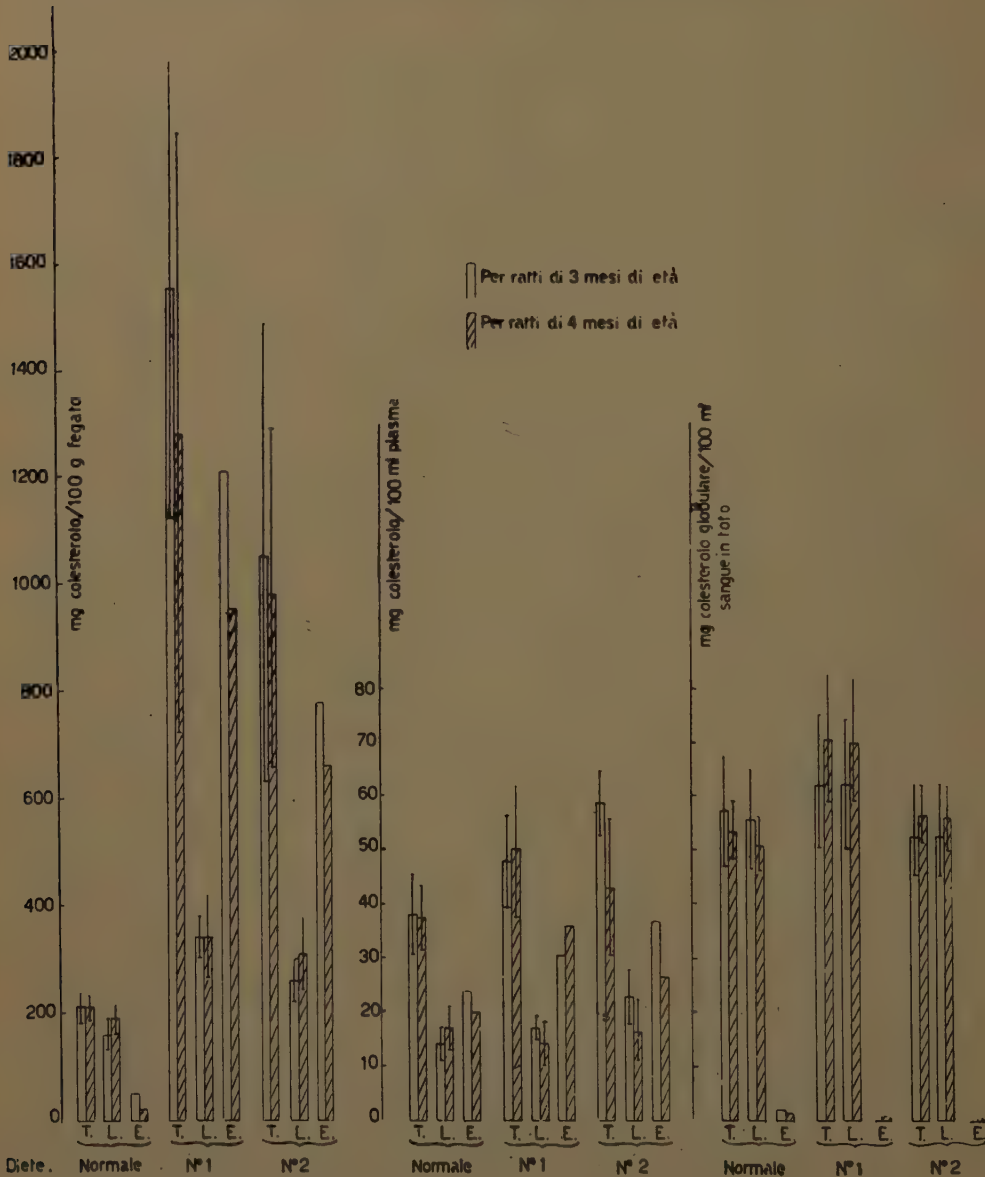


Fig. 1. — Istogrammi che rappresentano i valori del colesterolo totale (T), libero (L) ed esterificato (E) nel fegato, plasma e parte figurata del sangue per i ratti normali e a diete n. 1 e n. 2, dopo 2 e 3 mesi di alimentazione (rispettivamente 3-4 mesi di età).

TABELLA V.

Valori medi che si riferiscono al colesterolo plasmatico e globulare

Gruppi di ratti	Età (giorni)	Colesterolo/100 ml di plasma			Rapporto L/E	Colesterolo globulare/100 ml di sangue		
		Totale mg \pm E. S.	Libero mg \pm E. S.	Esterif. mg		Totale mg \pm E. S.	Libero mg \pm E. S.	Esterif. mg
Controllo (ratti n. 8)	90	38,1 \pm 2,7 $\sigma = 7$	13,8 \pm 1,0 $\sigma = 3$	24,2	0,61	57,2 \pm 3,7 $\sigma = 10$	55,5 \pm 3,3 $\sigma = 9$	1,9
Dieta n. 1 (ratti n. 6)	90	47,8 \pm 3,6 $\sigma = 8$	17,1 \pm 0,79 $\sigma = 1,9$	30,6	0,55	62,3 \pm 5,3 $\sigma = 13$	61,9 \pm 4,95 $\sigma = 12$	0,4
Dieta n. 2 (ratti n. 5)	90	59,2 \pm 2,5 $\sigma = 6$	22,9 \pm 1,90 $\sigma = 4$	37,7	0,60	52,3 \pm 4,2 $\sigma = 10$	52,3 \pm 4,2 $\sigma = 10$	—
Controllo (ratti n. 11)	120	37,5 \pm 1,8 $\sigma = 6$	17,3 \pm 1,3 $\sigma = 4$	20,2	0,77	52,9 \pm 1,6 $\sigma = 5$	51,3 \pm 1,5 $\sigma = 5$	1,6
Dieta n. 1 (ratti n. 6)	120	50,2 \pm 5,0 $\sigma = 12$	14,1 \pm 1,5 $\sigma = 3,8$	36,1	0,39	70,5 \pm 5,0 $\sigma = 12$	69,7 \pm 4,8 $\sigma = 11$	0,8
Dieta n. 2 (ratti n. 7)	120	43,3 \pm 5,1 $\sigma = 13$	16,8 \pm 2,0 $\sigma = 5,4$	26,5	0,63	56,5 \pm 2,0 $\sigma = 6$	55,8 \pm 2,3 $\sigma = 6$	0,8
Significatività delle differenze ricavate dal <i>t</i> di Student								
Controllo- Dieta n. 1	90	0,02 < p < 0,05	0,02 < p < 0,05	—	—	0,4 < p < 0,5	0,05 < p < 0,1	—
Controllo- Dieta n. 2	90	0,001 < p < 0,01	0,001 < p < 0,01	—	—	0,4 < p < 0,5	0,05 < p < 0,01	—
Dieta n. 1- Dieta n. 2	90	0,02 < p < 0,02	0,01 < p < 0,02	—	—	0,1 < p < 0,2	0,1 < p < 0,2	—
Controllo- Dieta n. 1	120	0,02 < p < 0,05	0,1 < p < 0,2	—	—	0,001 < p < 0,01	0,001 < p < 0,01	—
Controllo- Dieta n. 2	120	0,1 < p < 0,2	P < 0,9	—	—	0,1 < p < 0,2	0,05 < p < 0,1	—
Dieta n. 1- Dieta n. 2	120	0,3 < p < 0,4	0,2 < p < 0,3	—	—	0,01 < p < 0,02	0,01 < p < 0,02	—

Il σ è stato calcolato secondo la formula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n-1}}$$

Il t dalla formula:

$$\frac{M_1 - M_2}{\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

e l'errore standard (E.S.) con la formula: $E.S. = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

RISULTATI DELLE ESPERIENZE

Dall'osservazione dei dati analitici è possibile trarre le seguenti deduzioni:

A) *Peso medio dei ratti.*

Il peso medio dei ratti di 90 giorni di età, a dieta n. 1, è superiore a quello dei ratti di controllo, alla stessa età, mentre a 120 giorni di età non si notano differenze significative.

Il peso medio dei ratti di 90 e 120 giorni di età, a dieta n. 2, non è diverso da quello dei ratti di controllo della stessa età.

Mettendo poi a paragone i pesi medi degli animali a diete speciali, si osserva che solo per i ratti di 90 giorni, a dieta n. 1, i pesi sono significativamente superiori a quelli dei ratti a dieta n. 2.

B) *Fegato.*

a) *Peso medio*: il peso medio del fegato, solo per i ratti di 90 giorni, alimentati con dieta n. 1, è maggiore di quello dei ratti ad alimentazione normale. Gli altri valori, per le varie età, non presentano differenze significative.

b) *Umidità*: i fegati dei ratti a dieta n. 1, come quelli dei ratti a dieta n. 2, presentano valori di umidità inferiori a quelli dei ratti a dieta normale (sia a 90 che a 120 giorni di età) ma non mostrano differenze fra loro.

c) *Azoto totale*: nessuna variazione significativa si osserva a questo riguardo tra i vari gruppi di ratti.

d) *Lipidi totali*: i lipidi totali, riferiti a 100 g di fegato fresco, dei ratti a dieta n. 1 e n. 2, sono sempre più elevati di quelli dei ratti di controllo, sia a 90 che a 120 giorni di età. I lipidi totali epatici nei ratti a dieta n. 2, superano significativamente (all'età di 90 giorni) quelli dei ratti a dieta n. 1.

e) *Numero di iodio dei lipidi*: il numero di iodio dei lipidi epatici dei ratti di 90 giorni di età, alimentati con dieta n. 2, risulta notevolmente superiore a quello dei lipidi epatici dei ratti di controllo e a dieta n. 1. Per i lipidi del fegato di ratti di 120 giorni di età non si osservano invece variazioni significative di tale indice.

C) *Colesterolo*.

a) *Colesterolo epatico*: il colesterolo epatico totale, riferito a 100 g di fegato fresco, per i ratti a dieta n. 1 e n. 2, è sempre superiore a quello dei ratti controllo di eguale età. Tale variazione è a carico quasi esclusivamente della parte esterificata, essendo i valori del colesterolo libero del fegato dei ratti di controllo significativamente, per quanto di poco, inferiori a quelli degli altri due gruppi. Si ha quindi un'inversione del rapporto fra le due frazioni. Non sono invece significative le differenze tra i valori del colesterolo epatico del fegato dei ratti a dieta n. 1 e a dieta n. 2, alle due età considerate, data la grande variabilità dei valori nell'ambito di ogni gruppo.

È interessante, a questo riguardo rilevare che, se è vero che i valori dei lipidi totali e del colesterolo, aumentano per i fegati dei ratti alle diete n. 1 e n. 2, rispetto ai controlli, tali variazioni non decorrono tuttavia parallelamente. Ciò risulta dall'esame dei valori che esprimono le quantità di colesterolo riferite a 100 g di lipidi: infatti, tali percentuali, per i ratti alle diete sperimentali sono notevolmente più elevate di quelle dei ratti controllo e le differenze si hanno in particolare, a carico della frazione esterificata (tabella IV).

b) *Colesterolo degli elementi figurati del sangue*: il colesterolo presente negli elementi figurati del sangue si trova per la maggior parte nella forma libera. I valori determinati per i tre gruppi di animali in osservazione, all'età di 90 giorni, non mostrano differenze significative, mentre a 120 giorni di età il gruppo dei ratti a dieta n. 1 presenta valori del colesterolo, libero e totale, significativamente più elevati di quelli dei ratti di controllo e a dieta n. 2.

c) *Colesterolo plasmatico*: i valori del colesterolo totale e libero, riferiti a 100 ml di plasma, per gli animali di 90 giorni di età, sono significativamente differenti; i più elevati si hanno per i ratti a dieta n. 2, i più bassi per i ratti di controllo. Per gli animali di 120 giorni di età si ha soltanto un maggior valore del colesterolo totale per i ratti del gruppo a dieta n. 1 nei confronti di quelli di controllo.

CONCLUSIONI

I risultati sperimentali su esposti, riferiti a ratti maschi Wistar normali che per periodi variabili dai 60 ai 90 giorni, dopo lo svezzamento, si alimentano ad libitum con una dieta acolesterolica composta di alimenti di

origine vegetale in cui l'apporto proteico, per la maggior parte (92%) fornito dal glutine di frumento, sia pari al 17% e l'apporto lipidico, sottoforma di olio d'oliva, sia del 20% (dieta n. 1) o del 40% (dieta n. 2) ed in cui siano presenti, in quantità adeguata, i costituenti vitaminici e salini, permettono di trarre le seguenti conclusioni generali:

1) la concentrazione del colesterolo plasmatico, messa a confronto con quella di ratti normali di eguale sesso, età e ceppo, subisce solo limitate modificazioni, e precisamente un aumento significativo (da mg 38 a mg 47, per la dieta n. 1, e a mg 59 per la dieta n. 2, per 100 ml di plasma), osservabili in particolare dopo 60 giorni di alimentazione speciale;

2) la concentrazione del colesterolo nella parte globulare del sangue, dove si trova praticamente tutto sottoforma libera, subisce un aumento solo nel gruppo di ratti a dieta n. 1 dopo 90 giorni di tale alimentazione;

3) la concentrazione del colesterolo epatico mostra un notevolissimo aumento nei confronti dei ratti normali. Tale aumento si verifica particolarmente a carico della frazione esterificata, e porta all'inversione del rapporto tra le due frazioni. Aumentano anche i lipidi epatici totali, ma è da mettere in evidenza che tale aumento non decorre parallelamente a quello del colesterolo. Infatti, i valori del colesterolo totale, rapportati a 100 g di lipidi epatici che sono del 3,85 nei ratti normali di tre mesi di età, arrivano al 10,65% nei ratti a dieta n. 1 e al 5,79% nei ratti a dieta n. 2 della stessa età; lo stesso si può dire per i ratti di quattro mesi di età.

Sulla base dei dati sperimentali trovati da altri ricercatori e già citati, *i fattori dietetici* che possono entrare in gioco per spiegare le modificazioni della concentrazione del colesterolo, ed in particolare, l'enorme accumulo di colesterolo epatico, possono essere: la natura e l'ammontare dei costituenti proteici, la natura e l'ammontare dei lipidi, il reciproco rapporto proteine-lipidi, la presenza di notevoli quantità di squalene (considerato un precursore nella biosintesi del colesterolo) di sitosteroli etc.

Nel nostro caso:

a) l'ammontare di proteine può considerarsi pari a quello delle proteine nella dieta normale, presa come controllo, ma la natura del glutine fa intravedere dei fattori limitanti in rapporto ad alcuni aminoacidi;

b) per quanto riguarda il grasso, dal punto di vista quantitativo, ci troviamo di fronte a diete iperlipidiche in diverso grado (41% e 63% del valore calorico della razione, contro il 20,7% nel caso dell'alimentazione normale da noi considerata); dal punto di vista qualitativo, in esso predominano gli esterî dell'acido oleico, mentre scarseggiano quelli degli acidi grassi polinsaturi.

Discreta è poi la quantità dell'idrocarburo squalene in esso contenuto, pur essendo l'olio d'oliva da noi utilizzato tra quelli che ne contengono di meno (177 mg/100 ml di olio).

Pur riservandoci di trarre dagli esperimenti su riportati, le conclusioni

definitive che potranno formularsi quando si avrà sott'occhio il quadro generale dei dati risultanti dalle diverse serie di indagini sistematiche in corso, si può affermare che l'accumulo del colesterolo epatico, da noi rilevato, è evidentemente da porsi in rapporto sia alla proporzione e alla qualità dei lipidi, come alla natura della proteina, da noi introdotti nelle diete considerate, fattori che ne influenzano la biosintesi.

Dubbia è l'influenza dello squalene, per chiarire la quale sono in corso altri esperimenti.

Poichè in queste stesse condizioni, le modificazioni del colesterolo plasmatico sono limitate, sembra confermarsi l'affermazione di PORTMAN e STARE (10), per cui in certi animali da laboratorio, tra cui il ratto, appare esservi una dissociazione tra i livelli di colesterolo serico ed epatico.

BIBLIOGRAFIA

- [1] DE LEO, T. e coll. *La Ric. Scient.* **11**, 1996 (1950).
- [2] FOTI L. e coll. *La Ric. Scient.* **12**, 2022 (1960).
- [3] WACKER, L. e HUECK W. *Arch. Exptl. Pathol. Pharmacol.* **74**, 416 (1913).
- [4] BODANSKY, M. J. *Biol. Chem.* **63** 239 (1932).
- [5] CYTROMBERG S. *Biochem. Z.* **45**, 281 (1912).
- [6] ROHAMAN F. *Berl. Klin. Woch* **49**, 1993 (1912).
- [7] PFEIFFER G. *Biochem. Z.* **220**, 210 (1930).
- [8] THAYSEN e coll. *Biochem. Z.* **62**, 115 (1914).
- [9] HAGERMAN J. S. e GOULD R. R. *Proc. Soc. Exptl. Biol. Med.* **78**, 329 (1951).
- [10] PORTMAN O. W. e STARE F. J. *Physiol. Reviews* **39**, 407 (1959).
- [11] WHITNEY J. E. e ROBERTS G. *Am. J. Physiol.* **181**, 446 (1955).
- [12] AVIGAN J. e STEINBERG D. *Proc. Soc. Exp. Biol. Med.* **97**, 814 (1958).
- [13] KLEIN, P. D. *Arch. Biochem. Biophys.* **76**, 56 (1958).
- [14] ALFIN SLATER e coll. *Arch. Biochem. Biophys.* **52**, 180 (1954).
- [15] DEUEL H. J. junior e coll. *J. Nutrition* **55**, 337 (1955).
- [16] AFTERGOOD L. e coll. *J. Nutrition* **62**, 129 (1957).
- [17] OKEY R. e coll. *Proc. Soc. Exp. Biol. Med.* **100**, 198 (1959).
- [18] LANGDON R. C., BLOCK K. J. *Biol. Chem* **200**, 129 (1953).
- [19] CHANNON H. J. e coll. *Biochem. J.* **32**, 969 (1938).
- [20] OKEY R. e coll. *J. Nutrition* **53**, 601 (1954).
- [21] OKEY R. e coll. *Fed. Proc.* **10**, 390 (1951).
- [22] NATH N. e coll. *Arch. Biol. Bioph.* **77**, 234 (1958).
- [23] KRITCHEVSKY D. J. *Lipid Research* **1**, 87 (1959).
- [24] BADOLATO F. e CALABRESE A. M. *La Ric. Scient.* **26**, 3047 (1956).
- [25] FABBRI M. e VITAGLIANO M. *Annali Sperim. Agraria* **9**, 625 (1955).
- [26] SCHOENHEIMER R. e SPERRY W. M. J. *Biol. Chem.* **106**, 745 (1934).

RIASSUNTO. — Si riferiscono i risultati di una prima serie di indagini sistematiche condotte su ratti maschi Wistar, per chiarire i rapporti esistenti tra le concentrazioni ematica ed epatica del colesterolo, ed una dieta vegetale a contenuto proteico normale, costituita da glutine di frumento in presenza di alte quantità di olio d'oliva.

SUMMARY. — The Authors relate in this paper the values of the first series of systematical researches brought out on male Wistar rats in order to clarify the relations which occur between hematic and hepatic cholesterol concentrations, and a vegetable diet containing a normal supply of protein (from wheat gluten) in presence of considerable quantities of olive oil.

Rapporti tra alimentazione e colesterolo epatico ed ematico in ratti maschi Wistar.

Nota II: Influenza di una dieta iperprotidica iperlipidica

*Nota del prof. Francesco Badolato e della dott. Iride Bucci,
presentata dal socio ordinario Antonietta Orrù (*)*

(Adunanza del dì 4 novembre 1961)

In una nota precedente [1] abbiamo riferito i valori del colesterolo epatico ed ematico di ratti alimentati, dallo svezzamento fino a 120 giorni di età, con diete di origine vegetale normoprotidiche-iperlipidiche.

Nel quadro dello stesso gruppo di indagini, riportiamo ora i risultati ottenuti su ratti in eguali condizioni sperimentali, per età sesso e ceppo, alimentati con dieta iperlipidica a diverso livello proteico. Anche in questo caso abbiamo fatto uso del glutine di frumento, come proteina vegetale, e dell'olio d'oliva come grasso alimentare.

Per le indicazioni bibliografiche si rimanda alla nota precedente [1].

PARTE SPERIMENTALE.

Le indagini furono eseguite su due gruppi di ratti che vennero mantenuti, dopo i 30 giorni di età, per periodi rispettivi di 60 e 90 giorni, con una dieta (*dieta n. 3*) di origine vegetale, la cui composizione è riportata nella tabella I.

Tale dieta fornisce il 33% di protidi (principalmente sottoforma di glutine di frumento), il 21,9% di lipidi (sottoforma di olio d'oliva) ed il 31,5% di glucidi, per un valore energetico di 445 Calorie/100 g. di razione, di cui il 29% provenienti dai protidi, il 43% dai lipidi ed il 27% dai glucidi. Tale dieta non contiene colesterolo.

L'olio usato per queste esperienze era della stessa partita di quello delle esperienze citate nella precedente nota [1] con un numero di iodio pari a 82 ed un contenuto di squalene di 177 mg. per 100 ml. di olio.

Nei confronti della dieta n. 1, di cui alla nota precedente [1], a parità di concentrazione e qualità di lipidi (circa il 20-21%) questa dieta presenta un più elevato livello di protidi (circa il doppio), sempre rappresentati dal

* Indagini eseguite col contributo del C.N.R.

TABELLA I.

Composizione della dieta n. 3.

Composizione della dieta in g.		Protidi g	Lipidi g	Glucidi g
Glutine:	40	33	2,8	—
Olio:	20	—	19,8	—
Riso:	20	1,4	0,17	15,43
Amido:	20	—	—	17,38
Sali:	4			
Totale:	104	34,4	22,77	32,81
Valori %		33,0	21,90	31,54
Calorie: totali	495	132,0	197,0	126,0
Calorie %		29,0	43,0	27,0

NOTA. — A 100 g di tale dieta sono state aggiunte le seguenti vitamine sotto-forma di « Protovit liquido »: Axeroftolo 625 U.I.; tiamina 240 γ ; riboflavina 120 γ ; niacina 1200 γ ; piridoxina 120 γ ; pantenolo 1200 γ ; biotina 12 γ ; acido ascorbico 6200 γ ; vitamina D 125 U.I.; vitamina E 300 γ . La miscela salina è quella di Mc.Collum.

Il glutine di frumento è stato gentilmente offerto dalla Ditta Buitoni.

glutine (le proteine derivanti dal riso sono in quantità esigue); nei confronti della dieta controllo [1] essa è iperlipidica ed iperprotidica.

Allo scadere di 60 giorni per un gruppo e di 90 giorni per l'altro, gli animali vennero sacrificati e sul sangue (plasma e parte figurata separatamente) e sul fegato, prelevati secondo le modalità già indicate [1], si eseguirono le stesse determinazioni fatte nelle esperienze precedenti.

Ai fini di una valutazione comparativa, riportiamo nelle tabelle II, III e IV, accanto ai risultati delle presenti ricerche, anche quelli che si riferiscono ai gruppi di ratti alimentati con la dieta normale e con la dieta n. 1, di cui alla nota precedente [1].

Nella tabella II si riportano i valori del peso degli animali, del peso del fegato, dell'azoto totale e dei lipidi totali col relativo numero di iodio; nella tabella III e nella fig. 1, i valori del colesterolo epatico riferiti a 100 g. di fegato ed al fegato intero, nella tabella IV e nella fig. 1, i valori del colesterolo plasmatico e globulare.

Anche in questo caso sono indicati, nelle stesse tabelle, i livelli di significatività calcolati con le formule già citate [1].

TABELLA II

Gruppi di ratti	Età (giorni)	Peso finale g \pm E. S.	Peso fegato g \pm E. S.	Umidità % g \pm E. S.	Azoto totale		Lipidi totali		N. Jodio \pm E. S.
					% in g	per fe- gato g	% g \pm S. E.	per fe- gato g	
Controllo (ratti n. 8)	90	100 \pm 5,50	3,83 \pm 0,32	70,0 \pm 0,35	3,5	0,10	5,5 \pm 0	0,20	91 \pm 0,92
Dieta n. 1 (ratti n. 6)	90	144 \pm 4,50	4,51 \pm 0	65,5 \pm 0,50	3,3	0,14	14,6 \pm 0,60	0,65	93 \pm 3,70
Dieta n. 3 (ratti n. 4)	90	212 \pm 17	6,54 \pm 0,60	66,0 \pm 0,70	3,7	0,23	10,2 \pm 1,05	0,68	90 \pm 0,70
Controllo (ratti n. 11)	120	140 \pm 4,50	5,03 \pm 0,36	70,0 \pm 0	3,4	0,16	4,9 \pm 0,21	0,23	96 \pm 0,78
Dieta n. 1 (ratti n. 6)	120	145 \pm 8,70	5,20 \pm 0,40	62,0 \pm 1,00	3,3	0,16	16,6 \pm 1,90	0,87	93 \pm 1,70
Dieta n. 3 (ratti n. 5)	120	175 \pm 9,70	6,00 \pm 0,70	58,8 \pm 2,70	3,0	0,17	16,2 \pm 2,20	0,85	88 \pm 1,80
Significatività delle differenze ricavate dal <i>t</i> di Student									
Controllo Dieta n. 3 {	90	P < 0,001	0,001 < p < 0,01	0,001 < p < 0,01			P < 0,001		0,7 < p < 0,8
Dieta n. 1 Dieta n. 3 {	90	0,001 < p < 0,01	0,001 < p < 0,01	0,5 < p < 0,6			0,001 < p < 0,01		0,5 < p < 0,6
Controllo Dieta n. 3 {	120	P < 0,001	0,3 < p < 0,4	P < 0,001			P < 0,001		0,001 < p < 0,01
Dieta n. 1 Dieta n. 3 {	120	0,05 < p < 0,1	0,3 < p < 0,4	0,2 < p < 0,1			0,2 < p < 0,1		0,1 < p < 0,2

TABELLA III.

Valori medi che si riferiscono al colesterolo epatico.

Gruppi di ratti	Età (giorni)	Colesterolo/100 g. fegato fresco			Colester./fegato fresco			Rapporto L./E.	Coolest./100 g. lipidi totali epatici		
		Totale mg ± E. S.	Libero mg ± E. S.	Esterif. mg	Totale mg	Libero mg	Esterif. mg		Totale mg	Libero mg	Esterif. mg
Controllo (ratti n. 6)	90	212 ± 14,6 $\sigma=35$	162 ± 11,3 $\sigma=27$	50	8,08	6,18	1,90	3,28	3,85	2,94	0,90
Dieta n. 1 (ratti n. 6)	90	1555 ± 179 $\sigma=432$	344 ± 15 $\sigma=36$	1211	45,05	11,53	33,28	0,28	10,65	2,35	8,34
Dieta n. 3 (ratti n. 4)	90	1610 ± 190 $\sigma=380$	340 ± 21 $\sigma=43$	1260	105,61	22,89	82,72	0,27	15,78	3,42	12,35
Controllo (ratti n. 8)	120	210 ± 27,1 $\sigma=27$	189 ± 25,2 $\sigma=25$	21	9,94	9,02	0,91	11,70	4,28	3,85	0,42
Dieta n. 1 (ratti n. 6)	120	1281 ± 235 $\sigma=564$	344 ± 30 $\sigma=74$	954	66,04	17,45	48,59	0,40	7,70	2,07	5,71
Dieta n. 3 (ratti n. 5)	120	1097 ± 372 $\sigma=744$	314 ± 43 $\sigma=86$	782	58,65	17,93	40,71	0,44	6,77	1,93	4,82
Significatività delle differenze ricavate dal <i>t</i> di Student											
Controllo Dieta n. 3	90	P < 0,001	P < 0,001								
Dieta n. 1 Dieta n. 3	90	P < 0,9	P < 0,9								
Controllo Dieta n. 3	120	0,001 < p < 0,01	0,001 < p < 0,01								
Dieta n. 1 Dieta n. 3	120	0,6 < p < 0,7	0,5 < p < 0,6								

TABELLA IV.

Valori medi che si riferiscono al colesterolo plasmatico e globulare.

Gruppi di ratti	Età (giorni)	Colesterolo/100 ml plasma			Rapporto L/E	Colest. globulare/100 ml sangue		
		Totale mg ± E. S.	Libero mg ± E. S.	Esterif. mg		Totale mg ± E. S.	Libero mg ± E. S.	Esterif. mg
Controllo (ratti n. 8)	90	38,1 ± 2,70 σ=7	13,8 ± 1,0 σ=3	24,2	0,61	57,3 ± 3,70 σ=10	55,5 ± 3,30 σ=9	1,80
Dieta n. 1 (ratti n. 6)	90	47,8 ± 3,60 σ=8	17,1 ± 0,79 σ=1,9	30,6	0,55	62,3 ± 5,30 σ=13	61,9 ± 4,90 σ=12	0,40
Dieta n. 3 (ratti n. 4)	90	40,0 ± 6,90 σ=14	12,3 ± 2,90 σ=6	27,7	0,43	81,7 ± 4,90 σ=10	80,8 ± 4,90 σ=9	0,90
Controllo (ratti n. 11)	120	37,5 ± 1,80 σ=6	17,3 ± 1,30 σ=4	20,2	0,77	52,9 ± 1,60 σ=5	51,3 ± 1,50 σ=5	1,60
Dieta n. 1 (ratti n. 6)	120	50,2 ± 5,0 σ=12	14,1 ± 1,50 σ=3,8	36,1	0,39	70,5 ± 5,0 σ=12	69,7 ± 4,80 σ=11	0,80
Dieta n. 3 (ratti n.)	120	41,6 ± 7,0 σ=14	19,0 ± 2,50 σ=5	22,6	0,93	80,2 ± 3,70 σ=7	77,1 ± 4,60 σ=9	3,10
Significatività delle differenze ricavate dal <i>t</i> di Student								
Controllo Dieta n. 3	90	0,8 < p < 0,9	0,5 < p < 0,6			0,001 < p < 0,01	P < 0,001	
Dieta n. 2 Dieta n. 3	90	0,3 < p < 0,4	0,2 < p < 0,3			0,02 < p < 0,05	0,02 < p < 0,05	
Controllo Dieta n. 3	120	0,4 < p < 0,5	0,5 < p < 0,6			P < 0,001	P < 0,001	
Dieta n. 2 Dieta n. 3	120	0,3 < p < 0,4	0,1 < p < 0,2			0,1 < p < 0,2	0,3 < p < 0,4	

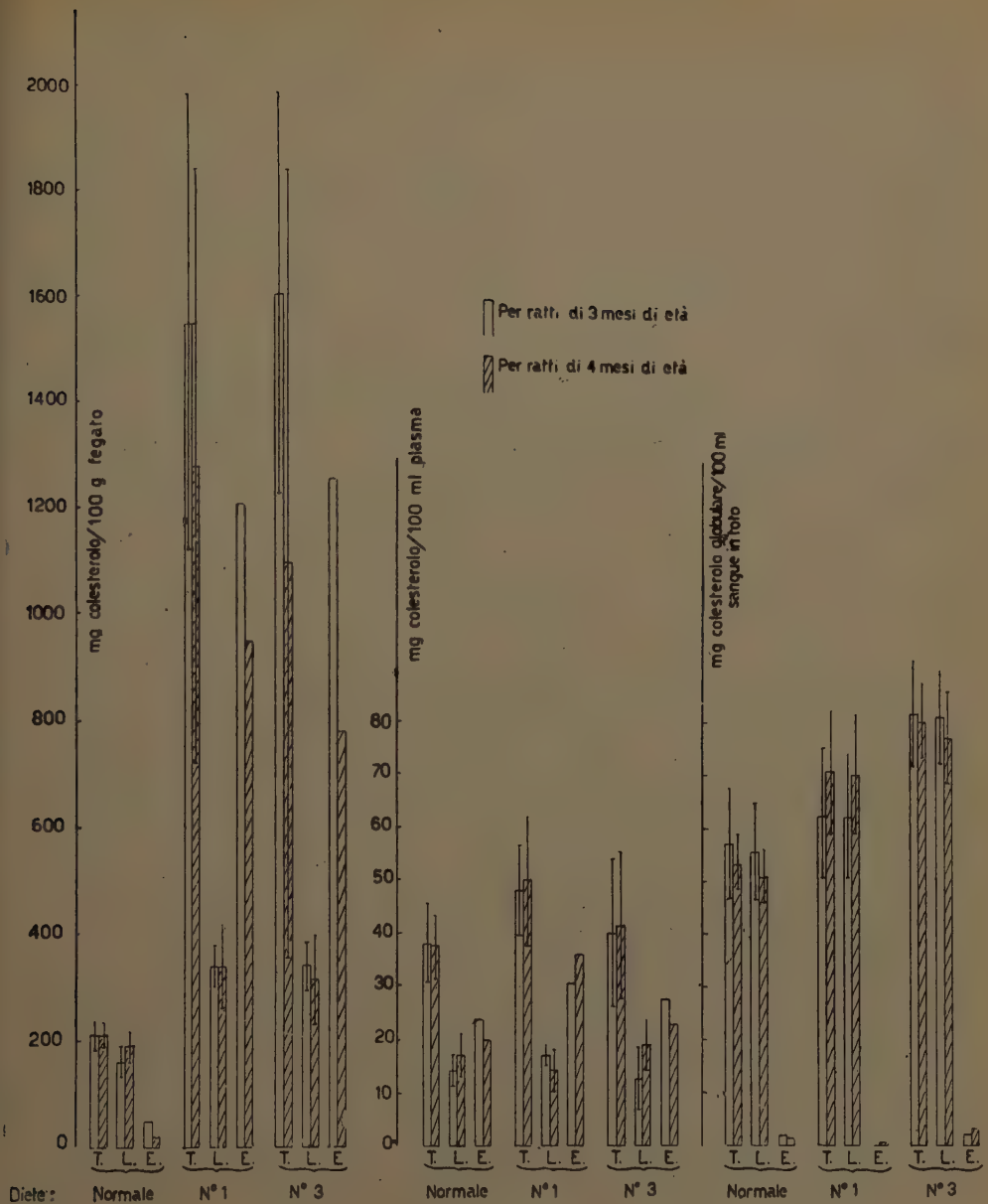


Fig. 1. — Istogrammi che rappresentano i valori del colesterolo totale (T), libero (L) ed esterificato (E) nel fegato, plasma e parte figurata del sangue per i ratti normali e a diete n. 1 e n. 3, dopo 2 e 3 mesi di alimentazione (rispettivamente 3-4 mesi di età).

RISULTATI DELLE ESPERIENZE.

Dall'analisi dei risultati si possono fare le seguenti osservazioni:

A) *Peso medio ratti.*

Il peso medio dei ratti alimentati con la dieta n. 3 in esame è superiore significativamente sia a quello dei ratti di controllo e sia a quello dei ratti alimentati con la dieta n. 1, all'età di 90 giorni; a 120 giorni di età, esso è superiore significativamente solo a quello dei normali.

B) *Fegato.*

a) *Peso medio*: il peso medio dei fegati dei ratti a dieta n. 3 è significativamente superiore sia a quello dei ratti di controllo che a quello dei ratti a dieta n. 1, soltanto all'età di 90 giorni. A 120 giorni d'età non si notano variazioni significative tra i vari gruppi di ratti.

b) *Umidità*: sia a 90 che a 120 giorni di età si osserva una diminuzione significativa del contenuto idrico percentuale del fegato dei ratti a dieta n. 3, nei confronti dei ratti normali, mentre nessuna variazione si nota tra i gruppi di ratti a diete n. 1 e n. 3, alle varie età considerate.

c) *Azoto totale*: nessuna modificazione significativa si ha tra i tre gruppi di ratti per quanto riguarda l'azoto totale epatico.

d) *Lipidi totali*: il valore dei lipidi totali epatici dei ratti a dieta n. 3, riferito a 100 g. di fegato fresco, è sempre più elevato di quello dei controlli, sia a 90 che a 120 giorni di età.

Nei confronti degli animali a dieta n. 1, tale valore è inferiore a 90 giorni di età e non varia significativamente a 120 giorni.

e) *Numero di iodio dei lipidi*: il numero di iodio dei lipidi epatici non mostra differenze significative tra i diversi gruppi considerati a 90 giorni di età, mentre a 120 giorni per i lipidi del fegato di ratti a dieta n. 3, esso è inferiore significativamente a quello dei ratti di controllo.

C) *Colesterolo.*

a) *Colesterolo epatico*: il colesterolo epatico, riferito a 100 g. di fegato fresco per i ratti a dieta n. 3, è sempre superiore a quello dei ratti controllo, alle due età considerate.

Tale variazione si osserva principalmente per il colesterolo esterificato, il cui aumento porta ad una inversione del rapporto tra le due frazioni. Tuttavia, anche il colesterolo libero del fegato dei ratti a dieta n. 3, è, limitatamente ma significativamente, superiore a quello dei normali.

Non sono invece, significative le differenze tra i valori del colesterolo

epatico totale e libero del fegato dei ratti a diete n. 1 e n. 2, alle due età considerate.

Come già rilevato per i ratti a dieta n. 1 [1], anche in questo caso l'aumento del colesterolo epatico non decorre parallelamente all'aumento dei lipidi. Infatti, da valori del 3,85 di colesterolo per 100 g. di lipidi nel fegato degli animali normali di 90 giorni di età, si passa ad un valore del 15,7% per i ratti di eguale età a dieta n. 3. Variazioni nello stesso senso si osservano per i ratti di 120 giorni di età.

b) *Colesterolo degli elementi figurati del sangue*: i valori del colesterolo totale e libero determinati per i ratti a dieta n. 3 sono significativamente superiori a quelli trovati per i ratti normali, alle età di 90 e 120 giorni; sono anche superiori a quelli a dieta n. 1, ai 90 giorni di età.

c) *Colesterolo del plasma*: i valori del colesterolo plasmatico totale e libero, riferiti a 100 ml. di plasma, non mostrano alcuna differenza significativa tra i gruppi di ratti a dieta n. 1 e n. 3, alle due età considerate.

CONCLUSIONI.

I risultati sperimentali di questa serie di indagini conducono a concludere che la somministrazione prolungata (60 e 90 giorni) di una dieta di origine vegetale iperlipidica (21% di olio d'oliva) a contenuto proteico elevato (33% di glutine di frumento) opportunamente integrata con costituenti vitaminici e salini, produce, in ratti maschi Wistar, le stesse modificazioni del colesterolo epatico provocate da una dieta in cui, a parità di qualità e quantità di lipidi, sia minore il contenuto protidico (17% di glutine). Nei due casi, il colesterolo epatico è notevolmente più elevato di quello dei controlli e la variazione maggiore si osserva a carico della frazione esterificata, con inversione (nei confronti dei fegati normali) del rapporto tra le due frazioni.

Il valore del colesterolo plasmatico si mantiene invece, praticamente costante.

Una modificazione si osserva a carico del colesterolo globulare che è sempre superiore a quello dei ratti di controllo, e mostra anche una differenza tra i ratti di 90 giorni, alimentati con le due diete speciali e messe a confronto.

Limitando, per le considerazioni già esposte in una nota precedente, le nostre conclusioni ad un esame sommario, dobbiamo ritenere che anche una elevata proporzione di protidi (33%) se rappresentati da glutine di frumento, non contrasta l'azione che ha sulla biosintesi del colesterolo una dieta resa iperlipidica con olio d'oliva.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BADOLATO F. e BUCCI I. Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., s. 4^a, **28**. Napoli, 1961.

RIASSUNTO. — Vengono riferite le modificazioni nella concentrazione del colesterolo epatico ed ematico, prodotte in ratti maschi Wistar da una dieta acolesterolica ricca in lipidi (21% di olio di oliva) ed in proteine (33% di glutine).

SUMMARY. — The Authors report the modifications which occur in hepatic and hematic cholesterol concentrations, in male Wistar rats fed with an acholesterolic diet rich in lipid (21% olive oil) and protein (33% wheat gluten).

Sul problema della lastra-piastra

Nota del socio corr. Elio Giangreco e del dott. ing. Antonio La Tegola

(Adunanza del dì 4 novembre 1961)

La soluzione generale e rigorosa del problema dell'equilibrio elastico, nell'ambito delle ben note ipotesi di omogeneità, isotropia ed elasticità, richiede il contemporaneo soddisfacimento delle equazioni indefinite dello equilibrio e delle equazioni di congruenza all'interno del dominio definito dal solido elastico, oltre che delle condizioni al contorno espresse in funzione dei vincoli che lo costringono e delle forze che lo sollecitano. Si perviene così al sistema di equazioni differenziali che regge il problema nelle incognite componenti (u, v, w) dello spostamento o nelle incognite componenti di tensione (σ_{ij}, τ_{ij}) .

Queste equazioni costituiscono il punto di partenza per lo studio del solido elastico considerato, il cui comportamento, in funzione della sua forma e delle sue dimensioni geometriche, potrà avvicinarsi a quello della trave o della piastra o della volta o di altri strutturali.

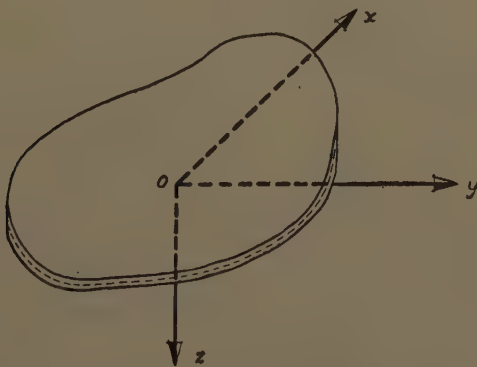


Fig. 1.

Intendiamo, in questa Nota, riferirci esplicitamente ai solidi che hanno due dimensioni preponderanti rispetto alla terza (spessore) per i quali si può geometricamente definire un piano medio e nel quale penseremo contenuti gli assi x e y (fig. 1). Se il sistema di forze esterne è contenuto nel piano medio chiameremo tale solido « lastra », se è invece normale al detto piano medio parleremo di « piastra ».

Nel primo caso siamo in presenza di un sistema piano di tensioni (ma non di deformazioni) e la soluzione viene perseguita attraverso la risoluzione delle equazioni indefinite dell'equilibrio e delle equazioni di congruenza mediante una funzione di tensioni, detta funzione di Airy, che risulta biarmonica ¹⁾.

Il problema della piastra viene invece affrontato sotto alcune ipotesi preliminari (conservazione dell'elemento normale, trascurabilità degli spostamenti per rapporto allo spessore, trascurabilità della σ_z) e l'equazione differenziale $\Delta \Delta w = \frac{p}{D}$, nell'incognito spostamento w , funzione di x e di y , da cui si fa dipendere la soluzione del problema, scaturisce da semplici considerazioni di equilibrio. Questo comporta alcune incongruenze sia per la presenza delle tensioni tangenziali τ_{xz} e τ_{yz} nonostante l'assenza delle corrispondenti componenti della deformazione ²⁾, sia per la presenza della ε_z nonostante la dipendenza della w soltanto da x e da y ³⁾ ed inoltre la terza equazione indefinita di equilibrio si tradurrebbe nell'equazione omogenea ⁴⁾ $\Delta \Delta w = 0$.

In definitiva il problema della soluzione della lastra è legato al metodo delle forze e le tensioni risultano legate al carico esterno tramite la funzione ⁵⁾ F e quello della piastra invece è condotto con il metodo delle deformazioni dipendendo le tensioni dal carico esterno attraverso lo spostamento w .

Nel caso della contemporanea esistenza di forze contenute nel piano medio e normale ad esso, il problema si può risolvere separatamente con i due procedimenti.

Tenuto però conto che nei casi più importanti della tecnica è molto frequente la coesistenza dei due problemi (pareti di serbatoi, impalcati di ponti precompressi, etc.) sembra opportuno impostare il problema secondo un unico punto di vista dando così al procedimento risolutivo unità

¹⁾ La funzione di Airy è legata, in assenza di forze di massa, alle componenti di tensione σ_x , σ_y e τ_{xy} dalle relazioni: $\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$; $\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$; $\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$. La biarmonicità di F deriva dalla condizione di armonicità del laplassiano dell'invariante di tensione: $T = \sigma_x + \sigma_y$.

²⁾ Ciò dipende sostanzialmente dall'ipotesi della conservazione dell'elemento normale che non consente di porre in relazione con gli scorrimenti γ_{xz} e γ_{yz} le corrispondenti componenti di tensione τ_{xz} e τ_{yz} , che acquisiscono pertanto un significato puramente statico e non geometrico e la soluzione sarà equilibrata ma non rigorosamente congruente.

³⁾ Se ν è molto piccolo si può ritenere quasi rigorosamente $\varepsilon_z = 0$.

⁴⁾ Risultando omogenea l'equazione differenziale che regge il problema, il carico esterno dovrebbe apparire nelle condizioni al contorno e cioè attraverso le σ_z , peraltro supposta nulla per ipotesi. Perciò tale equazione, e per essa la terza equazione indefinita di equilibrio, può dare ancora risultati compatibili con l'equazione differenziale non omogenea se si attribuisce alla σ_z una legge di variazione cubica lungo lo spessore della piastra.

⁵⁾ Si ricordi il significato fisico della funzione F .

di indirizzo. Questo è, a nostro avviso, perseguibile riconducendo il problema alla determinazione di una o più funzioni delle tensioni, opportunamente legate alle componenti stesse di tensione.

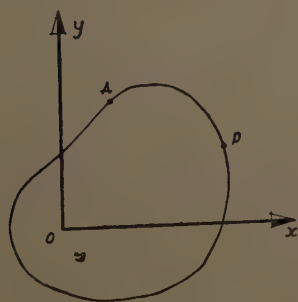
Tenuto conto che lo stato tensionale derivante dal comportamento a lastra consiste di tre componenti di tensione σ_x , σ_y , τ_{xy} funzioni di x e di y e che il comportamento a piastra presenta le tre stesse componenti della tensione, dipendenti però anche da z , oltre le τ_{xz} e τ_{yz} , si propongono le seguenti espressioni che caratterizzano lo stato tensionale complessivo:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \sigma_x^{(0)}(x, y) + \sigma_x^{(1)}(x, y) \cdot z \\ \sigma_y = \sigma_y^{(0)}(x, y) + \sigma_y^{(1)}(x, y) \cdot z \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}^{(0)}(x, y) + \tau_{xy}^{(1)}(x, y) \cdot z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \tau_{yz} = \tau_{yz}^{(1)}(x, y) \cdot \left(z^2 - \frac{s^2}{4} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}^{(1)}(x, y) \cdot \left(z^2 - \frac{s^2}{4} \right) \\ \sigma_z = -\frac{6p}{s^3} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{s^2}{4} z + \frac{s^3}{12} \right) \end{array} \right.$$

dove l'indice (0) e l'indice (1) si riferiscono alle componenti di tensione presenti rispettivamente nella lastra e nella piastra. Le equazioni indefinite dell'equilibrio, a cui tale stato tensionale deve soddisfare, sono:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

Lungo il contorno della lastra, assunto un punto A come origine, si ha in un generico punto P:



$$F(P) = F(A) - M(P)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial n} \right)_P = - |R|_A^P$$

e cioè la funzione F , in un punto P generico, è uguale, a meno di una costante, al momento delle forze applicate nel tratto di contorno AP rispetto a P , mentre la derivata normale nello stesso punto fornisce la risultante secondo la tangente in P delle forze nello stesso tratto.

Fig. 2.

che si spezzano nei seguenti sistemi:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(0)}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$(3)' \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(1)}}{\partial y} + 2\tau_{xx}^{(1)} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(1)}}{\partial y} + 2\tau_{yy}^{(1)} = 0 \\ \frac{\partial f(s)}{\partial x} \tau_{xx}^{(1)} + f(s) \frac{\partial \tau_{xx}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial f(s)}{\partial y} \tau_{yy}^{(1)} + f(s) \frac{\partial \tau_{yy}^{(1)}}{\partial y} - \frac{6p}{s^3} f(s) = 0, \end{cases}$$

ove si è posto

$$\left(z^2 - \frac{s^2}{4} \right) = f(s).$$

La soluzione rigorosamente equilibrata e congruente richiede il soddisfacimento delle (3) unitamente alle sei equazioni di congruenza:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right). \end{cases}$$

Ciò non è in effetti rigorosamente possibile ⁶⁾, ci si contenta perciò in

⁶⁾ Con riferimento alle sole componenti dell'effetto lastra restando invariata la prima delle equazioni di congruenza, risultando la quarta e la quinta identicamente soddisfatte, le altre si riducono rispettivamente a:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x \partial y} = 0$$

e quindi, in termini di invariante di tensione, tenuto conto della prima, si ha:

$$\Delta T = 0; \quad \nu \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0; \quad \nu \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0; \quad \nu \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0. \quad (**)$$

analogia con lo studio dei sistemi piani di tener conto solo della prima, escludendo quindi a priori il contributo della deformazione a taglio.

Scelta del legame tra le componenti speciali di tensione e le funzioni di tensione.

a) *Effetto lastra.*

Con riferimento alle prime due delle (3) scegliamo:

$$(5) \quad \sigma_x^{(0)} = \frac{1}{s} \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2}; \quad \sigma_y^{(0)} = \frac{1}{s} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy}^{(0)} = -\frac{\nu}{s} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y}.$$

La prima della (4) fornisce l'equazione differenziale omogenea in F_0 :

$$(6) \quad \frac{E}{G} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} - \frac{\nu}{s} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} - \frac{\nu}{s} \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} \right) = 0$$

che per $s = \text{cost.}$ fornisce la ben nota condizione di biarmonicità della funzione F_0 :

$$(7) \quad \Delta \Delta F_0 = 0.$$

Le caratteristiche della sollecitazione che ne derivano sono:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_x = \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_x^{(0)} dz = \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2}; \quad N_y = \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_y^{(0)} dz = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} \\ N_{xy} = \int_{-s/2}^{s/2} \tau_{xy}^{(0)} dz = -\frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y}. \end{array} \right.$$

Assumendo la T armonica risulta soddisfatta solo la prima delle equazioni (*) a meno di non voler soddisfare contemporaneamente le altre tre accettando T funzione lineare di x e di y : quindi le ipotesi: $\sigma_x = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, non sono del tutto rigorose e corrispondenti alla realtà. La soluzione è esatta solo per $\nu = 0$ o quando ε_x è trascurabile.

Con riferimento all'effetto piastra, trascurando il contributo delle γ_{xz} e γ_{yz} ed inoltre della ε_x , delle (4) resta inalterata la prima, sono identicamente soddisfatte la seconda, la terza e la sesta in base alle posizioni fatte, mentre, in conseguenza delle (1), la quarta e la quinta diventano:

$$2 \frac{\partial \varepsilon_x^{(1)}}{\partial y} = \frac{\partial \gamma_{xy}^{(1)}}{\partial x}; \quad 2 \frac{\partial \varepsilon_y^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_{xy}^{(1)}}{\partial y}$$

che derivate rispettivamente rispetto ad y ed a x , e sommate ridanno la prima delle (4).

b) *Effetto piastra.*

1) Scegliamo:

$$(9) \quad \begin{cases} \sigma_{xx}^{(1)} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - 2 \Phi; \quad \sigma_{yy}^{(1)} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} - 2 \Phi; \quad \tau_{xy}^{(1)} = - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} \\ \tau_{xx}^{(1)} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad \tau_{yz}^{(1)} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{cases}$$

la terza equazione di equilibrio e la prima di congruenza forniscono pertanto:

$$(10) \quad \begin{cases} \Delta \Phi + \frac{\partial \ln f(s)}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \ln f(s)}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 6 \frac{p(x, y)}{s^3} \\ \Delta \Delta F_1 = 2(1 - \nu) \Delta \Phi \end{cases}$$

che per $s = \text{cost.}$ si lasciano scrivere ⁷⁾:

$$(11) \quad \begin{cases} \Delta \Phi = 6 \frac{p(x, y)}{s^3} \\ \Delta \Delta F_1 = 2(1 - \nu) \Delta \Phi. \end{cases}$$

⁷⁾ Le equazioni (11) a cui si è pervenuti sono equivalenti a quella classica $\Delta \Delta w = \frac{p}{D}$; infatti le ipotesi fatte circa la dipendenza delle tensioni da z , equivalgono a quella della conservazione dell'elemento normale piano che portano alla scrittura delle note relazioni tra le componenti della deformazione e quelle dello spostamento:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Da quest'ultima, ricordando che $\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$ si ricava:

$$\tau_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{Ez}{1 + \nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} z;$$

da cui si ottiene:

$$\frac{E}{1 + \nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}$$

ed, a meno di due funzioni arbitrarie d'integrazione, che possono assumersi identicamente nulle, si ha:

$$(12) \quad w = \frac{1 + \nu}{E} F_1; \quad F_1 = \frac{E}{1 + \nu} w$$

Sostituendo queste espressioni nel sistema (11), che si può compendiare nell'unica relazione:

$$\Delta \Delta F_1 = \frac{12(1 - \nu)}{s^3} p(x, y),$$

Con tali posizioni le caratteristiche della sollecitazione risultano:

$$M_x = \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_x z \, dz = \frac{s^3}{12} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - 2 \Phi \right);$$

$$M_y = \int_{-s/2}^{s/2} \sigma_y z \, dz = \frac{s^3}{12} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} - 2 \Phi \right);$$

$$M_{xy} = \int_{-s/2}^{s/2} \tau_{xy} z \, dz = - \frac{s^3}{12} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y};$$

$$T_x = \int_{-s/2}^{s/2} \tau_{xz} \, dz = - \frac{s^3}{6} \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad T_y = \int_{-s/2}^{s/2} \tau_{yz} \, dz = - \frac{s^3}{6} \frac{\partial \Phi}{\partial y};$$

$$R_x = T_x + T_x^* = - \frac{s^3}{6} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2} \right);$$

$$R_y = T_y + T_y^* = - \frac{s^3}{6} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^2 \partial y} \right).$$

Le condizioni al contorno in funzione di F_1 e Φ sono, per le diverse condizioni di vincolo:

1° caso) Lato semplicemente appoggiato ($x = a$).

Le condizioni da soddisfare sono:

$$(w)_{x=a} = 0; \quad (M_x)_{x=a} = 0$$

e cioè:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} (F_1)_{x=a} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - 2 \Phi \right)_{x=a} = 0. \end{array} \right.$$

si ottiene:

$$\frac{E}{1 + \nu} \Delta \Delta w = \frac{12 (1 - \nu)}{s^3} p(x, y)$$

ovvero

$$\Delta \Delta w = \frac{12 (1 - \nu^2)}{E s^3} p(x, y).$$

che equivale alla nota equazione di Germain-Lagrange:

$$\Delta \Delta w = \frac{p(x, y)}{D} \quad \text{con} \quad D = \frac{E s^3}{12 (1 - \nu^2)}.$$

2° caso) Lato semplicemente incastrato ($x = a$).

Le condizioni da soddisfare sono:

$$(w)_{x=a} = 0; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0.$$

Quest'ultima equivale a dire che lungo il lato $x = a$ non vi è variazione della rotazione (essa rimane costantemente uguale a zero) e cioè:

$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0$ ed anche, che il momento torcente, proporzionale alla variazione di rotazione, sia uguale a zero: $(M_{xy})_{x=a} = 0$.

Le condizioni al contorno, pertanto, diventano:

$$(15) \quad \begin{cases} (F_1)_{x=a} = a \\ \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} \right)_{x=a} = 0. \end{cases}$$

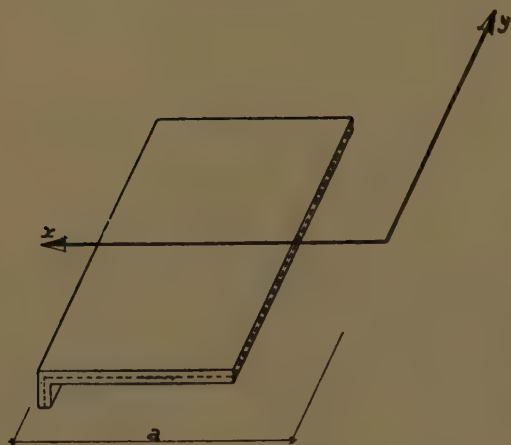


Fig. 3.

3° caso) Lato libero ($x = a$).

Le condizioni

forniscono: $(M_x)_{x=a} = 0; (R_x)_{x=a} = 0$

$$(16) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - 2 \Phi \right)_{x=a} = 0 \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} = 0. \end{cases}$$

4° caso) Lato vincolato elasticamente ($x = a$).

Le condizioni da imporre sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} w^{(t)} = (w^{(p)})_{x=a} \\ p_y^{(t)} = (R_x^{(p)})_{x=a} \\ \frac{dM_y^{(t)}}{dy} = (M_x^{(p)})_{x=a} \end{array} \right.$$

Essendo:

$$p_y^{(t)} = EI_t \frac{d^4 w^{(t)}}{dy^4}; \quad w^{(p)} = \frac{1+\nu}{E} F_1$$

si ottiene:

$$p_y^{(t)} = I_t (1 + \nu) \left(\frac{\partial^4 F_1}{\partial y^4} \right)_{x=a}.$$

Inoltre si ha, a meno delle funzioni arbitrarie in x e y , che nelle derivazioni successive scompaiono:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial F_1}{\partial x}$$

ed indicando con C la rigidezza torsionale della trave si ottiene:

$$M_t^{(t)} = C \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = \frac{C}{E} (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a}.$$

Pertanto le condizioni al contorno si lasciano scrivere:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_t (1 + \nu) \left(\frac{\partial^4 F_1}{\partial y^4} \right)_{x=a} = - \frac{s^3}{6} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} \\ \frac{C}{E} (1 + \nu) \left(\frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} = \frac{s^3}{12} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - 2 \Phi \right)_{x=a} \end{array} \right.$$

2) Scegliamo come legame tra le componenti di tensione e le funzioni F_1 e Φ le relazioni:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^{(1)} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - 2 \Phi; \quad \sigma_y^{(1)} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} - 2 \Phi; \quad \tau_{xy}^{(1)} = - 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} \\ \tau_{xz}^{(1)} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2}; \quad \tau_{yz}^{(1)} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^2 \partial y} \end{array} \right.$$

che, con riguardo alla prima soluzione, fanno dipendere questa volta le tensioni tangenziali τ_{yz} e τ_{xz} anche dalla funzione F_1 . Limitandosi al caso di $s = \text{cost.}$, il soddisfacimento delle equazioni di equilibrio e della prima equazione di congruenza conduce alle relazioni:

$$(19) \quad \begin{cases} \Delta \Phi + \frac{\partial^4 F_1}{\partial x^2 \partial y^2} = 6 \frac{p(x, y)}{s^3} \\ \Delta \Delta F_1 + 2(1 + \nu) \frac{\partial^4 F_1}{\partial x^2 \partial y^2} - 2(1 - \nu) \Delta \Phi = 0 \end{cases}$$

che possono scriversi nelle forme equivalenti:

$$(19') \quad \begin{cases} \Delta \Phi + \frac{\partial^4 F_1}{\partial x^2 \partial y^2} = 6 \frac{p(x, y)}{s^3} \\ \Delta \Delta F_1 - 4 \Delta \Phi = -12 \frac{(1 + \nu)}{s^3} p \end{cases}$$

oppure:

$$(19'') \quad \begin{cases} \Delta \Phi + \frac{\partial^4 F_1}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{6 p(x, y)}{s^3} \\ \Delta \Delta F_1 + 4 \frac{\partial^4 F_1}{\partial x^2 \partial y^2} = 12(1 - \nu) \frac{p}{s^3}. \end{cases}$$

Le caratteristiche della sollecitazione diventano:

$$(20) \quad \begin{cases} M_x = \frac{s^3}{12} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - 2 \Phi \right); M_y = \frac{s^3}{12} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} - 2 \Phi \right); M_{xy} = -\frac{s^3}{6} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} \\ T_x = -\frac{s^3}{6} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2} \right); T_y = -\frac{s^3}{6} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^2 \partial y} \right) \\ R_x = -\frac{s^3}{6} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2} \right); R_y = -\frac{s^3}{6} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^2 \partial y} \right) \end{cases}$$

e le condizioni al contorno sono:

1° caso) Lato appoggiato ($x = a$).

$$(21) \quad \begin{cases} (F_1)_{x=a} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - 2 \Phi \right)_{x=a} = 0 \end{cases}$$

2° caso) Lato incastrato ($x = a$).

$$(22) \quad \begin{cases} (F_1)_{x=a} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} \right)_{x=a} = 0 \end{cases}$$

3° caso) Lato libero ($x = a$).

$$(23) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - 2 \Phi \right)_{x=a} = 0 \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} = 0. \end{cases}$$

4° caso) Lato vincolato elasticamente ($x = a$).

$$(24) \quad \begin{cases} I_2 2 (1 + \nu) \left(\frac{\partial^4 F_1}{\partial y^4} \right)_{x=a} = - \frac{s^3}{6} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} \\ \frac{C}{E} 2 (1 - \nu) \left(\frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} = \frac{s^3}{12} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - 2 \Phi \right)_{x=a}. \end{cases}$$

3) Il legame tra le funzioni degli sforzi e le componenti della tensione può tenersi in modo più semplice ponendo, nelle (18), $\Phi = 0$, si ha pertanto:

$$(25) \quad \begin{cases} \sigma_x^{(1)} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}; \quad \sigma_y^{(1)} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy}^{(1)} = - 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} \\ \tau_{xz}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2}; \quad \tau_{yz}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^2 \partial y}. \end{cases}$$

Sempre per $s = \text{cost.}$ le equazioni differenziali che ne derivano diventano:

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 F_1}{\partial x^2 \partial y^2} = 6 \frac{p(x, y)}{s^2} \\ \Delta \Delta F_1 = - 2 (1 + \nu) \frac{\partial^4 F_1}{\partial x^2 \partial y^2} \end{cases}$$

che equivalgono all'unica equazione:

$$(26) \quad \Delta \Delta F_1 = - \frac{12 (1 + \nu)}{s^3} p(x, y).$$

È possibile quindi risolvere il problema della piastra con una sola funzione di tensioni legate al carico dalle (26) ed alle tensioni dalle (25).

Le caratteristiche della sollecitazione diventano questa volta ⁸⁾:

⁸⁾ In questo caso si ricava che la reazione è uguale e contraria allo sforzo di taglio in discordanza con la teoria classica.

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_x = \frac{s^3}{12} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}; \quad M_y = \frac{s^3}{12} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}; \quad M_{xy} = -\frac{s^3}{6} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} \\ T_x = -\frac{s^3}{12} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2}; \quad T_y = -\frac{s^3}{12} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^2 \partial y}; \\ R_x = \frac{s^3}{12} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2}; \quad R_y = \frac{s^3}{12} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^2 \partial y} \end{array} \right.$$

e le condizioni al contorno:

1° caso) Lato appoggiato ($x = a$).

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} (F_1)_{x=a} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \end{array} \right.$$

2° caso) Lato incastrato ($x = a$).

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} (F_1)_{x=a} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} \right)_{x=a} = 0 \end{array} \right.$$

3° caso) Lato libero ($x = a$).

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \\ \left(\frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \end{array} \right.$$

4° caso) Lato vincolato elasticamente ($x = a$).

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_t 2(1 + \nu) \left(\frac{\partial^4 F_1}{\partial y^4} \right)_{x=a} = \frac{s^3}{12} \left(\frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} \\ \frac{C}{E} 2(1 + \nu) \left(\frac{\partial^3 F_1}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} = \frac{s^3}{12} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} \right)_{x=a} \end{array} \right.$$

Si è visto quindi che è possibile avere più di una soluzione del problema con le stesse ipotesi di partenza, ciò che potrebbe sembrare in contraddizione col principio di KIRCKOFF. In effetti le soluzioni che si ottengono sono sempre equilibrate e soddisfacenti solo in parte le equazioni di congruenza.

Le soluzioni che si ottengono quindi sono più o meno approssimate: quella trattata in 1) ha la stessa approssimazione che si consegue con la teoria classica tramite l'equazione di GERMAIN-LAGRANGE; quella trattata in 3) se ne discosta permettendo, però, di arrivare a risultati molto più rapidamente.

Esempio n. 1.

A titolo esplorativo trattiamo il problema della piastra rettangolare, appoggiata al contorno e sollecitata da un carico uniformemente ripartito, con le tre soluzioni esposte.

Soluzione 1)

Assumiamo per la funzione $\Phi(x, y)$ uno sviluppo in serie doppie:

$$\Phi = \Sigma \Phi_{mn} \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{b};$$

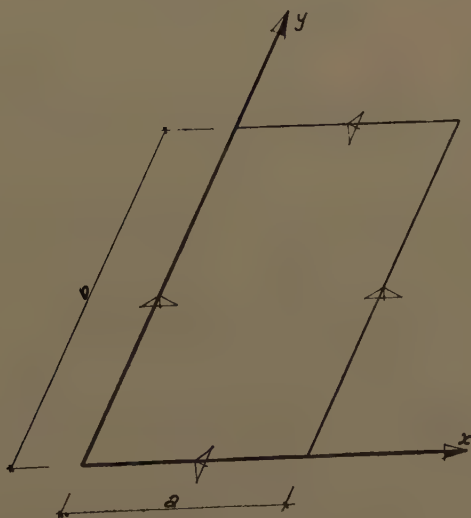


Fig. 4.

sviluppando analogamente il carico p in serie, si ottiene:

$$p(x, y) = \sum_{m,n}^{1,2,5\dots} p_{mn} \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{b}$$

con:

$$p_{mn} = \frac{16 p}{\pi^2 mn}.$$

L'applicazione della $\Delta\Phi = \frac{6 p (x, y)}{s^3}$ fornisce:

$$\Phi_{mn} = - \frac{96 p}{\pi^4 m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) s^3}.$$

Assumendo, analogamente per F_1 una funzione del tipo:

$$F_1 = \sum_{m,n}^{1,3,5\dots} F_{mn} \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{b},$$

il soddisfacimento della seconda delle (11), fornisce:

$$F_{mn} = \frac{192 (1 - \nu) p}{m n \pi^6 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) s^3}$$

e quindi

$$F_1 = \sum_{m,n}^{1,3,5\dots} \frac{192 (1 - \nu) p}{m n \pi^6 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) s^3} \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{b}$$

risultando le condizioni al contorno identicamente soddisfatte. Per il momento flettente M_x si ottiene:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{s^3}{12} \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} - 2 \Phi \right) = \\ &= \frac{16 p}{\pi^4} \sum_{m,n}^{1,3,5\dots} \frac{\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{b}. \end{aligned}$$

valore che corrisponde esattamente a quello fornito dalla teoria classica.

Per $a = b$ (piastra quadrata) e per $x = \frac{a}{2}$ e $y = \frac{b}{2}$ si ricava, arrestandosi al primo termine:

$$M_x = -\frac{4}{\pi^4} p (1 + \nu) a^2.$$

Soluzione 2)

Posto:

$$\Phi = \sum \Phi_{mn} \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{b}$$

$$F_1 = \Sigma F_{mn} \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{b}$$

$$p(x, y) = \sum_{m,n}^{1,3,5\dots} p_{mn} \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{b},$$

dall'applicazione della (19) si ottiene:

$$F_{mn} = \frac{12 p_{mn}}{s^3} \frac{1 - \nu}{\pi^6 \left(\frac{m^4}{a^4} + \frac{6 m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right)}$$

$$\Phi_{mn} = \frac{6 p_{mn}}{\pi^4 s^3} \frac{\frac{2(1 - \nu) m^2 n^2}{a^2 b^2 \left(\frac{m^4}{a^4} + \frac{6 m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right)} - 1}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

Si ricava pertanto per il momento flettente:

$$M_x = \sum_{m,n}^{1,3,5\dots} p_{mn} \left\{ - \frac{1 - \nu}{\frac{b^2}{n^2} \pi^4 \left(\frac{m^4}{a^4} + \frac{6 m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - \frac{2(1 - \nu) m^2 n^2}{a^2 b^2 \left(\frac{m^4}{a^4} + \frac{6 m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right)}}{\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \right\} \cdot \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{b}.$$

Per il caso della piastra quadrata, al centro, fermandosi al primo termine si ottiene:

$$M_x = \frac{4}{\pi^4} p (1 + \nu) a^2.$$

Soluzione 3)

Posto:

$$F_1 = \Sigma F_{mn} \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{b}$$

$$p = \sum_{m,n}^{1,3,5\dots} p_{nm} \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{b}$$

dalla (26) si ricava:

$$F_{mn} = \frac{12 (1 + \nu)}{s^3 \pi^4} \frac{16 p}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \pi^2 m n}.$$

Il momento flettente M_x è dato da:

$$M_x = \frac{s^3}{12} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} =$$

$$= \sum_{m,n}^{1,3,5,\dots} \frac{1 + \nu}{\pi^4} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \frac{16 p}{\pi^2 m n} \operatorname{sen} \frac{m \pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n \pi y}{b}.$$

Nel caso della piastra quadrata, fermandosi ancora al primo termine, al centro si ha:

$$M_x = \frac{4}{\pi^4} p (1 + \nu) a^2.$$

Si vede pertanto come solo con la trattazione 1) si hanno risultati coincidenti in ogni punto con quelli della teoria classica. Con le soluzioni 2) e 3) il valore coincide solo nel centro e per la piastra quadrata.

Osservazioni.

1) È interessante mettere in evidenza che, se con le soluzioni 1) e 2) si adottano sviluppi in serie semplici, le costanti da determinare risultano 6, invece che 4 come nella teoria classica; avendo così la possibilità di imporre al contorno separatamente le condizioni per il taglio ed il momento torcente.

2) Le equazioni che reggono il problema dell'equilibrio delle lastre molto sottili possono altresì esprimersi in termini di F_0 , F_1 e Φ cioè di sole funzioni di tensioni. Partendo da:

$$\Delta \Delta F_0 = E s \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$D \Delta \Delta w = \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + p(x, y)$$

e ricordando che:

$$w = \frac{1 + \nu}{E} F_1, \quad \Delta \Phi = \frac{6 p(x, y)}{s^3}$$

si ricava in termini di F_0 , F_1 , Φ :

$$(33) \quad \Delta \Delta F_0 = \frac{s(1+\nu)^2}{E} \left[\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} \right]$$

$$\Delta \Delta F_1 = \frac{1}{D} \left[\frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} \right] + 2(1-\nu) \Delta \Phi.$$

Napoli - Facoltà di Ingegneria - Istituto di Tecnica delle Costruzioni. Aprile 1961.

BIBLIOGRAFIA

- A. NADAI. « *Elastische Platten* », Springer, Berlin, 1925.
 S. TIMOSHENKO. « *Theory of Plates and Shells* », Mc Graw Hill, 1940.
 TH. V. KARMAN. « *Über die mittragende Breite* », A. Foepppl, Festschrift, 1924.

RIASSUNTO. — Si espone un'impostazione unitaria del problema della lastra-piastra mediante scelta di una o più funzioni di tensioni. Per la piastra in particolare la nuova equazione differenziale risolvibile si riconduce facilmente a quella classica.

Si riportano alcuni esempi numerici.

SUMMARY. — It is exposed a unitary definition of the thin plate problem carrying longitudinal compression and normal pressure, by means of one or more stress functions, suitably chosen.

The new differential equation, chiefly in regard to a thin plate carrying only normal pressure, is easily reduced to the classical one.

Some numerical examples are given.

La risoluzione del problema della trave mediante sviluppi in serie di autofunzioni

*Nota del dott. ing. Antonio La Tegola,
presentata dal socio corr. E. Giangreco*

(Adunanza del dì 4 novembre 1961)

Sono note le espressioni in serie di tipo trigonometrico delle deformate delle travi inflesse e comunque vincolate; esse, al vantaggio di servirsi di funzioni più semplici e di dare una discreta convergenza, in generale in media, per quanto riguarda gli spostamenti, non risultano adatte a rappresentare, salvo alcuni casi particolarissimi, le caratteristiche della sollecitazione.

Tale circostanza è dovuta al fatto che esse, tranne il caso della trave appoggiata, non possono ricondurci a serie di potenze e pertanto non assicurano la derivabilità termine a termine.

E quello che accade, per esempio, per lo sforzo di taglio all'incastro di una trave che, con tali sviluppi, risulterebbe nullo. Per la soluzione attraverso serie di tipo trigonometrico si parte dall'equazione della linea elastica delle aste in equilibrio indifferente sollecitate da sforzi assiali. Per esse, come noto, lo sforzo di taglio è dato, a meno di infinitesimi di ordine superiore, dalla proiezione $N\gamma'$ di N sulla deformata stessa, il che comporta l'annullarsi del taglio $(EI\gamma'')$ ogni qualvolta è nulla la rotazione. È evidente quindi come in tutti i vincoli che hanno γ' nulla, non sia possibile fornire il valore del taglio.

Per ovviare tale incongruenza, si parte dall'equazione che regge il problema delle vibrazioni libere della trave ¹⁾.

¹⁾ Infatti l'equazione caratteristica che si ricava nel caso dei carichi critici, per $EI = \text{cost}$, è del tipo:

$$\rho^4 + \lambda_r^2 \rho^2 = 0$$

che, ammettendo come radici:

$$\rho_{1,3} = \pm i\lambda_r ; \rho_{2,4} = 0$$

non permette di definire la η come una somma di serie di potenze.

Invece, l'equazione caratteristica corrispondente all'equazione differenziale delle vibrazioni stazionarie è del tipo:

$$\rho^4 - \gamma_r^4 = 0$$

che, non avendo radici nulle, permette di definire la η come somma di serie di potenze.

Essa è data da:

$$(1) \quad (EI \eta'')'' + \mu \ddot{\eta} = 0$$

ove EI è la rigidezza flessionale, μ la densità lineare della trave, η lo spostamento normale all'asse indeformato della trave stessa. Limitando lo studio alle vibrazioni stazionarie, si pone:

$$(2) \quad \eta(x, t) = \sum_r \bar{\eta}_r(x) \cdot \Phi_r(t)$$

con cui la (1) si spezza nelle due:

$$(3) \quad \begin{cases} (EI \bar{\eta}_r'')'' - \mu \sigma_r^2 \bar{\eta}_r = 0 \\ \ddot{\Phi}_r + \sigma_r^2 \Phi_r = 0. \end{cases}$$

La seconda delle (3) è, come noto, l'equazione del moto armonico in cui σ_r rappresenta la pulsazione r^m .

La prima, nel caso di travi ad inerzia costante, ammette come integrale generale:

$$\bar{\eta}_r = A_r \sin \gamma_r x + B_r \cos \gamma_r x + C_r \operatorname{Sh} \gamma_r x + D_r \operatorname{Ch} \gamma_r x$$

dove si è posto:

$$\gamma_r^4 = \frac{\mu \sigma_r^2}{EI}.$$

Le costanti A_r ; B_r ; C_r ; D_r ; si determinano con le condizioni al contorno.

Si perviene così alla scrittura del sistema, per la determinazione delle costanti, di quattro equazioni in quattro incognite, omogeneo. Si avranno soluzioni non nulle in corrispondenza di ben determinati valori della pulsazione, forniti dalla condizione che il determinante dei coefficienti sia nullo. Essi definiscono gli autovalori dell'equazione autoaggiunta:

$$(3') \quad (EI \eta'')'' - \mu \sigma^2 \eta = 0$$

che fornisce le rispettive autofunzioni corrispondenti alle configurazioni di equilibrio diverse da quella principale.

Posto per semplicità $\mu \sigma^2 = \alpha^4$ nella (3'), consideriamo due diverse deformate η_r e η_s corrispondenti a due diversi autovalori α_r ed α_s , si potrà scrivere:

$$(3'') \quad (EI \eta_r'')'' - \alpha_r^4 \eta_r = 0$$

e moltiplichiamola per η_s , con $s \neq r$,

$$(EI \eta_r'')' \eta_s - \alpha_r^4 \eta_r \eta_s = 0.$$

Operando successivamente due integrazioni per parti si ottiene:

$$(3''') \quad \left| (EI \eta_r'')' \eta_s - (EI \eta_r'') \eta_s' \right|_0^l + \\ + \int_l^i (EI \eta_r'') \eta_s'' dx - \alpha_r^4 \int_l^i \eta_r \eta_s dx = 0.$$

La (3''') si può scrivere, con l'ovvio significato dei simboli:

$$- T_r(l) \eta_s(l) + M_r(l) \varphi_s(l) + T_r(0) \eta_s(0) - M_r(0) \varphi_s(0) + \\ + \int_l^i EI \eta_r'' \eta_s'' dx - \alpha_r^4 \int_l^i \eta_r \eta_s dx = 0.$$

Partendo da η_s si ottiene analogamente:

$$- T_s(l) \eta_r(l) + M_s(l) \varphi_r(l) + T_s(0) \eta_r(0) - M_s(0) \varphi_r(0) + \\ + \int_l^i EI \eta_s'' \eta_r'' dx - \alpha_s^4 \int_l^i \eta_r \eta_s dx = 0.$$

Se i vincoli sono elastici in modo da poter porre:

$$(3''') \quad T(l) = k_l \eta(l); \quad T(0) = k_0 \eta(0) \\ M(l) = \varepsilon_l \varphi(l); \quad M(0) = \varepsilon_0 \varphi(0)$$

le due precedenti si scrivono:

$$- k_l \eta_r(l) \eta_s(l) + \varepsilon_l \varphi_r(l) \varphi_s(l) + k_0 \eta_r(0) \eta_s(0) - \varepsilon_0 \varphi_r(0) \varphi_s(0) + \\ + \int_l^i EI \eta_r'' \eta_s'' dx - \alpha_r^4 \int_l^i \eta_r \eta_s dx = 0$$

$$- k_l \eta_s(l) \eta_r(l) + \varepsilon_l \varphi_s(l) \varphi_r(l) + k_0 \eta_s(0) \eta_r(0) - \varepsilon_0 \varphi_s(0) \varphi_r(0) + \\ + \int_l^i EI \eta_s'' \eta_r'' dx - \alpha_s^4 \int_l^i \eta_r \eta_s dx = 0$$

e, sottraendo membro a membro, si ottiene:

$$(4) \quad \int_i \eta_r \eta_s dx = 0$$

che mette in luce che le funzioni η costituiscono un sistema ortogonale.

Per vincoli perfetti (appoggio semplice, estremo libero, incastro perfetto, incastro scorrevole) si ottiene anche:

$$(4') \quad \int_i EI \eta_r'' \eta_s'' dx = 0$$

cioè risultano ortogonali anche le η'' quando $EI = \text{cost}$, (condizione che è anche soddisfatta anche quando la trave è vincolata simmetricamente).

In generale comunque, resta dimostrata la ortogonalità, per $EI = \text{cost}$, delle η_{IV} e delle η_{IV} con le η :

$$(4'') \quad \int_i \eta_r^{IV} \eta_s^{IV} dx = 0; \int_i \eta_r^{IV} \eta_s dx = 0$$

operando con la (4) e (3'').

Nel caso di vincoli perfetti e per $EI = \text{cost}$ partendo dalla (4') si ottiene anche:

$$(4''') \quad \int_i \eta_r''' \eta_s' dx = 0.$$

Inoltre, poichè le η , come noto, possono farsi derivare da una equazione integrale di FREDHOLM omogenea di seconda specie con nucleo simmetrico, positivo e limitato, per il teorema di HILBERT-SCHMIDT, permettono di sviluppare facilmente in serie di funzioni $\eta_r(x)$ una generica funzione $y(x)$ rappresentante la deformata di una trave caratterizzata dalle stesse condizioni ai limiti ²⁾ $\eta_r(x)$.

Poniamo, pertanto:

$$(5) \quad y(x) = \sum_r A_r \eta_r(x)$$

con l'intento di determinare i coefficienti A_r dello sviluppo in serie, i quali costituiscono le incognite del problema.

Moltiplichiamo per η_s ed integriamo a tutto l'intervallo l :

²⁾ Le condizioni ai limiti comportano oltre all'eguaglianza delle condizioni omogenee corrispondenti al tipo di vincolo, anche quelle non omogenee.

$$\int_i y(x) \eta_s dx = \sum_r \int_i A_r \eta_r \eta_s dx.$$

Ora per le (4) si ha che, per $r \neq s$, il secondo integrale è sempre nullo, mentre per $r = s$ si ha:

$$\int_i \eta_r^2 dx \neq 0$$

Pertanto si ricava:

$$(6) \quad A_r = \frac{\int_i y(x) \eta_r dx}{\int_i \eta_r^2 dx}$$

che ci permette di ricavare il generico A_r .

È evidente che per mezzo della (6) e della (5), quando $y(x)$ è noto a priori, se ne può facilmente trovare lo sviluppo in serie di η_r .

Se riteniamo che $y(x)$ rappresenti una deformata non avviene che essa è nota direttamente; il caso più frequente è che siano note le condizioni di carico e di vincolo e si voglia determinare direttamente la corrispondente deformata.

La $y(x)$ è notoriamente legata al carico $p(x)$ dalla:

$$(7) \quad (EI y'')'' = p.$$

Moltiplicando la (7) per η_r ed integrando a tutto il dominio si ottiene:

$$(8) \quad \left| (EI y'')' \eta_r - (EI y'') \eta_r' \right|_0^l + \int_i (EI y'') \eta_r'' dx = \int_i p \eta_r dx.$$

Analogamente, partendo dalla (3''), moltiplicandola per y ed integrando, si ottiene:

$$(9) \quad \left| (EI \eta_r'')' y - (EI \eta_r'') y' \right|_0^l + \int_i (EI \eta_r'') y'' dx = \alpha_r^4 \int_i y \eta_r dx.$$

Dalla (8) e dalla (9) si ha pertanto, sottraendo a membro a membro, e tenendo presenti le (3''):

$$\alpha_r^4 \int_i y \eta_r dx = \int_i p \eta_r dx$$

e ricordando per la (6) che:

$$\int_i y \eta_r dx = A_r \int_i \eta_r^2 dx$$

si ottiene:

$$(10) \quad A_r = \frac{\int_i p \eta_r dx}{\alpha_r^4 \int_i \eta_r^2 dx}.$$

La deformata prodotta dal carico p è data quindi da:

$$(11) \quad y(x) = \sum_r \frac{\int_i p \eta_r dx}{\alpha_r^4 \int_i \eta_r^2 dx} \eta_r(x)$$

e nel caso di inerzia costante:

$$(11') \quad y(x) = \sum_r \frac{\int_i p \eta_r dx}{EI \int_i \eta_r^2 dx} \eta_r(x).$$

Il procedimento risolutivo risulta quindi completamente definito: assegnate le caratteristiche elastiche e geometriche della trave e le sue condizioni di vincolo si deducono gli autovalori e le η corrispondenti; in seguito, tramite la (11) si definisce la $y(x)$.

Poichè la (11) è analiticamente valida anche se p è una funzione discontinua, consideriamo specificatamente il caso di un carico uniformemente

ripartito tra le ascisse $\xi - \frac{\varepsilon}{2}$ e $\xi + \frac{\varepsilon}{2}$, e nullo su tutto il resto della trave. Per il teorema del valor medio si ottiene che:

$$\int_i p \eta_r dx = p \varepsilon \eta_r^*$$

dove η_r^* è il valore assunto dalla η in un punto opportuno dell'intervallo

$$\left(\xi - \frac{\varepsilon}{2}; \xi + \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Facendo tendere il tratto ε a zero e mantenendo costante ed uguale a P il prodotto $p \varepsilon$, al limite, il carico si riduce ad una forza P concentrata in ξ ed η_r^* diviene $\eta_r(\xi)$.

Per il carico concentrato in ξ si ha dunque:

$$\int_i p \eta_r dx = P \eta_r(\xi)$$

e perciò:

$$(12) \quad y(x) = P \sum_r \frac{\eta_r(\xi) \eta_r(x)}{\alpha_r^4 \int_i \eta_r^2 dx}.$$

Analogamente è possibile considerare il caso di una coppia di intensità M applicata nel punto di ascissa ξ .

Basta pensare che all'ascissa $\xi - \frac{\varepsilon}{2}$ vi è una forza diretta verso l'alto ed in $\xi + \frac{\varepsilon}{2}$ una forza diretta verso il basso.

È evidente che, per sovrapposizione degli effetti, è possibile scrivere, partendo dalla (12):

$$y(x) = P \sum_r \frac{\eta_r\left(\xi + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \eta_r\left(\xi - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\alpha_r^4 \int_i \eta_r^2 dx} \eta_r(x).$$

Per il termine:

$$P \left[\eta_r \left(\xi + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \eta_r \left(\xi - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] = P \varepsilon \frac{\eta_r \left(\xi + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \eta_r \left(\xi - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\varepsilon},$$

considerando il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ e ponendo $P \cdot \varepsilon = M$, si ha:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M \frac{\eta_r \left(\xi + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \eta_r \left(\xi - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\varepsilon} = M \eta_r'(\xi)$$

e quindi si ottiene:

$$(13) \quad v(x) = M \sum_r \frac{\eta_r'(\xi) \eta_r(x)}{\alpha_r^4 \int_i \eta_r^2 dx}.$$

Si sono pertanto analizzate le varie condizioni di carico tramite le (11), (12), (13); i casi più complessi si possono ottenere per sovrapposizione di effetti.

Napoli - Facoltà d'Ingegneria, Istituto di Tecnica delle Costruzioni, aprile 1961.

BIBLIOGRAFIA

- G. KRALL. « *Meccanica tecnica delle vibrazioni* », Bologna, Zanichelli, 1940.
- O. ZANABONI. « *Espressioni mediante serie di tipo trigonometrico della deformata delle travi semplicemente inflesse e comunque vincolate* », *Giornale del Genio Civile*, fasc. 3° e 4°, 1958.
- F. BLEICH. « *Buckling strenght of Metal Structures* », New York, Mc Grew-Hill, 1952.
- G. VITALI e C. SANSONE. « *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale* », Bologna, Zanichelli, 1952.

RIASSUNTO. — Si espone un procedimento per lo sviluppo della deformata delle travi inflesse comunque vincolate in serie di autofunzioni derivanti dal problema dinamico delle vibrazioni libere. Si fa notare come, solo per questa via, sia possibile fornire le espressioni, mediante serie, del taglio per le travi incastrate. Si riportano alcune applicazioni a casi particolari.

SUMMARY. — We expose a method apt to find the working out of the elastic curve of beams under arbitrary constraint, in terms of eigenfunctions derived from the dynamical problem of natural vibrations. We have to notice how only in this way it is possible to give series of expressions, regarding the shear of contrained beams.

Some applications to particular cases are also made.

Sulla flessione delle piastre sottili in presenza di carichi assiali

*Nota del dott. ing. Michele Capurso
presentata dal socio corr. E. Giangreco*

(Adunanza del dì 4 novembre 1961)

1) PREMESSE.

Dalla trattazione esatta della flessione dell'asta euleriana al di là della soglia critica si deduce che a lievi incrementi del carico assiale corrispondono notevoli incrementi della flessione e conseguentemente delle sollecitazioni interne della struttura.

Il carico critico viene pertanto a costituire una limitazione superiore all'entità dei carichi assiali potendosi immedesimare in pratica con il carico che produce il collasso della membratura stessa.

La flessione di una piastra al di là della soglia critica si differenzia viceversa sostanzialmente dal caso dell'asta euleriana.

Tale flessione infatti, salvo che per particolari condizioni di vincolo e di carico, avviene secondo superfici elastiche di tipo non cilindrico alle quali si collega quindi una deformazione estensionale del piano medio di tipo non affine a quella derivante dalla soluzione del sistema elastico considerato a guisa di lastra piana.

Alle deformazioni si associano pertanto corrispondenti tensioni di tipo membrana globalmente equilibrate, la cui entità è funzione rapidamente crescente dell'ampiezza di flessione della piastra.

A tali tensioni si ricollega appunto la differenza di comportamento tra asta euleriana e piastra, potendo quest'ultima, in virtù di esse, assumere posizioni di equilibrio stabile pur mantenendosi la flessione entro limiti modesti.

È ben noto infatti, soprattutto ai progettisti di strutture aeronautiche, l'elevato rapporto esistente tra carico di collasso e carico critico per piastre sottili caricate esclusivamente in corrispondenza del piano medio.

Si presenta quindi di notevole interesse la determinazione delle deformate flessionali e delle caratteristiche della sollecitazione per tali strutture quando i carichi esterni superino la soglia critica.

Il problema è stato posto in termini matematici in una fondamentale

memoria dal KARMAN, il quale assumendo quale espressione approssimata delle componenti speciali di deformazione del piano medio della piastra:

$$(1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}$$

e quale espressione approssimata delle curvature:

$$(2) \quad \chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \chi_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \chi_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (*)$$

è pervenuto alle due equazioni fondamentali:

$$(3) \quad \begin{aligned} \Delta \Delta F &= E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ D \Delta \Delta w &= p(xy) + h \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

involgenti la ben nota funzione di Airy $F(xy)$ e la componente trasversale $w(xy)$ dallo spostamento di un generico punto della fibra media.

L'integrazione di tali equazioni, non perseguibile allo stato attuale per via esatta, è stata affrontata da vari Autori in via approssimata avvalendosi del metodo energetico.

Oggetto della presente Nota è lo studio della flessione delle piastre rettangolari appoggiate al contorno, per effetto di carichi assiali di entità superiore al valore critico. Tale studio viene affrontato nelle seguenti pagine avvalendosi di un metodo di successive approssimazioni, che consente al limite di pervenire all'espressione esatta della superficie elastica assu-

(*) A rigore le espressioni (1) e (2) sono date in forma incompleta mancando tutti i termini del secondo ordine contenenti le derivate delle componenti u e v dello spostamento.

Tale approssimazione tuttavia si giustifica osservando che tali componenti saranno sicuramente, entro certi limiti dei carichi esterni, di entità trascurabile rispetto alla componente w . Si osserva però che per piastre piuttosto allungate e cioè nei casi di flessione quasi cilindrica tale ipotesi cade in difetto e pertanto è necessario tener conto delle espressioni complete. Si nota comunque che, per quanto già detto dianzi, il calcolo delle deformate flessionali per tali strutture si presenta di scarso interesse pratico essendo molto lieve lo scarto tra carico critico e carico di collasso.

mendo quale funzione iniziale la deformata relativa all'incipiente flessione della piastra in condizioni di equilibrio indifferente.

Si forniscono inoltre, fermandosi alla prima approssimazione, i risultati risolutivi nel caso più generale, mentre per la seconda approssimazione viene fornito il sistema di equazioni risolutivo del caso generale, applicandolo in concreto al caso della piastra quadrata caricata uniformemente lungo tutto il contorno.

In quanto segue si assume che i vincoli perimetrali costituiscono un elemento irrigidente tale da impedire ogni distorsione del perimetro della piastra, i cui lati pertanto sono vincolati a rimanere rettilinei durante la flessione della stessa.

2) IL CALCOLO DELLE DEFORMATE DI FLESSIONE NELLE PIASTRE RETTANGOLARI SOGGETTE A COMPRESSIONE UNIFORME SUI BORDI.

Scelto il riferimento di fig. 1 si assume, in accordo con le premesse, quale espressione iniziale per la deformata:

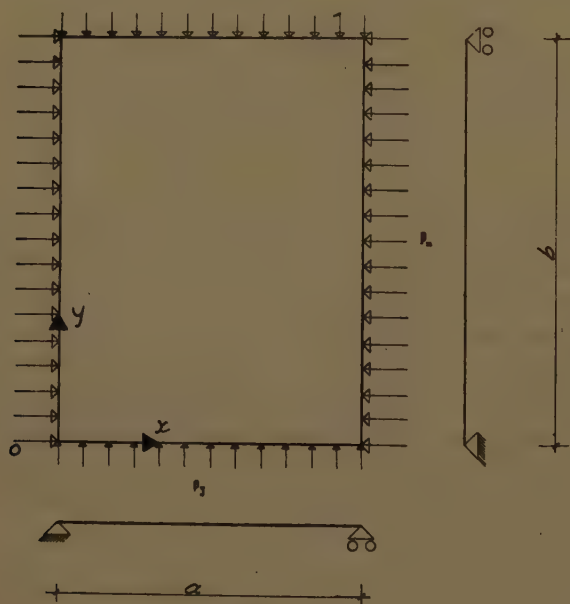


Fig. 1.

$$(4) \quad w^{(0)}(xy) = w_{11}^{(0)} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y$$

avendo posto:

$$\alpha_m = \frac{m \pi}{a} \quad \beta_n = \frac{n \pi}{b}$$

ove m ed n sono il numero di semionde, rispettivamente secondo x ed y , della deformata d'equilibrio indifferente corrispondente al minimo valore dei carichi esterni.

I valori delle tensioni nel piano medio collegate alla deformata flessionale (4) si valutano facilmente sostituendo la (4) nella (3)₁. Eseguendo semplici sviluppi si ottiene infatti:

$$\Delta \Delta F^{(0)}(xy) = \frac{E}{2} \alpha_m^2 \beta_n^2 w_{11}^{-(0)} (\cos 2 \alpha_m x + \cos 2 \beta_n y)$$

e quindi:

$$(5) \quad F^0(xy) = \Phi^{(0)}(xy) + \frac{E}{32} w_{11}^{-(0)} \left[\left(\frac{\beta_n}{\alpha_m} \right)^2 \cos 2 \alpha_m x + \left(\frac{\alpha_m}{\beta_n} \right)^2 \cos 2 \beta_n y \right]$$

essendo $\Phi^{(0)}(xy)$ una funzione biarmonica le cui condizioni al contorno si preciseranno tra breve.

Le richieste espressioni delle tensioni nel piano medio assumono pertanto la forma:

$$(6) \quad \begin{aligned} \sigma_x^{(0)} &= \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial y^2} - \frac{E}{8} \alpha_m^2 w_{11}^{-(0)} \cos 2 \beta_n y \\ \sigma_y^{(0)} &= \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x^2} - \frac{E}{8} \beta_n^2 w_{11}^{-(0)} \cos 2 \alpha_m x \\ \tau_{xy}^{(0)} &= - \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

Le condizioni di frontiera, necessarie per definire la $\Phi^{(0)}(x, y)$ nel dominio rettangolare (a, b) , vengono ricavate imponendo il soddisfacimento sul contorno della condizione di equilibrio:

$$(7) \quad \tau_{xy}^{(0)} = 0 \quad \text{per} \quad \begin{array}{ll} x = 0 & x = a \\ y = 0 & y = b \end{array}$$

e delle condizioni di congruenza:

$$(8) \quad \begin{array}{ll} u^{(0)} = 0 & \text{per } x = 0 \\ u^{(0)} = c_1^{(0)} & \text{per } x = a \end{array} \quad \begin{array}{ll} v^{(0)} = 0 & \text{per } y = 0 \\ v^{(0)} = c_1^{(0)} & \text{per } y = b \end{array}$$

Tenendo presente infatti le relazioni di elasticità:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2\end{aligned}$$

e le relazioni (6), si ricava con semplicità:

$$\begin{aligned}u^{(n)}(xy) &= \frac{1}{E} \int \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x^2} \right) dx - \frac{\bar{w}_{11}^{(0)}}{16 \alpha_m} (\alpha_m^2 - \nu \beta_n^2) \operatorname{sen} 2 \alpha_m x + \\ &\quad - \frac{\alpha_m^2}{8} \bar{w}_{11}^{(0)} x + \frac{\alpha_m}{16} \bar{w}_{11}^{(0)} \operatorname{sen} 2 \alpha_m x \cos 2 \beta_n y\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}v^{(n)}(xy) &= \frac{1}{E} \int \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial y^2} \right) dy - \frac{\bar{w}_{11}^{(0)}}{16 \beta_n} (\beta_n^2 - \nu \alpha_m^2) \operatorname{sen} 2 \beta_n y + \\ &\quad - \frac{\beta_n^2}{8} \bar{w}_{11}^{(0)} y + \frac{\beta_n}{16} \bar{w}_{11}^{(0)} \operatorname{sen} 2 \beta_n y \cos 2 \alpha_m x.\end{aligned}$$

Pertanto le espressioni (7) e (8), esplicitate in funzione della $\Phi^{(0)}(x, y)$, tramite le relazioni (6) e (9), forniscono per la $\Phi^{(0)}(x, y)$ le seguenti condizioni alla frontiera:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x \partial y} &= 0; \int \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x^2} \right) dx = 0 && \text{per } x = 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x \partial y} &= 0; \frac{1}{E} \int \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x^2} \right) dx - \frac{\alpha_m^2}{8} a \bar{w}_{11}^{(0)} = c_1^0 && \text{per } x = a \\ \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x \partial y} &= 0; \int \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial y^2} \right) dy = 0 && \text{per } y = 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x \partial y} &= 0; \frac{1}{E} \int \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial y^2} \right) dy - \frac{\beta_n^2}{8} b \bar{w}_{11}^{(0)} = c_2^0 && \text{per } y = b.\end{aligned}\quad (10)$$

Tali condizioni associate all'equazione:

$$\Delta \Delta \Phi^{(0)}(xy) = 0$$

individuano per la funzione $\Phi^{(0)}(x, y)$ l'espressione:

$$(11) \quad \Phi^{(0)}(xy) = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{x^2}{2} \left[\frac{c_2^{(0)}}{b} + \nu \frac{c_1^{(0)}}{a} + \frac{w_{11}^{-2(0)}}{8} (\beta_n^2 + \nu \alpha_m^2) \right] + \right. \\ \left. + \frac{y^2}{2} \left[\frac{c_1^{(0)}}{a} + \nu \frac{c_2^{(0)}}{b} + \frac{w_{11}^{-2(0)}}{8} (\alpha_m^2 + \nu \beta_n^2) \right] \right\}.$$

La determinazione dei coefficienti $c_1^{(0)}$ e $c_2^{(0)}$ procede, nel caso che i bordi $x = a$ e $y = b$ siano liberi di traslare nel piano x, y , dalle due condizioni di equilibrio globale:

$$(12) \quad \int_0^b \sigma_x^{(0)} dy = -p_x b; \quad \int_0^a \sigma_y^{(0)} dx = -p_y a$$

mentre nel caso che uno dei due bordi, ad esempio quello di equazione $x = a$, sia bloccato alla traslazione nel piano x, y , dalla condizione di congruenza:

$$(13)_1 \quad u(a, y) = c_1^{(0)} = 0$$

e dalla condizione di equilibrio:

$$(13)_2 \quad \int_0^a \sigma_y^{(0)} dx = -p_y a.$$

Nel primo caso si ha pertanto:

$$(14) \quad c_1^{(0)} = -\frac{a}{E} \left[p_x - \nu p_y + \frac{E}{8} w_{11}^{-2(0)} \alpha_m^2 \right] \\ c_2^{(0)} = -\frac{b}{E} \left[p_y - \nu p_x + \frac{E}{8} w_{11}^{-2(0)} \beta_n^2 \right]$$

e quindi:

$$(15) \quad \Phi^{(0)}(xy) = -\frac{1}{2} (p_y x^2 + p_x y^2)$$

Nel secondo caso:

$$(16) \quad \begin{aligned} c_1^{(0)} &= 0 \\ c_2^{(0)} &= -\frac{b}{E} \left[(1 - \nu^2) p_y + \frac{E}{8} \bar{w}_{11}^{(0)} (\beta_n^2 + \nu \alpha_m^2) \right] \end{aligned}$$

e quindi:

$$(17) \quad \Phi^{(0)}(xy) = -\frac{1}{2} \left[p_y x^2 - (\nu p_y + \frac{E}{8} \bar{w}_{11}^{(0)} \alpha_m^2) y^2 \right]$$

Si sviluppa inizialmente il caso relativo alla soluzione (15). Si ha quindi:

$$(18) \quad \begin{aligned} F^{(0)}(xy) &= -\frac{1}{2} (p_y x^2 + p_x y^2) + \\ &+ \frac{E}{32} \bar{w}_{11}^{(0)} \left[\left(\frac{\beta_n}{\alpha_m} \right)^2 \cos 2 \alpha_m x + \left(\frac{\alpha_m}{\beta_n} \right)^2 \cos 2 \beta_n y \right]. \end{aligned}$$

La (4) e la (18) verificano esattamente l'equazione di congruenza (3)₁, ma non rispettano la condizione di equilibrio trasversale (3)₂. Sostituendo infatti la (4) e la (18) a secondo membro dell'equazione d'equilibrio (3)₂, in cui si sia posto $p(x, y) = 0$, si ottiene con semplici sviluppi:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w^{(1)}(xy) &= \frac{h}{D} \left\{ \left[(p_x \alpha_m^2 + p_y \beta_n^2) w_{11}^{(0)} + \right. \right. \\ &- \frac{E}{16} (\alpha_m^2 + \beta_n^2) \bar{w}_{11}^{(0)} \left. \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y + \\ &+ \frac{E}{16} \alpha_m^4 \bar{w}_{11}^{(0)} \sin \alpha_m x \sin 3 \beta_n y + \\ &+ \frac{E}{16} \beta_n^4 \bar{w}_{11}^{(0)} \sin 3 \alpha_m x \sin \beta_n y \left. \right\} \end{aligned}$$

e quindi come nuova espressione per la deformata elastica $w(x, y)$:

$$(19) \quad \begin{aligned} w^{(1)}(xy) &= w_{11}^{(1)} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y + w_{13}^{(1)} \sin \alpha_m x \sin 3 \beta_n y + \\ &+ w_{31}^{(1)} \sin 3 \alpha_m x \sin \beta_n y \end{aligned}$$

ove i nuovi coefficienti $w_{11}^{(1)}$, $w_{13}^{(1)}$, $w_{31}^{(1)}$ vengono determinati univocamente in funzione di $w_{11}^{(0)}$ dalle relazioni:

$$\begin{aligned}
 w_{11}^{(1)} &= \frac{h}{D} \frac{p_x \alpha_m^2 + p_y \beta_n^2}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} w_{11}^{(0)} - \frac{E h}{16 D} \frac{\alpha_m^4 + \beta_n^4}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} w_{11}^{(0)} \\
 (20) \quad w_{13}^{(1)} &= \frac{E h}{16 D} \frac{\alpha_m^4}{(\alpha_m^2 + 9 \beta_n^2)^2} w_{11}^{(0)} \\
 w_{31}^{(1)} &= \frac{E h}{16 D} \frac{\beta_n^4}{(9 \alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} w_{11}^{(0)}.
 \end{aligned}$$

Dalle (20) si nota che per $w_{11}^{(0)}$ sufficientemente piccolo $w_{13}^{(1)}$ e $w_{31}^{(1)}$ possono ritenersi con buona approssimazione infinitesimi di ordine superiore rispetto a $w_{11}^{(1)}$ e pertanto come nuova espressione per la superficie elastica si può assumere:

$$(21) \quad w^{(1)}(xy) = w_{11}^{(1)} \operatorname{sen} \alpha_m x \operatorname{sen} \beta_n y$$

essendo $w_{11}^{(1)}$ definito dalla relazione (20)₁.

Nei limiti di prima approssimazione si può dunque porre per costruire la successione di funzioni $w^{(n)}(xy)$, $F^{(n)}(xy)$ che tendono alla soluzione delle (3):

$$\begin{aligned}
 (22) \quad w^{(n)}(xy) &= w_{11}^{(n)} \operatorname{sen} \alpha_m x \operatorname{sen} \beta_n y \\
 F^{(n)}(xy) &= -\frac{1}{2} (p_y x^2 + p_x y^2) + \\
 &+ \frac{E}{32} w_{11}^{(n)} \left[\left(\frac{\beta_n}{\alpha_m} \right)^2 \cos 2 \alpha_m x + \left(\frac{\alpha_m}{\beta_n} \right)^2 \cos 2 \beta_n y \right].
 \end{aligned}$$

Sostituendo infatti le (22) nella (3)₂ si ottiene:

$$\begin{aligned}
 (23) \quad \Delta \Delta w^{(n+1)}(xy) &= \frac{h}{D} \left\{ \left[(p_x \alpha_m^2 + p_y \beta_n^2) w_{11}^{(n)} + \right. \right. \\
 &- \frac{E}{16} (\alpha_m^4 + \beta_n^4) w_{11}^{(n)} \left. \right] \operatorname{sen} \alpha_m x \operatorname{sen} \beta_n y + \\
 &+ \frac{E}{16} \alpha_m^4 w_{11}^{(n)} \operatorname{sen} \alpha_m x \operatorname{sen} 3 \beta_n y + \\
 &+ \frac{E}{16} \beta_n^4 w_{11}^{(n)} \operatorname{sen} 3 \alpha_m x \operatorname{sen} \beta_n y \left\{
 \end{aligned}$$

e trascurando ancora gli ultimi due termini del secondo membro della (23)

rispetto al primo, si trova che la soluzione a cui tendono la (22) per $n \rightarrow \infty$ è legata al limite della successione:

$$(24) \quad w_{11}^{(n+1)} = \lambda_{11} w_{11}^{(n)} - k_{11} w_{11}^{(n-1)}$$

ove:

$$(25) \quad \lambda_{11} = \frac{h}{D} \frac{p_x \alpha_m^2 + p_y \beta_n^2}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \quad k_{11} = \frac{E h}{16 D} \frac{\alpha_m^4 + \beta_n^4}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}$$

Ammissa pertanto l'esistenza di un limite w_{11} per la successione (24) esso resta determinato dalla relazione:

$$(26) \quad w_{11} = \lambda_{11} w_{11} - k_{11} w_{11}$$

che, scartata la soluzione banale $w_{11} = 0$ corrispondente alla configurazione indeformata di equilibrio instabile, porge:

$$(27) \quad w_{11} = \pm \sqrt{\frac{\lambda_{11} - 1}{k_{11}}} \quad (*)$$

Si ottiene così nei limiti di validità della soluzione di prima approssimazione:

$$(28) \quad w(xy) = \pm \sqrt{\frac{\lambda_{11} - 1}{k_{11}}} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y;$$

$$F(xy) = -\frac{1}{2} (p_y x^2 + p_x y^2) +$$

$$+ E \frac{\lambda_{11} - 1}{32 k_{11}} \left[\left(\frac{\beta_n}{\alpha_m} \right)^2 \cos 2 \alpha_m x + \left(\frac{\alpha_m}{\beta_n} \right)^2 \cos 2 \beta_n y \right].$$

La (28) è quindi soluzione congruente ma non perfettamente equilibrata del sistema studiato verificando esattamente l'equazione di congruenza (3)₁ ma non soddisfacendo esattamente la relazione differenziale di equilibrio (3)₂.

La misura dell'errore commesso può tuttavia valutarsi confrontando

(*) Si osserva che per $\lambda_{11} < 1$, e cioè per valori dei carichi assiali inferiore al primo valore critico, la (25) ammette come unica soluzione $w_{11} = 0$ corrispondente alla configurazione indeformata di equilibrio stabile.

l'entità dei primi due termini secondari della deformata: [Cifra formule (19)₁ e (19)₂]:

$$(29) \quad w^{11}(xy) = \left(\frac{\lambda_{11} - 1}{k_{11}} \right)^{\frac{8}{2}} (k_{13} \operatorname{sen} \alpha_m x \operatorname{sen} 3 \beta_n y + \\ + k_{31} \operatorname{sen} 3 \alpha_m x \operatorname{sen} \beta_n y)$$

$$\text{ove } k_{13} = \frac{E h}{16 D} \frac{\alpha_m^4}{(\alpha_m^2 + 9 \beta_n^2)^2} \quad k_{31} = \frac{E h}{16 D} \frac{\beta_n^4}{(\beta_n^2 + 9 \alpha_m^2)^2}$$

con il termine principale fornito dalla relazione (28)₁.

Le (28) definiscono così entro un campo di valori dei carichi esterni piuttosto ampio, come si mostrerà nel seguito, la soluzione relativa alla piastra con i bordi $x = a$ e $y = b$ entrambi scorrevoli.

Nel caso della piastra con un bordo bloccato alla traslazione la trattazione procede identicamente salvo ad assumere (cifra formula 17) quale successione di funzioni che tendono alla soluzione delle (3):

$$(30) \quad w^{(n)}(xy) = w_{11}^{(n)} \operatorname{sen} \alpha_m x \operatorname{sen} \beta_n y$$

$$F^{(n)}(xy) = -\frac{1}{2} [p_y (x^2 - \nu y^2)] + \\ + \frac{E}{32} w_{11}^{(n)} \left[\left(\frac{\beta_n}{\alpha_m} \right)^2 \cos 2 \alpha_m x + \left(\frac{\alpha_m}{\beta_n} \right)^2 \cos 2 \beta_n y - 2 \alpha_m^2 y^2 \right].$$

Si trova così con analogo ragionamento che il limite delle successioni (30) è legato alla soluzione dell'equazione cubica:

$$w_{11} = \bar{\lambda}_{11} w_{11} - \bar{k}_{11} w_{11}^3$$

essendo:

$$(31) \quad \bar{\lambda}_{11} = \frac{p_y (\beta_n^2 - \nu \alpha_m^2)}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \quad \bar{k}_{11} = \frac{E h}{16 D} \frac{3 \alpha_m^4 + \beta_n^4}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}$$

e si ottiene infine quale limite della successione di funzioni (29):

$$(32) \quad w(xy) = \pm \sqrt{\frac{\lambda_{11} - 1}{k_{11}}} \operatorname{sen} \alpha_m x \operatorname{sen} \beta_n y \\ F(xy) = -\frac{p_y}{2} (x^2 - \nu y^2) +$$

$$+ \frac{E}{32} \frac{\bar{\lambda}_{11} - 1}{\bar{k}_{11}} \left[\left(\frac{\beta_n}{\alpha_m} \right)^2 \cos 2 \alpha_m x + \left(\frac{\alpha_m}{\beta_n} \right)^2 \cos 2 \beta_n y - 2 \alpha_m^2 y^2 \right].$$

L'errore commesso nell'assumere le (32) quali soluzioni del sistema (3) si valuta ancora tramite la (29) a patto di sostituire in essa a λ_{11} e k_{11} i valori $\bar{\lambda}_{11}$ e \bar{k}_{11} risultanti dalle (31).

3) LA SOLUZIONE DI SECONDA APPROSSIMAZIONE.

Per ragioni di spazio si sviluppa unicamente il caso relativo alla piastra a bordi $x = a$ e $y = b$ entrambi scorrevoli.

Dalla trattazione precedente si è visto (cifra formula 19) che per ragioni di equilibrio all'onda primaria di deformata:

$$(33) \quad w'(xy) = w_{11} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y$$

si affiancano le onde secondarie:

$$(34) \quad w''(xy) = w_{13} \sin \alpha_m x \sin 3 \beta_n y + w_{31} \sin 3 \alpha_m x \sin \beta_n y.$$

Le (34) possono altresì ritenersi trascurabili rispetto alla (33), sino ad un certo valore del moltiplicatore λ_{11} , al di là del quale esse assumono lo stesso ordine di grandezza dell'onda primaria (33).

Volendo pertanto esplorare in un campo più vasto del moltiplicatore λ_{11} il comportamento della struttura, si può assumere quale espressione della deformata iniziale:

$$(35) \quad \begin{aligned} w^{(0)}(xy) = & w_{11}^{(0)} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y + w_{13}^{(0)} \sin \alpha_m x \sin 3 \beta_n y + \\ & + w_{31}^{(0)} \sin 3 \alpha_m x \sin \beta_n y. \end{aligned}$$

Procedendo analogamente a quanto si è svolto in precedenza, si trova quale espressione della funzione delle tensioni $F^{(0)}(x, y)$ collegata alla deformata flessionale (34):

$$(35) \quad \begin{aligned} F^{(0)}(xy) = & -\frac{1}{2} (p_y x^2 + p_x y^2) + \\ & + E \alpha_m^2 \beta_n^2 \sum_{i=0}^3 \sum_{k=0}^3 a_{ik}^{(0)} \cos 2 i \alpha_m x \cos 2 k \beta_n y \end{aligned}$$

essendo i coefficienti $a_{ik}^{(0)}$ desumibili dalla seguente tabella:

	0	1	2	3
0	0	$\frac{w_{11}^{(0)} - 2w_{11}^{(0)} w_{13}^{(0)} + 9w_{31}^{(0)}}{32 \beta_n^4}$	$\frac{w_{11}^{(0)} w_{13}^{(0)}}{64 \beta_n^4}$	$\frac{w_{13}^{(0)}}{288 \beta_n^4}$
1	$\frac{w_{11}^{(0)} - 2w_{11}^{(0)} w_{31}^{(0)} + 9w_{13}^{(0)}}{32 \alpha_m^4}$	$\frac{w_{11}^{(0)} w_{13}^{(0)} + w_{11}^{(0)} w_{31}^{(0)} - 4w_{13}^{(0)} w_{31}^{(0)}}{4 (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}$	$-\frac{w_{11}^{(0)} w_{13}^{(0)} - 25w_{13}^{(0)} w_{31}^{(0)}}{16 (\alpha_m^2 + 4 \beta_n^2)^2}$	0
2	$\frac{w_{11}^{(0)} w_{31}^{(0)}}{64 \alpha_m^4}$	$-\frac{w_{11}^{(0)} w_{31}^{(0)} - 25w_{13}^{(0)} w_{31}^{(0)}}{16 (4 \alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}$	$-\frac{w_{13}^{(0)} w_{31}^{(0)}}{16 (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}$	0
3	$\frac{w_{31}^{(0)}}{288 \alpha_m^4}$	0	0	0

Sostituendo pertanto le espressioni (34) e (35) a secondo membro della (3) e trascurando le successive onde di deformazione secondaria di entità trascurabile rispetto alla primaria del tipo (34), si ottiene quale nuova espressione della superficie elastica:

$$(36) \quad w^{(1)}(xy) = w_{11}^{(1)} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y + \\ + w_{13}^{(1)} \sin \alpha_m x \sin 3 \beta_n y + w_{31}^{(1)} \sin 3 \alpha_m x \sin \beta_n y$$

i cui coefficienti $w_{11}^{(1)}$, $w_{13}^{(1)}$, $w_{31}^{(1)}$ restano univocamente determinati in funzione dei coefficienti iniziali $w_{11}^{(0)}$, $w_{13}^{(0)}$, $w_{31}^{(0)}$ secondo le relazioni:

$$(37) \quad w_{11}^{(1)} \lambda_{11} = w_{11}^{(0)} - \gamma_{11} (A_{00} w_{11}^{(0)} + A_{01} w_{11}^{(0)} w_{13}^{(0)} + A_{10} w_{11}^{(0)} w_{31}^{(0)} + A_{02} w_{11}^{(0)} w_{13}^{(0)} + \\ + 2 A_{11} w_{11}^{(0)} w_{13}^{(0)} w_{31}^{(0)} + A_{20} w_{11}^{(0)} w_{31}^{(0)} - A_{12} w_{13}^{(0)} w_{31}^{(0)} - A_{21} w_{13}^{(0)} w_{31}^{(0)}); \\ w_{13}^{(1)} = \lambda_{13} w_{13}^{(0)} + \gamma_{13} (A_{01} w_{11}^{(0)} - A_{02} w_{11}^{(0)} w_{13}^{(0)} + \\ - A_{11} w_{11}^{(0)} w_{31}^{(0)} + 2 A_{12} w_{11}^{(0)} w_{13}^{(0)} w_{31}^{(0)} + \\ + A_{21} w_{11}^{(0)} w_{31}^{(0)} - A_{04} w_{13}^{(0)} - A_{22} w_{13}^{(0)} w_{31}^{(0)});$$

$$w_{31}^{(1)} = \lambda_{31} w_{31}^{(0)} + \gamma_{31} (A_{10} w_{11}^{(0)} - A_{20} w_{11}^{(0)} w_{31}^{(0)} + \\ - A_{11} w_{11}^{(0)} w_{13}^{(0)} + 2 A_{31} w_{11}^{(0)} w_{13}^{(0)} w_{31}^{(0)} + \\ + A_{12} w_{11}^{(0)} w_{13}^{(0)} - A_{40} w_{31}^{(0)} - A_{22} w_{31}^{(0)} w_{13}^{(0)}).$$

in cui si è posto:

$$\lambda_{11} = \frac{h}{D} \frac{p_x \alpha_m^2 + p_y \beta_n^2}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \quad \gamma_{11} = \frac{E h}{D} \frac{\alpha_m^4 \beta_n^4}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}$$

$$\lambda_{13} = \frac{h}{D} \frac{p_x \alpha_m^2 + 9 p_y \beta_n^2}{(\alpha_m^2 + 9 \beta_n^2)^2} \quad \gamma_{13} = \frac{E h}{D} \frac{\alpha_m^4 \beta_n^4}{(\alpha_m^2 + 9 \beta_n^2)^2}$$

$$\lambda_{31} = \frac{h}{D} \frac{9 p_x \alpha_m^2 + p_y \beta_n^2}{(9 \alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \quad \gamma_{31} = \frac{E h}{D} \frac{\alpha_m^4 \beta_n^4}{(9 \alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}$$

$$A_{00} = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{\alpha_m^4} + \frac{1}{\beta_n^4} \right) \quad A_{01} = \frac{1}{16 \beta_n^4} \quad A_{10} = \frac{1}{16 \alpha_m^4}$$

$$A_{02} = \frac{1}{16} \left[\frac{9}{\alpha_m^4} + \frac{4}{\beta_n^4} + \frac{1}{(\alpha_m^2 + 4 \beta_n^2)^2} + \frac{16}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \right]$$

$$A_{20} = \frac{1}{16} \left[\frac{9}{\beta_n^4} + \frac{4}{\alpha_m^4} + \frac{1}{(4 \alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} + \frac{16}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \right]$$

$$A_{11} = \frac{1}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \quad A_{04} = \frac{1}{16} \left(\frac{81}{\alpha_m^4} + \frac{1}{\beta_n^4} \right) \quad A_{40} = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{\alpha_m^4} + \frac{81}{\beta_n^4} \right)$$

$$A_{13} = \frac{1}{16} \left[\frac{9}{\alpha_m^4} + \frac{25}{(\alpha_m^2 + 4 \beta_n^2)^2} + \frac{64}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \right]$$

$$A_{31} = \frac{1}{16} \left[\frac{9}{\beta_n^4} + \frac{25}{(4 \alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} + \frac{64}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \right]$$

$$A_{22} = \frac{1}{16} \left[\frac{272}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} + \frac{625}{(\alpha_m^2 + 4 \beta_n^2)^2} + \frac{625}{(4 \alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \right]$$

Iterando all'infinito il procedimento si trova pertanto quale soluzione di seconda approssimazione del sistema di equazioni (3):

$$w(xy) = w_{11} \operatorname{sen} \alpha_m x \operatorname{sen} \beta_n y + \\ + w_{13} \operatorname{sen} \alpha_m x \operatorname{sen} 3 \beta_n y + w_{31} \operatorname{sen} 3 \alpha_m x \operatorname{sen} \beta_n y$$

$$(39) \quad F(xy) = -\frac{1}{2} (p_y x^2 + p_x y^2) +$$

$$+ E \alpha_m^2 \beta_n^2 \sum_{i=0}^3 \sum_{k=0}^3 a_{ik} \cos 2i \alpha_m x \cos 2k \beta_n y$$

essendo i coefficienti a_{ik} desumibili dalla tabella precedente in funzione di w_{11} , w_{13} , w_{31} e questi ultimi quali soluzioni del sistema di equazioni cubiche omogenee:

$$A_{00} w_{11}^3 + A_{01} w_{11}^2 w_{13} + A_{10} w_{11}^2 w_{31} + A_{02} w_{11} w_{13}^2 + 2 A_{11} w_{11} w_{13} w_{31} +$$

$$+ A_{20} w_{11} w_{31}^2 - A_{12} w_{13}^2 w_{31} - A_{21} w_{13} w_{31}^2 - \frac{\lambda_{11} - 1}{\gamma_{11}} w_{11} = 0;$$

$$A_{01} w_{11}^3 - A_{02} w_{11}^2 w_{13} - A_{11} w_{11}^2 w_{31} + 2 A_{12} w_{11} w_{13} w_{31} + A_{21} w_{11} w_{31}^2 +$$

$$- A_{04} w_{13}^3 - A_{22} w_{13} w_{31}^2 - \frac{1 - \lambda_{13}}{\gamma_{13}} w_{13} = 0;$$

$$(40) \quad A_{10} w_{11}^3 - A_{20} w_{11}^2 w_{31} - A_{11} w_{11}^2 w_{13} + 2 A_{21} w_{11} w_{13} w_{31} + A_{12} w_{11} w_{13}^2 +$$

$$- A_{40} w_{31}^3 - A_{22} w_{31} w_{13}^2 - \frac{1 - \lambda_{31}}{\gamma_{31}} w_{31} = 0.$$

Si osserva infine che essendosi nell'espressione (39), come già detto, trascurate ulteriori onde di deformazione del tipo:

$$(41) \quad w''(xy) = w_{15} \sin \alpha_m x \sin 5 \beta_n y + w_{33} \sin 3 \alpha_m x \sin 3 \beta_n y + \dots$$

si potrebbe affinare ulteriormente il procedimento assumendo quale espressione della deformata iniziale, un'espressione più completa che tenesse conto anche dei termini (41), tuttavia si nota che per i fini tecnici è generalmente già sufficiente il risultato ottenibile con la semplice teoria di prima approssimazione; che peraltro ha il vantaggio di fornire risultati immediati esenti dalla complicazione derivante dalla soluzione di sistemi non lineari del tipo (40).

Si sviluppa nel seguito un esempio pratico, eseguendo infine un confronto tra i risultati di prima e di seconda approssimazione.

* * *

Con riferimento alla piastra quadrata caricata simmetricamente sui bordi $x = a$ e $y = a$ (fig. 2) si ha, com'è noto, per la deformata di equilibrio indifferente:

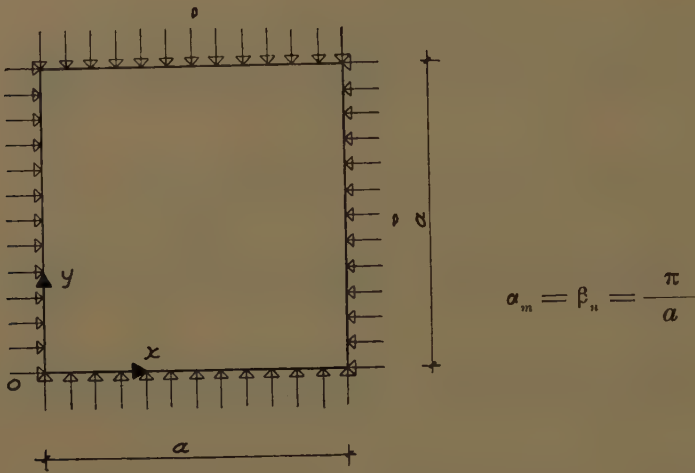


Fig. 2.

e quindi:

$$w = w_{11} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{a}.$$

A tale deformata corrisponde come valore della pressione critica:

$$p_c = 2 \pi^2 \frac{D}{a^2}.$$

Riferendosi alla soluzione di prima approssimazione, si calcolano con le (24) i seguenti coefficienti caratteristici:

$$\lambda_{11} = \frac{p}{p_c} \quad k_{11} = \frac{E h}{32 D}$$

e pertanto dalla (27):

$$(42) \quad w_{11} = \pm \sqrt{\frac{32 D}{E h} (\lambda_{11} - 1)}$$

Tenendo presente l'espressione della rigidezza flessionale:

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

la (42) può porsi nella forma:

$$(43) \quad w_{11} = \pm \beta_{11} \frac{h}{\sqrt{1 - \nu^2}}$$

essendo β_{11} un coefficiente adimensionale variabile in funzione del moltiplicatore λ_{11} secondo l'espressione:

$$(44) \quad \beta_{11} = \sqrt{\frac{8}{3} (\lambda_{11} - 1)}$$

In figura 3 è riportato l'andamento di tale coefficiente in funzione di λ_{11} .

Nei limiti di prima approssimazione le (43) forniscono pertanto i coefficienti della deformata elastica corrispondente alla prima diramazione stabile della curva carichi-spostamenti.

Applicando la teoria di seconda approssimazione si assume, tenendo conto della particolare simmetria strutturale e di carico, quale espressione per la deformata elastica:

$$w(xy) = w_{11} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{a} + \\ + w_{13} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{3\pi y}{a} + \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{a} \right)$$

Il calcolo dei coefficienti w_{11} e w_{13} procede dallo sviluppo del sistema d'equazioni cubiche (40) che in questo particolare caso assume la forma:

$$w_{11}^3 + w_{11}^2 w_{13} + 21,04 w_{11} w_{13}^2 - 26 w_{13}^3 - \frac{8}{3} h^2 \frac{\lambda_{11} - 1}{1 - \nu^2} w_{11} = 0 \\ (45) \quad w_{11}^3 - 21,04 w_{11}^2 w_{13} + 78 w_{11} w_{13}^2 - 200 w_{13}^3 + \\ + \frac{400}{15} h^2 \frac{\lambda_{11} - 5}{1 - \nu^2} w_{13} = 0.$$

Tale sistema per $\lambda_{11} < 1$ ammette come unica soluzione reale: $w_{11} =$

$w_{13} = 0$ (46), mentre per $1 < \lambda_{11} < 5$ ammette oltre alla (46) le due soluzioni simmetriche:

$$(47) \quad \begin{aligned} w_{11} &= \pm \bar{\beta}_{11} \frac{h}{\sqrt{1 - v^2}} \\ w_{13} &= \pm \bar{\beta}_{13} \frac{h}{\sqrt{1 - v^2}} \end{aligned}$$

corrispondenti alla prima diramazione stabile della curva carichi-spostamenti.

Infine per $\lambda_{11} > 5$ si trova come soluzione reale, oltre alla (46) e (47) un'ulteriore soluzione simmetrica del tipo:

$$(48) \quad \begin{aligned} w_{11} &= \pm \bar{\gamma}_{11} \frac{h}{\sqrt{1 - v^2}} \\ w_{13} &= \pm \bar{\gamma}_{13} \frac{h}{\sqrt{1 - v^2}} \end{aligned}$$

corrispondente alla seconda diramazione stabile della curva carichi-spostamenti.

Tale ulteriore configurazione di equilibrio non può tuttavia essere assunta spontaneamente dalla piastra appena λ_{11} diventi maggiore dell'unità, bensì è necessario vincolare la piastra in maniera tale che sino ai valori dei carichi esterni per i quali risulti $\lambda_{11} < 5$ essa conservi la sua configurazione indeformata piana, ed indi svincolarla in maniera che essa possa spontaneamente assumerla.

In fig. 3 sono rappresentati gli andamenti dei coefficienti adimensionali $(\bar{\beta}_{11}, \bar{\beta}_{13})$ e $(\bar{\gamma}_{11}, \bar{\gamma}_{13})$ in funzione di λ_{11} .

Da un esame sommario dell'andamento di tali diagrammi appare evidente come per la prima diramazione stabile della curva carichi-spostamenti e per λ_{11} variabile tra 1 e 7, vi sia un minimo scarto tra i valori di $\bar{\beta}_{11}$ e $\bar{\beta}_{11}$ calcolati rispettivamente con la teoria di prima e di seconda approssimazione, mentre, per quanto riguarda il coefficiente $\bar{\beta}_{13}$, che esso risulta di entità molto ridotta rispetto a $\bar{\beta}_{11}$.

Resta così confermata la pratica applicabilità della soluzione di prima approssimazione entro un campo piuttosto vasto di variabilità dei carichi esterni essendo in tal campo l'errore percentuale contenuto in limiti molto modesti.

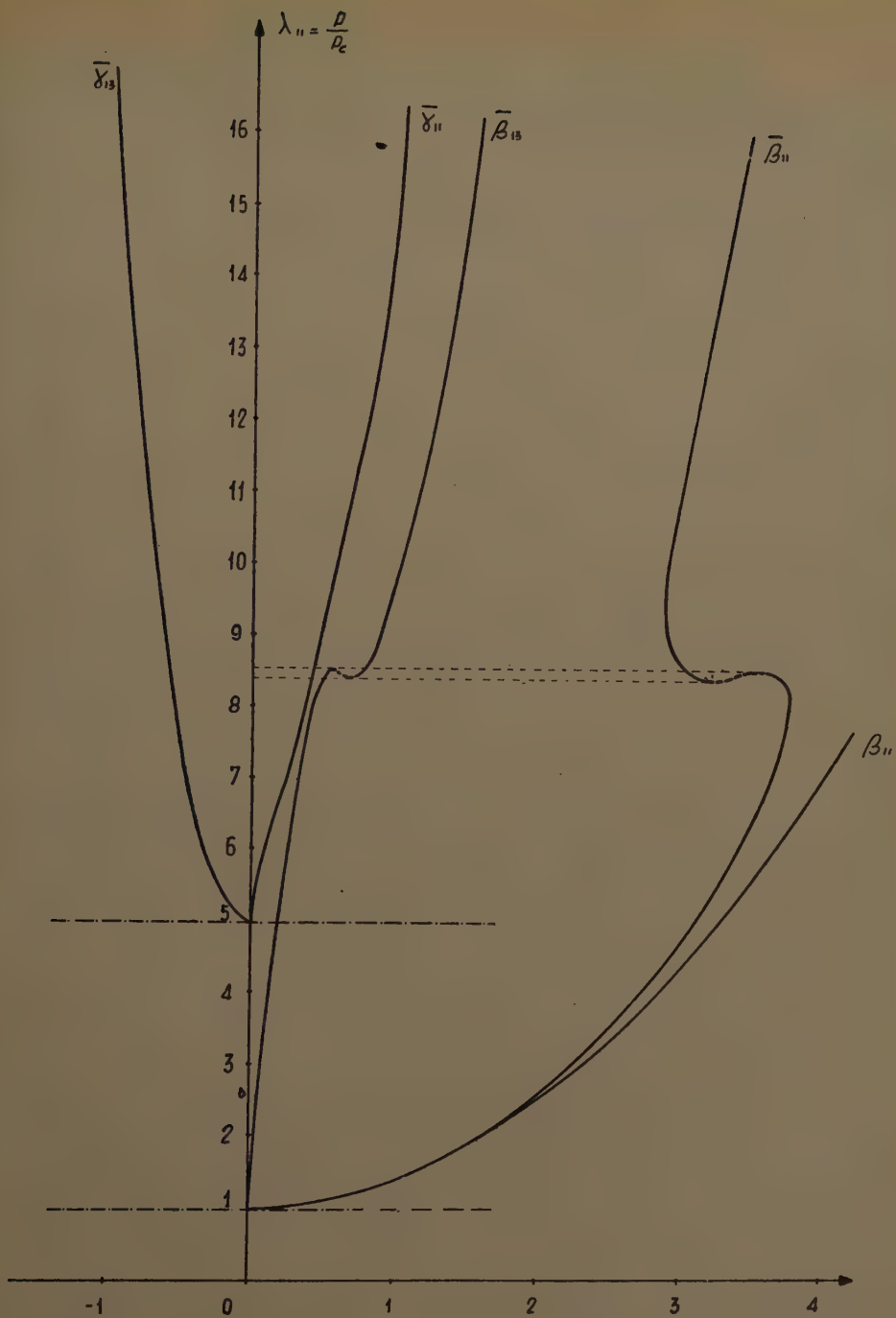


Fig. 3.

Si ritiene infine utile far notare la singolarità riscontrata nella prima curva di diramazione relativa alla teoria di seconda approssimazione, nell'intorno del punto di ordinata $\lambda_{11} = 8,5$. Su tale singolarità derivante dalla soluzione del sistema (45) si conta di poter riferire quanto prima in una prossima memoria.

Istituto di Tecnica delle Costruzioni - Napoli, ottobre 1961.

BIBLIOGRAFIA

- TIMOSHENKO-GERE. « *Theory of elastic stability* ». Mc Graw Hill Book Company, New York 1961.
- BLEICH. « *Buckling strength of metal structures* ». Mc Graw Hill Book Company, New York 1952.
- T. RENZULLI. « *La linea elastica al di là del carico critico* ». Rend. Accademia Scienze, Fisiche e Matematiche di Napoli, Vol. XXVII, 1960.

RIASSUNTO. — Premesse alcune considerazioni di carattere generale sulla flessione delle piastre sottili in presenza di carichi assiali, si studia in particolare il caso della piastra rettangolare appoggiata.

Lo studio viene condotto avvalendosi di un metodo iterativo che consente di dosare l'approssimazione dei risultati, per i quali, arrestandosi già alla prima approssimazione, si ritrovano quelli ottenuti dal MARCUFRRE per via energetica.

Si svolge infine un confronto fra i risultati di prima e di seconda approssimazione relativamente al caso della piastra quadrata.

SUMMARY. — Starting from some general considerations on bending of thin plates in the presence of axial loads, the case of a rectangular edge-supported plate is examined

The study is made by means of an iteration method which allows to evaluate the pertinent approximations. It is shown that the present results coincide, already to within the first approximation, with those found by MARCUERRE who used an energetic approach.

A comparison is made between results from first and second approximations for the case of square plate.

Ricerche sulla zeolitizzazione dei vetri vulcanici per trattamento idrotermale.

Nota X. Zeolitizzazione di ossidiane leucititiche artificiali.

Nota del prof. Riccardo Sersale
presentata dal socio ordinario G. Malquori

(Adunanza del dì 3 giugno 1961)

L'ossidiana *leucitica* — le cui modificazioni strutturali e costituzionali conseguibili per via idrotermale, in appropriate condizioni, costituiscono oggetto di questa nota — completa e chiude la serie di vetri vulcanici di differente tipo chimico, sulla quale ho sperimentato con lo scopo di valutare gli effetti provocati dalle azioni idrotermali alle quali ho sottoposto i suddetti vetri e di sottolineare le differenze di comportamento fra i singoli termini della serie, tutti cimentati in condizioni normalizzate¹⁾.

Nella suddetta serie di vetri vulcanici, l'ossidiana in oggetto — la quale viene a collocarsi fra i termini ricavati per fusione e tempra di rocce francamente alcaline e che, fra detti termini, rappresenta quello più basilico di tutti — è preceduta dall'ossidiana *leucotefritica*²⁾, la quale, a sua volta, è preceduta dall'ossidiana *leuco-fonolitica*³⁾. Quest'ultima è la meno basilica.

Com'è noto⁴⁾, con il nome di *leucititi* vengono indicate quelle rocce

¹⁾ SERSALE R. *Ricerche sulla zeolitizzazione dei vetri vulcanici per trattamento idrotermale*. Nota I. *Herschelite da vetro ricavato attraverso la fusione di roccia eminentemente sanidinica*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., [4], XXVI, pp. 15-21. Napoli, 1959. - Nota II. *Zeolitizzazione di ossidiane leucotefritiche artificiali*. Ibidem, [4], XXVI, pp. 154-166. Napoli, 1959. - Nota III. *Analcimizzazione di ossidiane basaltiche artificiali*. Ibidem, [4], XXVI, pp. 333-344. Napoli, 1959. - Nota IV. *Analcimizzazione di materiali piroclastici, alcalitrichitici*. Ibidem, [4], XXVI, pp. 345-354. Napoli, 1959. - Nota V. *Analcimizzazione di un'ossidiana artificiale, ricavata attraverso la fusione dell'häüynofiro di Melfi*. Ibidem, [4], XXVI, pp. 394-404. Napoli, 1959. - Nota VI. *Zeolitizzazione delle pomici e delle « pozzolane » del Vesuvio*. Ibidem, [4], XXVI, pp. 423-440. Napoli, 1959. - Nota VII. *Analcimizzazione di ossidiane riolitiche*. Ibidem, [4], XXVII, pp. 595-609. Napoli, 1960. - Nota VIII. *Zeolitizzazione di ossidiane trachi-andesitiche artificiali*. Ibidem, [4], XXVIII, pp. 171-186. Napoli, 1961. - Nota IX. *Zeolitizzazione di ossidiane leuco-fonolitiche artificiali*. Ibidem, [4], XXVIII, pp. 199-212. Napoli, 1961.

²⁾ SERSALE R. L. c. a nota ¹⁾, Nota II.

³⁾ SERSALE R. L. c. a nota ¹⁾, Nota IX.

⁴⁾ ARTINI E. *Le Rocce*, pag. 449. Milano, Hoepli, 1959.

caratterizzate dall'associazione della leucite con il pirosseno, i quali due minerali sono appunto i componenti essenziali di tali rocce. Chimicamente le *leucititi* risultano perciò caratterizzate da una notevole basicità, con uguale abbondanza tanto di ossidi: di calcio, di magnesio e di ferro, quanto di alcali. Fra questi ultimi, com'è naturale, predomina la potassa.

Pertanto, nella serie di vetri vulcanici alla quale ho fatto riferimento, i termini più prossimi all'ossidiana in istudio — quelli, cioè, ai quali più frequentemente mi rifarò per segnalare le analogie o le differenze di comportamento riscontrate — sono: il vetro *leucotefritico* e quello *nefelin-leucititico* ⁵⁾, il primo, ottenuto per fusione e tempra di una roccia mineralogicamente caratterizzata dall'associazione della leucite con il plagioclasio e con il pirosseno, ed il secondo, per identico trattamento eseguito a partire da una roccia che rappresenta un tipo misto di tefrite leucitico-nefelinica.

Poichè nelle mie precedenti ricerche ho avuto modo di constatare che, a parità di condizioni e con riferimento a termini zeolitici diversi dall'*analcime*, l'attitudine alla zeolitizzazione dei vetri diminuisce al crescere della loro basicità ⁶⁾, ho creduto doveroso fornire anche la documentazione del comportamento alla zeolitizzazione del vetro *leucititico* che, come più sopra ho specificato, nella serie di vetri studiata rappresenta il termine più basico di tutti.

• • •

Per la preparazione dell'ossidiana corrispondente secondo la medesima tecnica adoperata e descritta in precedenti note ⁶⁾, ho scelto una tipica *leucite* laziale: il « selce » romano, un campione del quale, insieme con il Prof. SCHERILLO, ho collezionato nella cava di Rocca Priora (cerchia vulcanica Tuscolo-Artemisio).

L'analisi chimica relativa al suddetto campione di *leucite* è riportata nella tab. I insieme con quella del medesimo campione dopo trattamento di fusione e rapida tempra, trattamento che ha consentito di ottenere il prodotto vetroso necessario alla sperimentazione.

(^o) Con esclusione, però, dei termini ad assai elevato grado d'acidità, quali ad esempio, nella serie studiata, il vetro *riolitico*, il quale in ambiente potassico non risultò zeolitizzabile, stante la sua tendenza a cristallizzare ad ortoclasio.

⁵⁾ SERSALE R. L. c. a nota ¹⁾, Nota V.

⁶⁾ SERSALE R. L. c. a nota ¹⁾.

TABELLA I.

(percentuale sul secco a 105°C).

	<i>Leucitite</i> di Rocca Priora.	Ossidiana (per fusione e tempra della <i>leucitite</i>).
SiO ₂	45,53	45,97
Al ₂ O ₃ (+ TiO ₂ + Mn ₃ O ₄)	16,52	17,40
Fe ₂ O ₃	6,60	2,80
FeO	3,07	6,89
CaO	12,37	11,60
MgO	5,35	4,87
K ₂ O	8,32	8,23
Na ₂ O	2,12	2,09
CO ₂	tr.	ass.
H ₂ O ⁺	0,41	0,43
	<hr/> 100,29	<hr/> 100,28
		(cfr. tav. II, n° 1).

L'esame della tab. I consente di rilevare che la composizione chimica del campione di *leucitite* prescelto è conforme a quella che la letteratura riporta per tali rocce ⁷⁾.

In accordo con quanto sopra risultano altresì le osservazioni microscopiche, eseguite su sezioni sottili della roccia in esame con lo scopo di controllare esattamente anche la sua costituzione mineralogica. Come infatti mostra la tav. I, all'esame ottico risaltano chiaramente i due costituenti principali; la *leucite*: in cristalli nella pasta fondamentale (microfotografia n. 1), attraversata da vene di calcite (microfotografia n. 2), in fenocristalli (microfotografie n.ri 3 e 4), nonchè il *pirosseno*, in fenocristalli (microfotografia n. 5). Fra i costituenti accessori: la *mica* (biotite), microfotografia n. 6.

Conosciuta la composizione chimica della roccia di partenza e qualificato il campione in base alla sua costituzione mineralogica, si è proceduto

⁷⁾ ARTINI E. L. c. a nota ⁴⁾, pag. 451.

all'ottenimento della corrispondente ossidiana così come è stato fatto per gli altri termini della serie di vetri preparata e, per precisare, mediante trattamento di fusione, seguito da rapida tempra, in acqua, del fuso.

Il granulato così ottenuto, dopo essiccazione e macinazione è stato anch'esso sottoposto ad analisi chimica ed i dati ottenuti compaiono in tab. I, accanto a quelli relativi alla roccia tal quale.

Il raffronto dei dati in tab. I consente di asserire che, nei limiti degli errori sperimentali, non si è, come sempre, verificata apprezzabile variazione di composizione chimica per effetto del trattamento eseguito.

In conformità di quanto ogni volta sottolineato, per effetto dell'ambiente riducente del forno fusorio il ferro presente nella roccia di partenza, in forma prevalentemente ferrica, si trova nel vetro di arrivo, maggiormente in forma ferrosa.

Una volta preparato il vetro *leucititico*, si è dato inizio ai trattamenti idrotermali nelle condizioni fisiche ed ambientali prescelte per l'intera serie di vetri studiati. Si è dapprima lavorato in presenza di soluzione diluita d'idrossido di potassio, in condizioni fisiche moderate e successivamente più severe, ed in un secondo tempo si sono ripetute le esperienze sostituendo la soluzione d'idrossido di potassio con quella di idrossido di sodio della stessa concentrazione.

Si sono altresì eseguite delle prove variando la concentrazione della soluzione di contatto.

I solidi ricavati con le diverse esperienze eseguite si sono sottoposti alle varie indagini, le quali hanno consentito di valutare le modificazioni strutturali e costituzionali prodottesi ad opera dei differenti trattamenti effettuati.

Dei risultati ottenuti e delle relative conclusioni riferisco nel corso di questa nota.

• • •

La tab. II dà conto delle variazioni di composizione chimica prodotte nel vetro di partenza ad opera dei trattamenti idrotermali in ambiente potassico.

Si noti il discreto quantitativo di acqua stabilmente fissata dal vetro *leucititico* a seguito dei trattamenti subiti, con conseguente calo, in particolare, dei titoli: di silice e di allumina.

Ai solidi di cui alle analisi in tab. II corrispondono i roentgenogrammi in tav. II ed in fig. 1.

Il solido ottenuto per trattamento idrotermale in condizioni fisiche moderate ($p = \sim 30 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 235^\circ\text{C}$), ha fornito uno spettrogramma (n. 3, tav. II) con righe di assai bassa intensità che, come mostra la tab. III nella quale compaiono i soli dati relativi alle tre righe principali, sono attribuibili allo spettro della *cabasite* (n. 2, tav. II).

TABELLA II.

Ossidiana *leucititica*, sottoposta a trattamento idrotermale in presenza di soluzione di KOH all'1%.

(percentuale sul secco a 105°C).

	p = 30 Kg/cm ² ; t = 235°C.	p = 120 Kg/cm ² ; t = 330°C.	p = 200 Kg/cm ² ; t = 375°C.
SiO ₂	44,66	43,59	43,81
Al ₂ O ₃ (+ TiO ₂ + Mn ₃ O ₄)	15,44	14,71	14,28
Fe ₂ O ₃	4,12	4,36	3,83
FeO	4,73	4,53	5,12
CaO	11,11	11,70	11,63
MgO	5,51	5,34	5,83
K ₂ O	7,20	8,49	8,43
Na ₂ O	1,34	1,73	1,42
H ₂ O ⁺	6,17	4,57	4,89
	100,28	99,02	99,24
	(cfr. tav. II, n° 3; fig. 2, n° 1).	(cfr. fig. 1, (B)).	(cfr. tav. II, n° 5; fig. 2, n° 2).

Nelle stesse condizioni ambientali, un incremento della pressione e della temperatura del trattamento idrotermale — contenuto, però, in limiti presumibilmente ancora compatibili con il decorso del processo di zeolitizzazione e perciò regolato su valori pari a 30 Kg/cm² e 280°C — nell'intento di favorire l'evoluzione del vetro originario verso l'assetto strutturale della *cabasite*, si è, al contrario, rivelato fattore negativo in tale senso. Come infatti mostra lo spettrogramma n. 4 della tav. II, ottenuto appunto nelle condizioni fisiche ora precisate e sempre adoperando come liquido di contatto la soluzione di KOH all'1%, le righe, debolissime, relative allo spettro della *cabasite* sono ora riconoscibili solo con difficoltà, fra diverse altre righe, alcune delle quali appartengono allo spettro della *leucite*. Lo spettrogramma n. 4 della tav. II mostra infatti sensibili analogie con il diffrattogramma (B) della fig. 1, ottenuto dal solido di cui all'analisi in tab. II, seconda colonna, e perciò nelle stesse condizioni ambientali di cui precedentemente, ma a pressione e temperatura ancora più elevate (120 Kg/cm²; 330°C). Come

può rilevarsi dall'esame della fig. 1 e come è stato accertato mediante computo, le linee più intense del diffrattogramma (B) appartengono agli spettri: della *leucite* (A) e della *kaliophilite* (D).

TABELLA III.

Cabasite (Rubendörfel).		Solido di cui allo spettrogr.: n° 3, tav. II.	
Intensità	d in Å	Intensità	d in Å
mf	9,49	d	9,49
f	4,32	d	4,32
ff	2,92	d	2,92

ff = fortissima; f = forte; mf = media forte; d = debole.

Un ulteriore incremento delle condizioni fisiche del trattamento idrotermale non comporta nuove evoluzioni dell'assetto strutturale precedentemente raggiunto dal vetro originario, cosicchè lo spettrogramma n. 5 in tav. II — relativo al solido di cui all'analisi in tab. II, terza colonna, ottenuto per trattamento idrotermale alla pressione di circa 200 Kg/cm² ed alla temperatura di circa 375°C, a partire dal vetro in istudio — consente di riconoscere ancora le righe della *leucite* (n. 6, tav. II), nonchè quelle della *kaliophilite* (n. 9, tav. II), (cfr. tab. IV).

La notevole tendenza alla cristallizzazione della *kaliophilite*, accanto alla *leucite*, per trattamento idrotermale in ambiente debolmente potassico ed in condizioni fisiche non eccessivamente moderate del vetro in istudio, può porsi in relazione con il suo, piuttosto basso, contenuto di silice. Tale povertà di silice si rivela elemento favorevole alla cristallizzazione di quello tra i silicati di potassio che ne contiene in minor misura.

Ho creduto interessante, a tale proposito, cercare di precisare le condizioni nelle quali può provocarsi una più compiuta cristallizzazione a *kaliophilite* del vetro originario, a scapito di quella a *leucite*.

Poichè il rapporto ponderale teorico SiO₂/K₂O è notevolmente minore nella *kaliophilite* (1,27) di quanto non sia nella *leucite* (2,56), nell'intento di favorire la fissazione del potassio da parte del vetro originario, ho notevolmente innalzata la concentrazione della soluzione di contatto impiegata nei trattamenti idrotermali eseguiti ed ho pertanto lavorato con soluzione di KOH 2N. Ho effettuate esperienze tanto a moderate, quanto ad elevate pressioni e temperature ed ho riscontrato che in condizioni fisiche severe

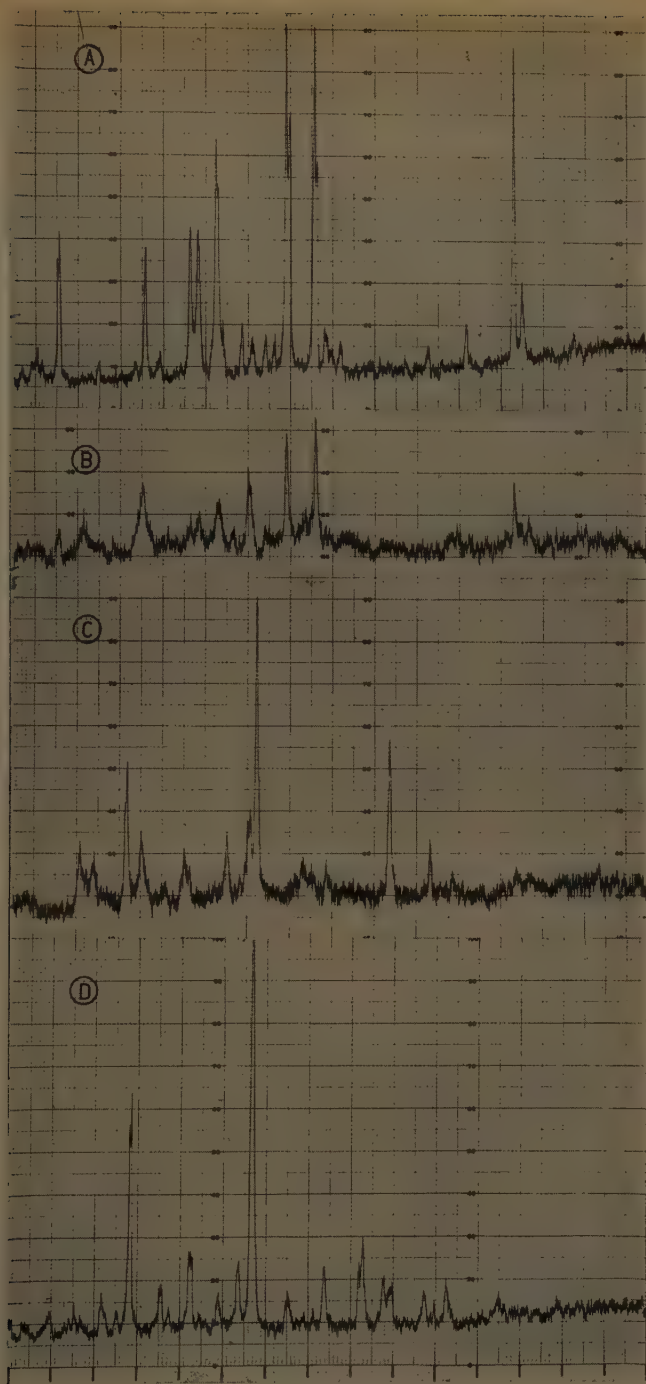


Fig. 1. — Radiazione Cu K α .
Zona compresa fra 5 e 20° Θ .

- (A) Leucite (Vesuvio).
- (B) Solido di cui all'analisi in tab. II, seconda colonna.
- (C) Solido di cui all'analisi in tab. V.
- (D) Kaliophilite (Vesuvio).

TABELLA IV.

Leucite (Vesuvio)		Ossidiana dalla leucite dopo tratt. idrot. a $p = \sim 200$ Kg/cm ² ; $t = \sim 375^{\circ}\text{C}$, in presenza di sol. KOH 1%.		Ossidiana dalla leucite dopo tratt. idrot. a $p = \sim 200$ Kg/cm ² ; $t = \sim 375^{\circ}\text{C}$, in presenza di sol. KOH 2N.		Kaliophilite (Vesuvio)	
Intensità	d in Å	Intensità	d in Å	Intensità	d in Å	Intensità	d in Å
		mf	11,46	mf	11,51		
f	5,37	m	5,38				
				mf	3,98	m	3,93
f	3,43	f	3,42	md	3,46	m	3,43
ff	3,26	mf	3,26				
		mf	3,06	ff	3,10	ff	3,09
mf	2,93	m	2,92				
mf	2,83	md	2,82				
m	2,64	m	2,60	m	2,60	f	2,58
m	2,36	m	2,39				
				d	2,17	m	2,13
m	1,66	d	1,62	d	1,65	m	1,64
				d	1,57	m	1,57
		mf	1,53				

ff = fortissima; f = forte; mf = media forte; m = media; md = media debole; d = debole.

si riesce a spostare la reazione idrotermale nel senso della formazione di *kaliophilite*.

Lo spettrogramma n. 7 in tav. II si riferisce al solido ottenuto per trattamento idrotermale del vetro in istudio in condizioni fisiche estremamente moderate ($p = \sim 15$ Kg/cm²; $t = \sim 196^{\circ}\text{C}$) ed in presenza di soluzione 2N di KOH. Il computo delle righe di detto spettrogramma ha mostrato che esse sono ancora attribuibili alla *leucite* ed alla *kaliophilite*. Pertanto, il notevole incremento della concentrazione della soluzione di contatto ha cospicuamente ridotti i valori di pressione e temperatura sotto i quali il trattamento idrotermale del vetro *leucititico* provoca la sua cristallizzazione a *leucite* e *kaliophilite*.

L'incremento non soltanto della concentrazione della soluzione di contatto, come era fatto, ma anche delle condizioni fisiche che regolano il trattamento idrotermale, come mostra lo spettrogramma n. 8 in tav. II ed il diffrattogramma (C) in fig. 1 — entrambi ottenuti dal vetro in istudio per trattamento idrotermale alla pressione di $\sim 200 \text{ Kg/cm}^2$ ed alla temperatura di $\sim 375^\circ\text{C}$, in presenza di soluzione 2N di KOH, — provoca la scomparsa delle linee della leucite, con conseguente agevole riconoscimento di quelle relative alla *kaliophilite* (cfr. tab. IV). Nel diffrattogramma in parola (C) della fig. 1) è altresì riconoscibile un riflesso a $3,98 \text{ \AA}$ che con tutta probabilità coincide con quello segnalato dalla letteratura a $3,99 \text{ \AA}$ per la *kaliophilite* sintetica⁸⁾.

In tab. V riporto l'analisi chimica relativa al solido di cui ai roentgenogrammi ora discussi (n. 4 della tav. II; (C) della fig. 1). Da segnalare rispetto alle analisi in tab. II il leggero calo del titolo di silice e l'aumento di quello di potassa.

TABELLA V.

Ossidiana *leucitica* sottoposta a trattamento idrotermale
a $p = \sim 200 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 375^\circ\text{C}$, in presenza di soluzione di KOH 2N.

(percentuale sul secco a 105°C).

SiO_2	41,39
Al_2O_3 (+ TiO_2 + Mn_2O_3)	16,81
Fe_2O_3	3,64
FeO	4,82
MgO	5,21
CaO	11,62
K_2O	10,76
Na_2O	0,88
H_2O^+	4,06
	<hr/>
	99,19

(cfr. fig. 1, (C)).

Ritengo opportuno ricordare a questo punto che la *kaliophilite* — la quale, allo stato puro, si prepara soltanto con difficoltà, stante il suo alto punto di fusione (1800°C) e la conseguente volatilizzazione del potassio, — è stata invece agevolmente sintetizzata per via idrotermale⁹⁾.

⁸⁾ BARRER R. M., LINDS L., WHITE E. A. L. c. a nota ⁹⁾, pag. 1473.

⁹⁾ EITEL W. *The physical chemistry of the silicates*. The University of Chicago Press; pag. 708. Chicago, 1954.

— BARRER R. M., LINDS L., WHITE E. A. *The hydrothermal chemistry of the silicates*. III. *Reactions of analcite and leucite*. J. Chem. Soc., pp. 1466-1475. London, 1953.

A conferma di quanto precedentemente ho esposto in riguardo alla zeolitizzazione a *cabasite* del vetro *leucititico* (cfr. tab. II, prima colonna, e tav. II, n. 3), riporto in fig. 2 il diagramma perdita di peso/temperatura relativo al solido ottenuto sottoponendo il vetro in istudio a trattamento idrotermale, in presenza di soluzione d'idrossido di potassio all'1%, nelle seguenti condizioni fisiche: $p = \sim 30 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 235^\circ\text{C}$. Il diagramma n. 1 della fig. 2, che denuncia una disidratazione ad andamento uniforme, è del tipo di quelli forniti dai minerali zeolitici.

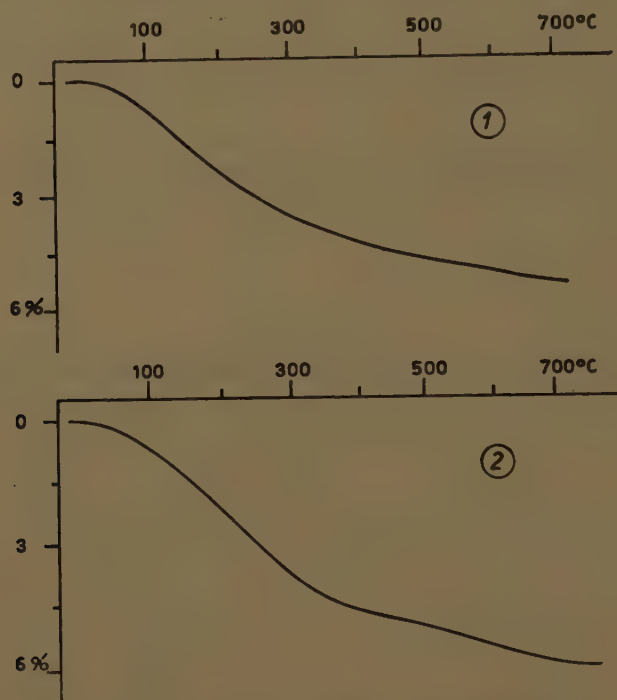


Fig. 2. — Diagrammi perdita di peso/temperatura.

- (1) Solido di cui all'analisi in tab. II, prima colonna.
- (2) Solido di cui all'analisi in tab. II, terza colonna.

Riporto, nella stessa fig. 2, anche il diagramma perdita di peso/temperatura relativo al solido derivante dal trattamento eseguito nelle stesse condizioni ambientali, ma a pressione e temperatura assai più alta ($p = \sim 200 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 375^\circ\text{C}$), solido il cui spettrogramma ha denunciato la presenza delle righe della *leucite* e della *kaliophilite*. Detto solido, come tutti quelli che derivano da trattamenti idrotermali, anche in condizioni fisiche piuttosto severe, trattiene un modesto quantitativo di acqua, la quale viene espulsa per riscaldamento a temperatura superiore ai 110°C . Pur escludendo, sulla base dei risultati del complesso delle ricerche effettuate, che possa

trattarsi di acqua « zeolitica », non ho mai dato soverchia importanza alla cosa per ragioni di due ordini: perchè è noto, ad esempio, che anche molti vetri naturali contengono un discreto quantitativo d'acqua ¹⁰⁾, che perdono al disopra di 110°C con andamento del tutto regolare, e perchè al diagramma di disidratazione termica dei solidi ottenuti dai vari trattamenti idrotermali di zeolitizzazione, ho sempre attribuito valore di indagine complementare.

Faccio però risultare che il primo tratto, più ripido, della curva di disidratazione termica dei solidi derivanti da trattamenti idrotermali che provocano zeolitizzazione del materiale, è contenuto, di solito, in un più ampio intervallo di temperatura.

In tab. VI compaiono, infine, i dati delle prove di valutazione della capacità di scambio basico, eseguite sui solidi di cui alle analisi in tab. II, ed in fig. 3 la relativa rappresentazione grafica dei risultati ottenuti. Può constatarsi che il solido derivante dal trattamento idrotermale in condizioni fisiche moderate ($p = \sim 30 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 235^\circ\text{C}$) ed adoperando come liquido di contatto la soluzione all'1% di KOH — solido che ha fornito uno spettrogramma con linee di bassa intensità, attribuite allo spettro della *cabasite* — manifesta, conforme all'aspettativa, una discreta capacità di scambio basico, capacità che, in ogni caso, è maggiore di quella rilevata per il solido ottenuto per trattamento idrotermale in più severe condizioni fisiche. La maggiore attività di scambio si registra per parte dello ione calcio, in armonia con il termine zeolitico individuato per via roentgenografica (la *cabasite*: $\text{CaAl}_2(\text{SiO}_3)_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$).

* * *

I risultati della prima parte della sperimentazione, quella, cioè, relativa ai trattamenti in ambiente potassico, pongono in risalto che, in tale ambiente, l'attitudine alla zeolitizzazione che il vetro *leucititico*, nelle condizioni sperimentali prescelte e normalizzate, manifesta, è ancor minore di quella riscontrata per il vetro *leucotefritico*. Questa constatazione si accorda e conferma quanto più sopra è stato ricordato e cioè che, a partire dal vetro *alcali-trachitico*, l'attitudine alla zeolitizzazione in ambiente potassico dei termini della serie studiata, decresce al crescere della loro basicità.

La notevole basicità del vetro *leucititico* comporta che, già in condizioni moderate di pressione e di temperatura, esso si riordini, per trattamento idrotermale, a *leucite* e *kaliophilite*, ciò che restringe notevolmente la fascia di temperatura e pressione entro la quale, nelle condizioni sperimentali adottate ed in ambiente potassico, esso risulta zeolitizzabile. Pertanto, dovendosi necessariamente mantenere bassi i valori dei fattori fisici, la reazione di zeolitizzazione decorre assai lentamente.

Le esperienze eseguite hanno altresì segnalato che non è nemmeno pos-

¹⁰⁾ MOREY G. W. *The properties of glass*, pag. 70. New York, 1954.

— EITEL W. *The physical chemistry of the silicates*, L. c. a nota ⁹⁾, pag. 834.

TABELLA VI.

Capacità di scambio basico

(valutata con soluzioni N/10 di cloruro di ammonio o di nitrato d'argento).

	Materiale di partenza	Milliequivalenti rimossi dalla soluz.		Milliequivalenti passati in soluzione			Totale milliequi- valenti scambiati
				K	Na	Ca	
1	Ossidiana leucitica (fusa e temprata).	NH ₄	0,65	0,40	0,30	tr.	0,70
2	La stessa, dopo tratt. idrot. a p=↘30 Kg/cm ² ; t = ↘ 235°C ; sol. KOH 1%.	NH ₄	6,01	1,85	0,20	4,28	6,33
3	n° 1, dopo tratt. idrot. a p=↘ 200 Kg / cm ² ; t = ↘ 375°C; sol. KOH 1%.	NH ₄	3,99	0,91	0,20	3,04	4,15
4	Ossidiana leucitica (fusa e temprata).	Ag	0,57	0,37	0,23	tr.	0,60
5	n° 4, dopo tratt. idrot. a p=↘ 60 Kg / cm ² ; t = ↘ 280°C; sol.NaOH 1%.	Ag	16,70	2,75	9,20	5,14	17,09
6	n° 4, dopo tratt. idrot. a p=↘ 200 Kg / cm ² ; t = ↘ 375°C; sol.NaOH 1%.	Ag	17,20	2,55	9,20	5,70	17,45

sibile agire, in condizioni moderate di pressione e temperatura, sull'altra variabile: concentrazione di potassa della soluzione di contatto, in quanto un tale incremento si dimostra sfavorevole alla zeolitizzazione del vetro originario, diversamente da quanto osservato per altri termini, meno basici, della serie studiata, e favorevole, invece, alla cristallizzazione del vetro leucitico a *leucite* e *kaliophilite*.

A parte quanto è stato or ora esposto a proposito della zeolitizzazione in ambiente potassico, le differenze di comportamento, a parità di condizioni di cimento, fra il vetro *leucitico* ed il termine ad esso più prossimo

nella serie di vetri vulcanici studiata: il vetro *leucotefritico*, risiedono nella più spiccata tendenza da parte del primo a riordinarsi a *leucite* e *kaliophilite*, cosicchè nelle condizioni fisiche sotto le quali il secondo, dopo essersi zeolitizzato, si riordina ad *analcime* e *leucite*, per poi passare anch'esso — per

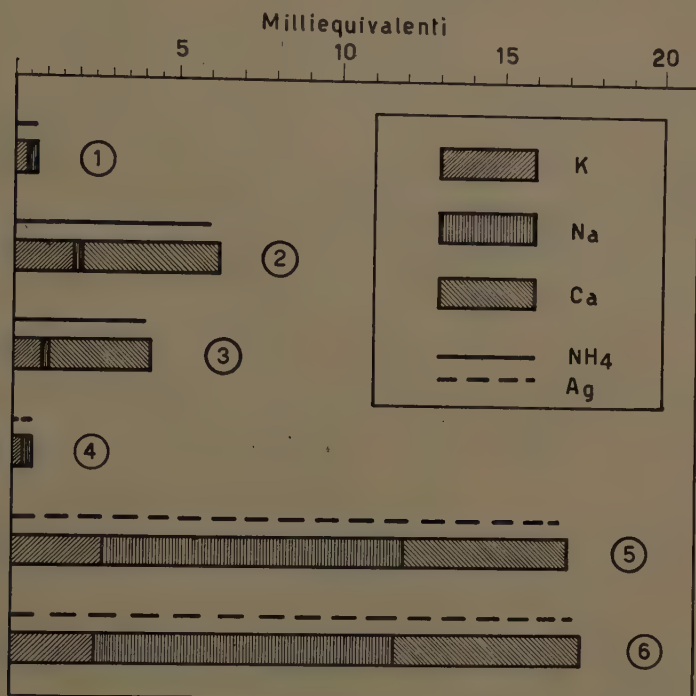


Fig. 3. — Rappresentazione dei risultati delle prove di scambio basico, di cui alla tab. VI.

incremento delle condizioni fisiche del trattamento idrotermale (da $p = \sim 120$ Kg/cm² a $p = \sim 200$ Kg/cm² e da $t = \sim 330^\circ\text{C}$ a $t = \sim 375^\circ\text{C}$) e contemporaneo innalzamento della concentrazione della soluzione potassica di contatto (da soluz. all'1% a soluz. al 3% KOH) — a *leucite* e *kaliophilite*, il primo (vetro *leucititico*) evolve direttamente in quest'ultimo senso, non richiedendo per tale evoluzione nè incremento di fattori fisici, nè innalzamento di concentrazione della soluzione potassica di contatto.

Quanto poi al comportamento dell'altro termine della serie di vetri studiata, a basicità più o meno simile a quella del vetro *leucititico*, ma a tenore e tipo di alcali cospicuamente diverso (più sodico): il vetro *nefelin-leucititico*, la differenza è nettissima in quanto anche in ambiente debolmente potassico (KOH all'1%) — come, a maggior ragione, in quello debolmente sodico — e tanto a moderate, quanto ad elevate pressioni e temperature, il vetro *nefelin-leucititico* risultò, nelle condizioni sperimentali prescelte e normalizzate, soltanto *analcimizzabile*.

Il fatto, infine, di aver ottenuto, a seguito di trattamento di zeolitizzazione, *herschelite* dal vetro *leucotefritico* e *cabasite* da quello *leucititico* non è di rilievo, in quanto si tratta di termini di una stessa serie, poichè, com'è noto, c'è possibilità di parziale sostituzione da parte del calcio di quest'ultimo termine zeolitico con potassio ed anche con sodio: $(Ca, K_2, Na_2) [AlSi_2O_6]_2 \cdot 6H_2O$.

• • •

Passo ora a dar conto delle esperienze effettuate sostituendo la soluzione potassica di contatto, impiegata nei trattamenti finora eseguiti, con soluzione sodica.

Le analisi chimiche dei solidi in tal modo ottenuti compaiono in tab. VII.

TABELLA VII.

Ossidiana *leucititica* sottoposta a trattamento idrotermale in presenza di soluzione di NaOH all'1%.

(percentuale sul secco a 105°C).

	p = \curvearrowright 60 Kg/cm ² ; t = \curvearrowright 280°C.	p = \curvearrowright 200 Kg/cm ² ; t = \curvearrowright 375°C.
SiO ₂	43,46	43,45
Al ₂ O ₃ (+ TiO ₂ + Mn ₂ O ₄)	14,68	14,45
Fe ₂ O ₃	4,48	4,27
FeO	3,74	4,47
MgO	5,15	5,09
CaO	10,84	11,06
K ₂ O	8,12	8,07
Na ₂ O	4,19	4,16
H ₂ O ⁺	6,02	5,24
	100,68	100,26
	(cfr. tav. II, n° 10; fig. 4, n° 3).	(cfr. tav. II, n° 12; fig. 4, n° 4).

Si noti il calo del titolo di silice e di allumina rispetto a quello del vetro non trattato, l'aumento del titolo di sodio e la fissazione di un discreto quantitativo d'acqua. Si noti ancora che il titolo di potassio permane quello del vetro originario.

La disidratazione termica degli stessi solidi avviene, come mostrano i diagrammi riportati in fig. 4, con andamento del tutto regolare, conformemente a quanto sempre osservato.

Le prove di valutazione della capacità di scambio basico — attraverso i risultati forniti, i quali compaiono, accanto a quelli rilevati per i prodotti derivanti dai trattamenti precedentemente eseguiti in ambiente potassico, in tab. VI ed in fig. 3 — denunciano inoltre che, a seguito dei trattamenti idrotermali in ambiente sodico, tanto a moderate, quanto ad elevate pressioni e temperature, i solidi ottenuti hanno acquisito in notevole misura tale capacità. Termine di paragone è sempre il vetro leucititico non trattato.

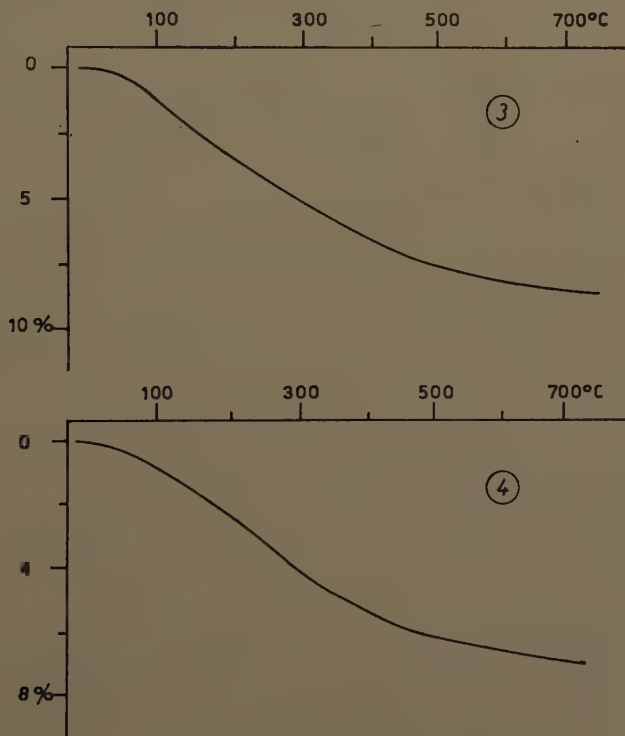


Fig. 4. — Diagrammi perdita di peso/temperatura.

(3) Solido di cui all'analisi in tab. VII, prima colonna.

(4) Solido di cui all'analisi in tab. VII, seconda colonna.

L'indagine roentgenografica eseguita sul solido ottenuto per trattamento idrotermale in condizioni fisiche moderate ($p \approx 60 \text{ Kg/cm}^2$; $t \approx 280^\circ\text{C}$), (cfr. analisi in tab. VII, prima colonna), segnala infine che il vetro originario

evolve verso l'*analcimizzazione* (cfr. spettrogramma n. 10 in tav. II) e che tale assetto strutturale non muta per effetto dell'incremento delle condizioni fisiche che regolano il trattamento, come può dedursi sia dall'esame dello spettrogramma n. 12 in tav. II, relativo al solido ottenuto per trattamento a $p = \sim 200 \text{ Kg/cm}^2$, $t = \sim 375^\circ\text{C}$, la cui composizione chimica è anche riportata in tab. VII, seconda colonna, sia dal confronto dei dati in tab. VIII, relativi alle righe di maggiore intensità presenti nei roentgenogrammi dei solidi a fine esperienza ed in quello dell'analcime (n. 11, tav. II).

TABELLA VIII.

Analcime (Somma Vesuvio)		Ossidiana dalla leucitite, dopo tratt. idrot. a $p = \sim 60$ Kg/cm^2 ; $t = \sim$ 280°C ; sol. NaOH 1%.		Ossidiana dalla leucitite, dopo tratt. idrot. a $p = \sim 200$ Kg/cm^2 ; $t = \sim$ 375°C ; sol. NaOH 1%.		Ossidiana dalla leucitite, dopo tratt. idrot. a $p = \sim 60$ Kg/cm^2 ; $t = \sim$ 280°C ; sol. di con- tatto: acqua.	
		Intensità	d in Å	Intensità	d in Å	Intensità	d in Å
		mf	11,41	mf	11,41	mf	11,41
f	5,60	f	5,60	f	5,62	mf	5,62
mf	3,81	d	3,81	md	3,80	d	3,80
ff	3,42	ff	3,44	ff	3,43	f	3,43
		mf	3,08	mf	3,07	mf	3,06
mf	2,92	mf	2,93	mf	2,92	mf	2,93
		mf	1,54	mf	1,54	mf	1,53

ff = fortissima; f = forte; mf = media forte; m = media debole; d = debole.

I risultati della seconda parte della sperimentazione, conseguiti attraverso le esperienze in ambiente sodico, convergono pertanto nel sottolineare l'identità di comportamento, a parità di condizioni di cimento, fra vetro *leucotefritico* e vetro *leucititico*, com'era, del resto, prevedibile.

La surricordata identità di comportamento permane altresì se si procede al trattamento idrotermale del vetro *leucititico* adoperando quale liquido di contatto la sola acqua.

Come può dedursi dal roentgenogramma relativo al solido ottenuto per trattamento in condizioni moderate di pressione e di temperatura ($p = \sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 280^\circ\text{C}$), anche il vetro *leucititico* evolve lentamente verso l'*analcimizzazione*, per effetto della mobilità degli alcali che in piccola quantità passano nel liquido di contatto. Il roentgenogramma n° 13 in tav. II

reca infatti tutte le righe di maggiore intensità presenti nello spettro dell'alcalime, come può dedursi dal raffronto dei dati riportati in tab. VIII, (cfr. anche fig. 5).

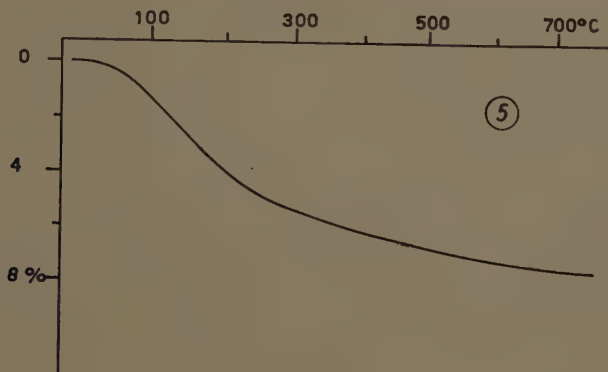


Fig. 5. — Diagramma perdita di peso/temperatura.

(5) Ossidiana *leucitica*, dopo trattamento idrotermale a $p = \sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 280^\circ\text{C}$, liquido di contatto: acqua. — (cfr. tav. II, n° 13).

Permangono tuttavia le stesse riserve che furono fatte a proposito di identico risultato conseguito a partire dal vetro *leucotefritico*¹¹⁾ e che attengono alla possibilità di formazione di *alcime* anche quando si registrino, nel solido, tenori molto bassi di sodio e sensibile preponderanza di potassio.

Ad ogni modo, il problema della chiarificazione delle differenze costituzionali e strutturali, nonché, conseguentemente, di comportamento, fra *alcime* come minerale idrotermale naturale ed i campioni di *alcime* « giovane », ottenuti attraverso i differenti trattamenti idrotermali che sono stati eseguiti sui termini della serie di vetri studiata — i quali campioni non sono, s'intende, *alcime* puro, stante la presenza di alcune righe estranee nei roentgenogrammi, come segnalato — dovrà costituire, data la complessità, argomento di una ricerca a parte.

L'insieme delle risultanze sperimentali converge nell'indicare che la zeolitizzazione in ambiente potassico del vetro *leucitico* sottoposto a trattamento idrotermale, risulta, a parità di condizioni, ancor meno compiuta di quella conseguita a partire dal vetro *leucotefritico*, il quale, nella serie di vetri studiata, rappresenta il termine più prossimo, meno basico, di quello in studio.

In ambiente debolmente potassico (KOH 1%), le condizioni che la sperimentazione ha tuttavia indicate come le più idonee a promuovere il

¹¹⁾ SERSALE R. L.c. a nota ¹⁾. Nota II, pag. 164.

riordinamento a *cabasite* del vetro *leucititico*, sono risultate:

pressione = $\sim 30 \text{ Kg/cm}^2$; temperatura = $\sim 235^\circ\text{C}$.

All'assetto strutturale ora ricordato (*cabasite*) fa seguito, già per moderato incremento delle condizioni fisiche ($p = \sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 280^\circ\text{C}$) del trattamento idrotermale, una nuova evoluzione nel senso della formazione di *leucite* e *kaliophilite*. In ciò si registra una diversità di comportamento nei rispetti del vetro *leucotefritico*, per il quale identico risultato divenne conseguibile per notevole incremento delle condizioni fisiche ($p = \sim 200 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 375^\circ\text{C}$) e aumento della concentrazione di potassa della soluzione di contatto (KOH 3%). Non provvedendo ad un tale simultaneo incremento, il vetro *leucotefritico*, in condizioni moderate di pressione e di temperatura ($\sim 60 \text{ Kg/cm}^2$; $\sim 280^\circ\text{C}$), è ancora, e più compiutamente, zeolitizzabile. In condizioni più severe di quelle ora ricordate ($p = \sim 120 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 330^\circ\text{C}$) evolve poi verso l'assetto strutturale dell'*analcime* e della *leucite*.

L'azione combinata di un notevole incremento della concentrazione della soluzione di contatto (KOH 2N) e delle condizioni fisiche del trattamento idrotermale ($p = \sim 200 \text{ Kg/cm}^2$; $t = \sim 375^\circ\text{C}$) si rivela inoltre, per il vetro *leucititico*, favorevole alla sua cristallizzazione a *kaliophilite*.

Per quanto attiene alle differenze riscontrate nei rispetti del vetro *nefelin-leucititico* da parte del vetro in istudio, è stato già più sopra osservato che esse sono, in ambiente potassico, notevolissime.

Al contrario, in ambiente sodico, si registra analogia di comportamento fra il vetro *leucititico* ed i vetri: *leucotefritico* e *nefelin-leucititico*.

• • •

Poichè il presente lavoro conclude le ricerche espletate sulla serie di vetri vulcanici presa in considerazione, — ancorchè l'argomento non possa dirsi esaurito, per gli ulteriori sviluppi che si sono intravisti nel corso della sperimentazione, e per i riflessi sui quali sarà doveroso far luce, — ritengo utile fornire, prima di terminare, una tavola sinottica dei principali risultati conseguiti con le diverse esperienze effettuate su ciascun termine della suddetta serie, sempre, s'intende, in condizioni operative normalizzate.

Il lettore potrà così agevolmente valutare l'influenza esercitata dalle singole variabili sul decorso del processo di cristallizzazione, nonchè sulle possibili evoluzioni strutturali, conseguibili per trattamento idrotermale, del vetro esaminato.

Nella tabella IX compaiono prima i termini più acidi della serie; si passa poi gradualmente, attraverso i termini intermedi, a quelli che rappresentano gli equivalenti vetrosi di rocce francamente alcaline.

Per ultimo si pone il vetro *basaltico*, in considerazione della similitudine di comportamento da esso manifestata nei rispetti del vetro *nefelin-leucititico*.

Nella tabella compaiono soltanto dati relativi ad esperienze effettuate, senza alcuna « estrapolazione ». Il più sovente, le esperienze non effettuate, — in corrispondenza delle quali figura un trattino, — sarebbero state superflue, avendo già, i risultati conseguiti, fornito un'idea sufficientemente chiara delle possibili evoluzioni, in quelle determinate condizioni, del vetro studiato.

Le voci poste fra parentesi distinguono evoluzioni incipienti verso assetti strutturali appena accennati.

Risalta con tutta chiarezza, dall'esame della tabella IX, che, nelle condizioni sperimentali prescelte ed in ambiente potassico, i vetri più facilmente zeolitizzabili sono: il vetro *alcali-trachitico*, il *trachi-andesitico* ed il *leucofonolitico*. Meno facilmente zeolitizzabili: il vetro *leucotefritico* e quello *leucititico*, stante la loro tendenza a cristallizzare a *leucite*. Particolare, per quanto attiene ad attitudine alla zeolitizzazione in ambiente potassico, il comportamento dei vetri: *nefelin-leucititico* e *basaltico*. Entrambi, nelle condizioni sperimentali prescelte, sono risultati zeolitizzabili soltanto ad *analcime* ($\text{Na}[\text{AlSi}_2\text{O}_6] \cdot \text{H}_2\text{O}$), e tanto in ambiente debolmente potassico, quanto in quello debolmente sodico.

Si noti la stabilità di quest'ultimo assetto strutturale (*analcime*) anche in condizioni fisiche severe, la notevole ampiezza della fascia entro la quale possono muoversi i valori della pressione e della temperatura sotto i quali decorre il trattamento idrotermale, senza provocare mutamento del suddetto assetto (*analcime*) e, soprattutto, la spiccata attitudine alla cristallizzazione ad *analcime*, per trattamento in ambiente sodico, da parte di tutti i termini della serie di vetri studiata.

Per quanto attiene poi all'evoluzione dei suddetti termini verso assetti strutturali diversi da quelli zeolitici, si noti, in ambiente potassico, la facilità di cristallizzazione ad *ortoclasio* al crescere dell'acidità del vetro di partenza. Si noti ancora, sempre in quest'ultimo ambiente, il prevalere della cristallizzazione a *leucite* (e *kaliophilite*), su quella di cristallizzazione a *feldspato potassico*, per passaggio dai termini più acidi a quelli più basici della serie, nonchè la riduzione delle condizioni fisiche sotto le quali è conseguibile la cristallizzazione a *leucite* e (*kaliophilite*) al crescere della basicità del termine cimentato, in analogia con quanto si verifica, a parità di condizioni ambientali, per la cristallizzazione a *feldspato* nei vetri ad alto grado d'acidità.

Segnalo infine che per trattamento idrotermale di ciascun termine della serie di vetri studiata, nelle condizioni sperimentali adottate, non ho mai riscontrata cristallizzazione a *plagioclasio*, nè formazione di « minerali delle argille ».

Mi è gradito ringraziare vivamente il Prof. SCHERILLO per i consigli ricevuti nel corso dell'espletamento delle ricerche.

Napoli, Istituto di Chimica Industriale dell'Università.

RIASSUNTO. — L'autore riferisce sulle modificazioni strutturali e costituzionali conseguibili per via idrotermale a partire da un'ossidiana artificiale, ricavata per fusione e tempra di un blocco di tipica leucite laziale.

Segnala dapprima le condizioni sperimentali più idonee alla zeolitizzazione in ambiente debolmente potassico della suddetta ossidiana e sottolinea che la zeolitizzazione dell'ossidiana *leucititica*, nell'ambiente in oggetto, è meno agevolmente conseguibile di quanto osservato per il termine, meno basico, ad essa più prossimo nella serie di vetri studiata: il vetro *leucotefritico*, stante la più spiccata tendenza, nel vetro *leucititico*, alla cristallizzazione della *leucite*.

Segue poi le successive evoluzioni dell'assetto strutturale zeolitico per effetto dello incremento delle condizioni fisiche che regolano il trattamento idrotermale, sempre in ambiente potassico, precisando altresì le condizioni più favorevoli per la cristallizzazione a *kaliophilite* del vetro *leucititico* originario. Dà inoltre conto degli effetti derivanti dalla sostituzione, a parità di condizioni fisiche, della soluzione potassica di contatto con quella di idrossido di sodio della stessa concentrazione.

Pone infine in relazione i risultati conseguiti a partire dal vetro *leucititico* con quelli ottenuti sperimentando su ossidiane: *leucotefritiche* e *nefelin-leucititiche* ed allega una tavola sinottica delle principali modificazioni strutturali e costituzionali conseguite, per trattamento idrotermale in condizioni sperimentali normalizzate, a partire da ciascun termine della serie di vetri vulcanici preso in considerazione nelle precedenti note.

SUMMARY. — The effects of hydrothermal actions, in standardized conditions, on a *leucititic* obsidian, artificially prepared by melting and granulating a sample of typical latial *leucite* (leucite-pyroxene), have been studied by the author.

The experimental conditions more apt to zeolitization of such a glass, in the presence of potassium hydroxide dilute solution, have been at first pointed out and then discussed in comparison to the conditions under which it is possible to zeolitize, in the same environment, a *leucite-tephrite* obsidian.

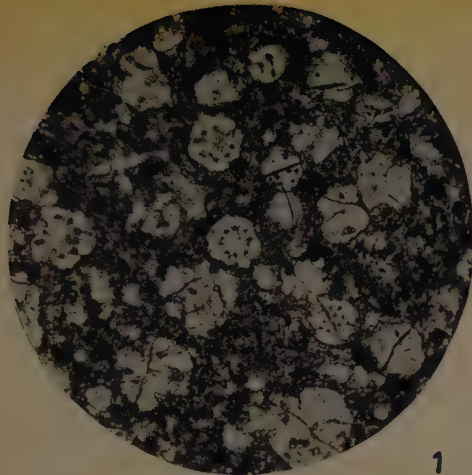
The evolutions of the zeolitic structural arrangement related to the increase of physical factors of the hydrothermal treatment, in the same environment, have been afterwards emphasized, and the experimental conditions that seem to be more apt to *kaliophilite* formation have been reported, too.

An account for the results obtained by replacing potassium hydroxide dilute solution by sodium hydroxide, has been further given.

The results obtained starting from *leucititic* glass have been also compared with those reached, in the same conditions, starting from a *leucite-tephrite* or from a *nephelite-leucite* obsidian and a table summarizing the principal structural changes, in standardized experimental conditions, pointed out by the hydrothermal treatment of each term belonging to the series of volcanic glasses which has been taken into consideration in the preceding papers, has been at least included.

TABELLA IX.

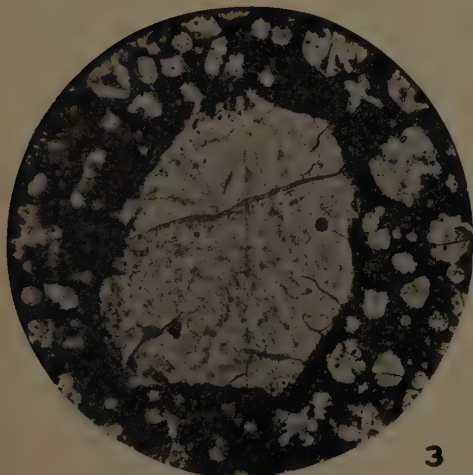
Vetro di partenza	p = 30 kg/cm ² ; t = 235°C.				p = 60 kg/cm ² ; t = 280°C.				p = 120 kg/cm ² ; t = 330°C.				p = 200 kg/cm ²	
	soluzione di contatto		soluzione di contatto		soluzione di contatto		soluzione di contatto		soluzione di contatto		soluzione di contatto		soluzione di contatto	
	KOH		NaOH		KOH		NaOH		KOH		NaOH		KOH	
	all'1%	al 3%	all'1%	al 3%	all'1%	al 3%	all'1%	al 3%	all'1%	al 3%	all'1%	al 3%	all'1%	al 3%
<i>Riolitico</i>	ortoclasio	ortoclasio	(analcime + ortoclasio)	analcime + ortoclasio	ortoclasio	—	analcime + ortoclasio	—	ortoclasio	—	analcime + ortoclasio	—	ortoclasio	—
<i>Alcali-trachitico</i>	herschelite	—	analcime	—	herschelite	—	analcime + ortoclasio	—	analcime + ortoclasio	—	analcime + ortoclasio	—	—	ortoclasio
<i>Trachi-andesitico</i>	—	—	—	—	cabasite	leucite	analcime + (ortoclasio)	—	analcime + ortoclasio	—	analcime + ortoclasio	—	analcime + ortoclasio	—
<i>Leuco-fonolitico</i>	—	—	—	—	herschelite + (leucite)	leucite + (herschelite)	analcime	—	leucite	—	analcime + (ortoclasio)	—	leucite	—
<i>Leucotefritico</i>	(herschelite)	—	analcime	—	herschelite	—	analcime	—	leucite + analcime	—	—	—	—	leucite + kaliophilite
<i>Leucititico</i>	(cabasite)	leucite + kaliophilite + (cabasite)	—	—	leucite + (kaliophilite + cabasite)	—	analcime	—	leucite + kaliophilite	—	—	—	leucite + kaliophilite	—
<i>Nefelin-leucititico</i>	—	—	—	—	analcime	—	analcime	—	analcime	—	analcime	—	analcime	—
<i>Basaltico</i>	—	—	—	—	analcime	—	analcime	—	analcime	—	analcime	—	analcime	—



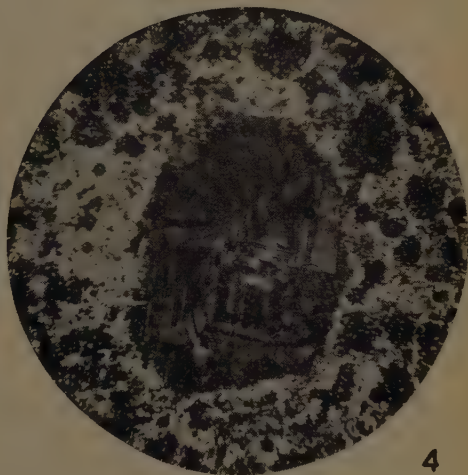
1



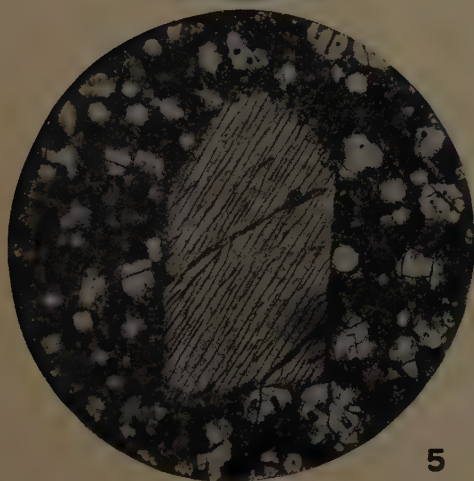
2



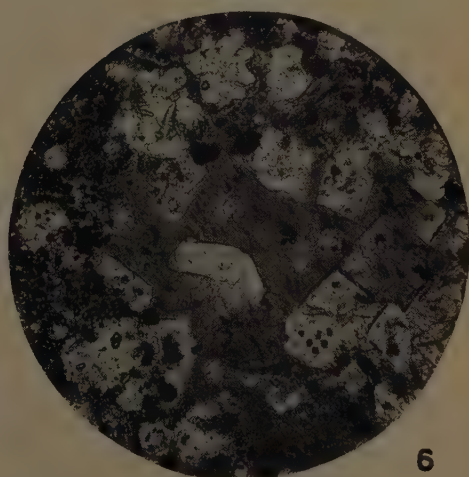
3



4



5



6

Leucite (Rocca Priora) - Sezioni sottili.

- 1) Nicols //; 60 X; cristalli di leucite nella pasta fondamentale.
- 2) Nicols +; 40 X; leucite attraversata da vene di calcite.
- 3) Nicols //; 40 X; fenocrystallo di leucite.
- 4) Nicols +; 40 X; fenocrystallo di leucite (lo stesso di cui al n. 3).
- 5) Nicols //; 40 X; fenocrystallo di pirosseno.
- 6) Nicols //; 40 X; cristalli di mica (biotite).

1)
2)
3)
4)
5)
6)
7)
8)
9)
10)
11)
12)
13)



Diam. camera mm. 114,59. Rad. Cu K α

Sepiomelanina e pigmenti sintetici. (*)

*Nota dei Dott. M. Piattelli, E. Fattorusso, S. Magno
e del socio corrispondente R. A. Nicolaus*

(Adunanza del dì 4 novembre 1961)

Come risulta da nostri precedenti lavori, numerosi sono ormai i dati analitici e le informazioni sulla struttura della sepiomelanina [1]. Sulla base di questo materiale sperimentale ci è sembrato opportuno effettuare un esame comparativo fra le proprietà chimiche e fisiche della sepiomelanina e quelle delle melanine da dopa, da 5,6-diossindolo e da pirrolo.

La dopamelanina è stata preparata ossidando la 3,4-dirossifenilalanina in soluzione tampone a pH 6,8 in presenza di tirosinasi da fungo sia con l'aggiunta di catalasi che senza. La polimerizzazione del 5,6-diossindolo è stata realizzata per ossidazione con ossigeno in assenza di enzimi, in presenza di tirosinasi e in presenza di tirosinasi e di catalasi. Il nero di pirrolo è stato preparato per ossidazione prolungata del pirrolo con acqua ossigenata in acido acetico.

I valori percentuali dell'azoto di tutti questi pigmenti sono dello stesso ordine di grandezza, ad eccezione del nero di pirrolo per il quale tale valore è quasi il doppio di quello delle altre melanine.

Analogamente a quanto già fatto per la sepiomelanina, i pigmenti sintetici sono stati decarbossilati termicamente. La quantità di anidride carbonica sviluppata è simile per la sepiomelanina, la dopamelanina preparata in presenza di tirosinasi e la diossindolmelanina ottenuta per ossidazione sia in presenza che in assenza di tirosinasi (9% circa); risultati simili tra di loro danno il nero di pirrolo, la dopamelanina e la diossindolmelanina ottenute in presenza di tirosinasi e catalasi (5% circa).

Tutte le melanine in esame, analogamente alla sepiomelanina, danno per ossidazione permanganica gli stessi acidi pirrolici (2,3,5-pirroltricarbonico, 2,3-pirroldicarbonico e 2,3,4,5-pirroltetracarbonico), pur essendo diverse per alcune di esse le quantità relative di tali acidi. In particolare l'acido 2,3-pirroldicarbonico, presente in tracce tra i prodotti di ossidazione della sepiomelanina, si ottiene in quantità relativamente abbondanti dalla dissindolmelanina. Il nero di pirrolo si comporta in maniera del tutto diversa, poichè il prodotto più abbondante è l'acido 2,5-pirroldicarbonico; sono anche presenti piccole quantità degli acidi 2,3-pirroldicarbonico e 2,3,5-pirroltricarbonico e tracce dell'acido 2-pirrolcarbonico.

(*) Questo lavoro è stato eseguito con il contributo del National Cancer Institute, research Grant C. 5220 e C-1 5220, Public Health Service, U.S.A.

Anche sui neri decarbossilati è stato compiuto uno studio cromatografico comparativo dei prodotti di ossidazione permanganica in ambiente alcalino. Tra i prodotti di demolizione delle melanine da 5,6-diossindolo e da 3,4-diossifenilalanina, oltre gli acidi pirrolici già ottenuti dalla ossidazione dei pigmenti non decarbossilati, si sono identificati gli acidi 2,4-pirroldicarbonico e 2,5-pirroldicarbonico. Il nero di pirrolo dà per ossidazione gli stessi acidi del pigmento non decarbossilato.

I valori percentuali del metossile dei pigmenti metilati con diazometano sono tra loro paragonabili (20% circa), ad eccezione del nero di pirrolo per il quale esso risulta molto più basso (8% circa). Anche i neri metilati sono stati ossidati con permanganato in ambiente alcalino, non ottenendosi acidi pirrolici in quantità apprezzabili; se però i prodotti di ossidazione vengono saponificati, solo per la sepiomelanina l'analisi cromatografica rivela la ricomparsa dell'acido 2,3,5-pirroltricarbonico. Tale differenza può attribuirsi all'assenza nelle melanine sintetiche di carbossili nella posizione 2 di alcuni nuclei indolici. Il nero di pirrolo metilato fornisce gli stessi acidi pirrolici ottenuti dall'ossidazione del pigmento non metilato.

La formazione di trimetilamina nell'ossidazione della dopamelanina metilata, dimostrata mediante cromatografia in fase gassosa, prova la presenza in questi pigmenti di catene di α -aminoacidi, assenti nella sepiomelanina.

Il notevole numero di carbossili contenuti nella diossindolmelanina dimostra che durante la melanogenesi deve aver luogo un processo di degradazione. Considerando che il pigmento preparato in presenza di catalasi mostra un contenuto di carbossili sensibilmente più basso, tale demolizione può essere attribuita all'azione dell'acqua ossigenata che si forma nel corso della polimerizzazione.

Analoghe considerazioni possono valere per la dopamelanina, anche se in questo caso parte dei carbossili deriva evidentemente dalle catene di α -aminoacidi.

Rimarchevole differenza tra la sepiomelanina e le melanine sintetiche è l'assenza in queste ultime di carbossili in posizione 2 di alcuni nuclei indolici.

Nonostante tali differenze, la concordanza di tutti gli altri dati fa ritenere che il precursore della sepiomelanina sia la tirosina o la 3,4-diossifenilalanina e conferma la natura indolica di questa melanina naturale.

Le differenze osservate tra melanine naturali e sintetiche possono essere attribuite alla imperfetta riproducibilità in vitro delle condizioni naturali di formazione del pigmento.

Notevolmente diverso dalla sepiomelanina appare il nero di pirrolo sia per i dati analitici sia per il comportamento all'ossidazione.

Ulteriori dettagli saranno pubblicati al più presto.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. PANIZZI e R. A. NICOLAUS. *Ricerche sulle melanine. Nota I. Sulla melanina di seppia*. Gazz. Chim. It. **82**, 435 (1952).

R. A. NICOLAUS, A. VITALE e M. PIATTELLI. *Acido 2,3,4,5-pirroltetracarbonico nell'ossidazione della melanina di seppia*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat. di Napoli, S. 4^a, vol. XXV, 220 (1958).

M. PIATTELLI, E. FATTORUSSO, S. MAGNO e R. A. NICOLAUS. *Identificazione degli acidi 2,4-pirroldicarbonico e 2,5-pirroldicarbonico tra i prodotti di ossidazione della sepiomelanina decarbossilata*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat. di Napoli, S. 4^a, vol. XXVIII, 165 (1960).

M. PIATTELLI e R. A. NICOLAUS. *The Structure of Melanins and Melanogenesis. I. The Structure of Melanins in Sepia*. Tetrahedron **15**, 66 (1961).

Napoli, Istituto di Chimica Organica dell'Università.

RIASSUNTO. — Al pari della sepiomelanina, la dopamelanina e la diossindolmelanina appaiono contenere in massima parte unità di tipo indolico ed in misura minore unità di tipo pirrolico.

Le uniche differenze trovate si riferiscono alla presenza nella dopamelanina di catene laterali di α -amminoacidi (dopachinone?) e nella sepiomelanina di gruppi carbossilici nella posizione 2 del nucleo indolico (dopacromo?).

La sepiomelanina è simile alle melanine da dopa e da 5,6-diossindolo ma non identica. Dallo studio eseguito possono essere tratte le seguenti conclusioni:

a) Come nella sepiomelanina, unità di tipo indolico e di tipo pirrolico sono presenti nei due pigmenti sintetici.

b) Nella dopamelanina sembrano essere presenti unità contenenti catene di α -amminoacidi; queste unità risultano assenti nella sepiomelanina. Inoltre nelle dopamelanina non vi sono gruppi carbossilici nella posizione 2 del nucleo indolico, che si ritrovano invece nella sepiomelanina. Nella melanina da 5,6-diossindolo sono presenti carbossili legati ad anelli pirrolici provenienti molto probabilmente dalla rottura di unità di tipo indolico.

c) Il nero di pirrolo appare essere notevolmente diverso dalla sepiomelanina.

SUMMARY. — A comparative study on sepiomelanin and melanins from dopa and from 5,6-dihydroxyindole was carried out.

The results permit the following conclusions to be drawn:

a) As in sepiomelanin, the synthetical pigments show the presence of indole and pyrrole type units.

b) Units carrying α -aminoacid chains appear to be present in dopamelanin, but not in sepiomelanin. Furthermore, —CCOH groups at position 2 of indole nuclei are present in sepiomelanin only.

c) Carboxyl groups, linked to pyrrole nuclei, are present in 5,6-dihydroxyindole melanin.

d) Pyrrole black appears to be very different from sepiomelanin.

Sul criterio della massima tensione tangenziale ottaedrale

*Nota del dott. ing. Salvatore D'Agostino,
presentata dal socio ordin. Vincenzo Franciosi*

[Adunanza del dì 4 novembre 1961]

I. PREMESSA. — Il criterio della curva intrinseca postula la crisi per scorrimento degli elementi, paralleli fra loro, sui quali agisce una tensione limite t_n . Questo criterio sembra, come è stato avvertito [1] [2], il più aderente al comportamento fisico dei materiali perché si rivolge direttamente all'esperienza non imponendo nessuna ipotesi preliminare.

Se però a determinare la crisi è uno scorrimento tra piani paralleli, provocato da una tensione tangenziale, essa si manifesta quando il vettore t_n agente sull'elemento di normale n , si porta con il suo estremo sulla superficie intrinseca. Si legano pertanto tramite il vettore t_n sia la τ_n che la σ_n agenti sull'elemento considerato. Esiste quindi un rapporto di mutua dipendenza tra la τ che provoca lo scorrimento, e la σ che contemporaneamente agisce sull'elemento dS di normale n definito nel punto A.

Nello spirito del criterio della curva intrinseca sembra opportuno, scelte delle giaciture sulle quali agisce una determinata σ , far dipendere la crisi dalla massima tensione tangenziale che a detta σ si accompagna, o inversamente assegnata una τ indagare sulla resistenza di quei piani che ad essa uniscono il massimo valore di σ .

In particolare esaminando il criterio della massima tensione tangenziale ottaedrale al lume di quanto detto sopra, sembra opportuno indagare sulle superfici limiti che si ottengono con le considerazioni sopra esposte.

Scopo del presente lavoro è appunto quello di esaminare come si modifica il dominio di resistenza quando si limita anziché il valore della τ ottaedrale, il valore della massima tensione tangenziale (che si indica con τ_{\max}) che si accompagna alla σ ottaedrale; ed ancora quando ad un assegnato valore della tensione tangenziale (che si sceglierà proprio uguale alla τ ottaedrale) si associ il valore di σ_{\max} compatibile con il massimo cerchio di Mohr relativo allo stato tensionale assegnato.

2. — Scelto nel riferimento cartesiano definito dalle tensioni principali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, l'ottaedro le cui facce sono equinclinate rispetto agli assi coordinati, il criterio della tensione tangenziale ottaedrale massima postula la crisi quando, la tensione tangenziale, uguale su qualsiasi delle otto giaciture dell'ottaedro, attinge un valore limite τ_R . Il valore della tensione tangenziale ottaedrale è:

$$(1) \quad \tau_{ott.} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1};$$

limitandola con il consueto riferimento ad uno stato tensionale monoassiale, la condizione di sicurezza, in funzione della tensione normale capace di provocare la crisi, si scrive:

$$(2) \quad s \cdot \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1} \leq \pm \sigma_R.$$

La (2) coincide con la condizione di sicurezza di HENCKY e v. MISES e ne rispecchia i limiti di applicazione, cioè $T \leq 0$, e $\sigma_{RT} = -\sigma_{RC} = \sigma_R$. [2] [3].

3. — Si consideri l'intorno di un punto P ed un generico stato tensionale in esso definito. Siano $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, le tensioni principali sufficienti a caratterizzare tale stato tensionale, e si supponga σ_2 tensione intermedia (fig. I). Dalla rappresentazione dei cerchi di Mohr relativi allo stato tensio-

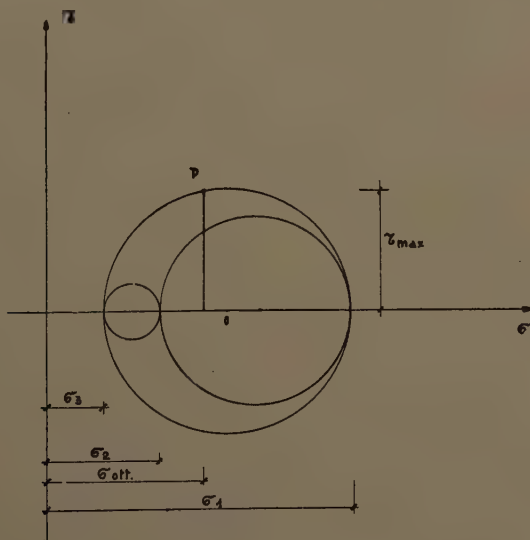


Fig. 1.

nale in discussione si rileva che esistono, tra gl'infiniti che si accompagnano alla σ ottaedrale, due valori di $|\tau|$ maggiori di tutti gli altri, e corrispondenti ai valori che la tensione tangenziale attinge nelle intersezioni della retta $\sigma_{ott.} = \text{costante}$ con il massimo cerchio di Mohr. Come si è detto si indicano con $\pm \tau_{max}$ i su indicati valori. Poichè ci si è portati in un punto del massimo cerchio di Mohr, si può ricavare il valore di τ_{max} proprio facendo riferimento all'equazione di detto cerchio:

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 = \tau_{max}^2;$$

da cui si ricava:

$$(3) \quad \tau_{max}^2 = \frac{2\sigma_1^2 - \sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 + \sigma_1\sigma_2 - 5\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3}{9}.$$

Ricordando le espressioni della σ_x in funzione delle σ principali, può scriversi il seguente sistema nel quale le incognite sono α_1 ed α_3 , coseni direttori che definiscono le giaciture sulle quali agiscono $\sigma_{olt.}$ e τ_{max} .

$$\begin{cases} \sigma_1 \alpha_1^2 + \sigma_3 \alpha_3^2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \\ \alpha_1^2 + \alpha_3^2 = 1 \end{cases}$$

che risolto porge:

$$(4) \quad \alpha_1^2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3}{3(\sigma_1 - \sigma_3)}; \quad \alpha_3^2 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

In figura 2a si riporta la giacitura definita dai coseni direttori $\alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}$, mentre la figura 2b mostra la giacitura definita dai nuovi coseni direttori.

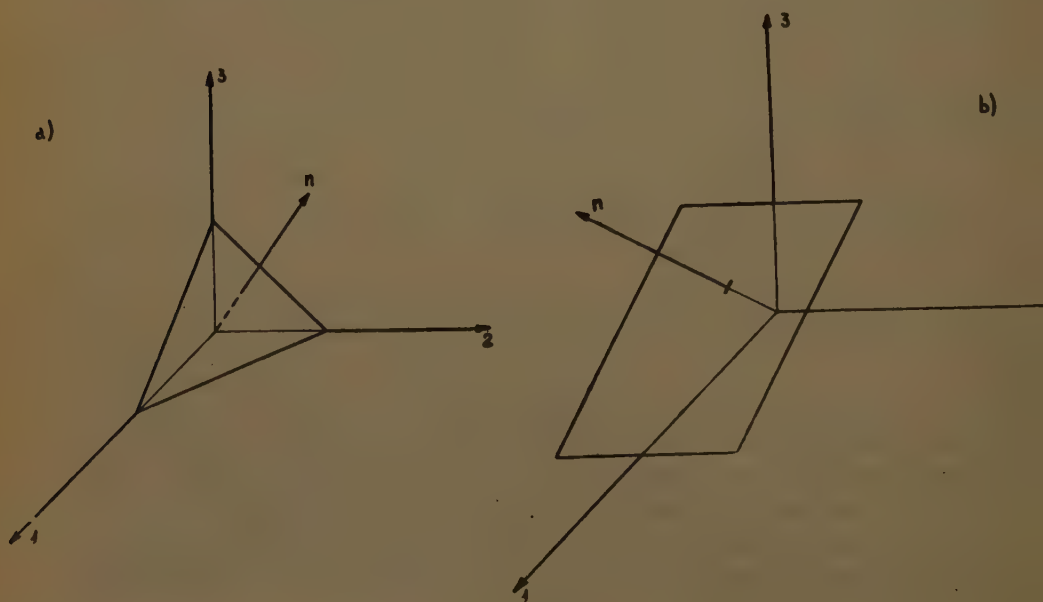


Fig. 2.

Per limitare il valore che la τ può attingere s'impone la seguente disuguaglianza:

$$(5) \quad \frac{2\sigma_1^2 - \sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 + \sigma_1\sigma_2 - 5\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3}{9} \leq \tau_R^2$$

dove il valore di τ_R si ricava uguagliandolo a quello che la τ_{\max} assume in uno stato tensionale monoassiale capace di provocare la crisi. Imponendo quindi $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ o $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ (si ricorda che σ_2 non può essere diversa da 0 perché il punto P appartiene al cerchio definito da σ_1 e σ_3), dalla (5) si ottiene:

$$\frac{2}{9} \sigma_R^2 = \tau_R^2$$

sostituendo nella (5) ed uguagliando si ha:

$$(6) \quad 2\sigma_1^2 - \sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 5\sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_R^2 = 0;$$

che nello spazio coordinato $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, è l'equazione di una quadrica. Il determinante dei coefficienti è:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\sigma_R^2 \end{vmatrix} = 0$$

Il sistema delle semiderivate parziali, in coordinate omogenee ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, t$) risolto porge $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ cui si aggiunge $t = 0$. Le coordinate del punto doppio sono quindi (I, I, I, 0) cioè il punto doppio è improprio e la quadrica è un cilindro avente le generatrici equinclinate sulle direzioni dei tre assi coordinati *).

Si riportano le equazioni delle coniche intersezioni della quadrica (6)

*) Allo scopo di esaminare la sezione retta della quadrica, si definisce il sistema di assi ortogonali avente:

1) l'origine comune con il sistema triortogonale.

2) l'asse X diretto secondo la direzione equinclinata del sistema di assi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

3) l'asse Y intersezione del piano ortogonale ad X passante per l'origine, con il piano σ_1, σ_2 .

con i piani coordinati: esse risultano delle iperboli con il centro nell'origine degli assi, ed a lato delle equazioni si riportano i coefficienti angolari degli asintoti.

Piano (σ_1, σ_2) :

$$2\sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \sigma_2 \sigma_1 - 2\sigma_R^2 = 0; \quad \lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = < -\frac{1}{2}$$

Piano (σ_1, σ_3) :

$$2\sigma_1^2 + 2\sigma_3^2 - 5\sigma_1 \sigma_3 - 2\sigma_R^2 = 0; \quad \lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = < -\frac{1}{2}$$

Piano (σ_2, σ_3) :

$$2\sigma_3^2 - \sigma_2^2 + \sigma_2 \sigma_3 - 2\sigma_R^2 = 0; \quad \lambda = \frac{\sigma_3}{\sigma_2} = < -\frac{1}{2}.$$

Si è fin qui considerato il caso $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, per tener conto dei casi in cui è intermedia la σ_3 basta nella (6) permutare σ_3 con σ_2 ottenendo:

$$(6') \quad 2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 - \sigma_3^2 - 5\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_2 - 2\sigma_R^2 = 0$$

che nel sistema di assi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, rappresenta una quadrica il cui determinante dei coefficienti è, come è facile controllare ancora nullo, mentre il

4) l'asse Z ortogonale ad X ed Y.

La trasformazione dal primo al secondo sistema è rappresentata da:

$$\sigma_1 = \frac{X}{\sqrt{3}} - \frac{Y}{\sqrt{2}} + \frac{Z}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}};$$

$$\sigma_2 = \frac{X}{\sqrt{3}} + \frac{Y}{\sqrt{2}} + \frac{Z}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}};$$

$$\sigma_3 = \frac{X}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2} \cdot Z}{\sqrt{3}};$$

Nel nuovo sistema di riferimento la quadrica (6) ha per equazione:

$$(6a) \quad 3Z^2 - \frac{9}{\sqrt{3}} YZ - 2\sigma_R^2 = 0;$$

la (6a) è l'equazione dell'iperbole direttrice del cilindro avente per generatrici rette parallele all'asse X.

sistema delle semiderivate parziali fornisce ancora per le coordinate del punto doppio i valori (I, I, I, 0). Si è ancora in presenza di un cilindro avente le generatrici equinclinate sulle direzioni dei tre assi coordinati *).

Le intersezioni di tale cilindro con i piani coordinati sono ancora tre iperboli con il centro coincidente con l'origine degli assi; se ne riportano di seguito le equazioni con a lato i coefficienti angolari degli asintoti.

Piano (σ_1, σ_2) :

$$2 \sigma_1^2 + 2 \sigma_2^2 - 5 \sigma_1 \sigma_2 - 2 \sigma_R^2 = 0; \quad \lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = < \frac{1}{2}$$

Piano (σ_2, σ_3) :

$$2 \sigma_2^2 - \sigma_3^2 + \sigma_3 \sigma_2 - 2 \sigma_R^2 = 0; \quad \lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = < -\frac{1}{2}$$

Piano (σ_1, σ_3) :

$$2 \sigma_1^2 - \sigma_3^2 + \sigma_1 \sigma_3 - 2 \sigma_R^2 = 0; \quad \lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = < -\frac{1}{2}$$

Permutando infine nella (6) σ_1 con σ_2 , si ottiene *):

$$(6'') \quad -\sigma_1^2 + 2 \sigma_2^2 + 2 \sigma_3^2 - 5 \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 - 2 \sigma_R^2 = 0$$

che è ancora l'equazione di un cilindro a direttrici iperboliche, la cui direzione delle generatrici è ancora la retta equinclinata sugli assi, essendo anche in questo caso (I, I, I, 0) le coordinate del punto doppio. Anche per quest'ultimo cilindro si riportano le equazioni delle iperboli intersezioni con i piani coordinati con a lato i coefficienti angolari degli asintoti.

*) Nel sistema di assi definito nella nota precedente la quadrica (6') è ancora un cilindro con generatrici parallele all'asse X, ed avente per direttrice l'iperbole di equazione:

$$(6'a) \quad Z^2 - 3 Y^2 + \frac{4}{3} \sigma_R^2 = 0$$

*) Nel sistema di assi precedentemente definito si ha ancora un cilindro con generatrici parallele all'asse X, e direttrice l'iperbole di equazione:

$$(6''a) \quad Z^2 + \sqrt{3} Y Z - \frac{2}{3} \sigma_R^2 = 0$$

Piano (σ_1, σ_2) :

$$2\sigma_2^2 - \sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_R^2 = 0; \quad \lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = < \frac{-1}{2}$$

Piano (σ_2, σ_3) :

$$2\sigma_3^2 + 2\sigma_2^2 - 5\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_R^2 = 0; \quad \lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = < \frac{1}{2}$$

Piano (σ_1, σ_3) :

$$2\sigma_3^2 - \sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_R^2 = 0; \quad \lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = < \frac{1}{2}$$

Gli sviluppi analitici sopra riportati permettono di definire compiutamente il dominio ottenuto considerando determinante la crisi il vettore t di componenti σ_{ott} e τ_{max} . Nel paragrafo successivo si studia il caso in cui il vettore t ha per componenti τ_{ott} e σ_{max} .

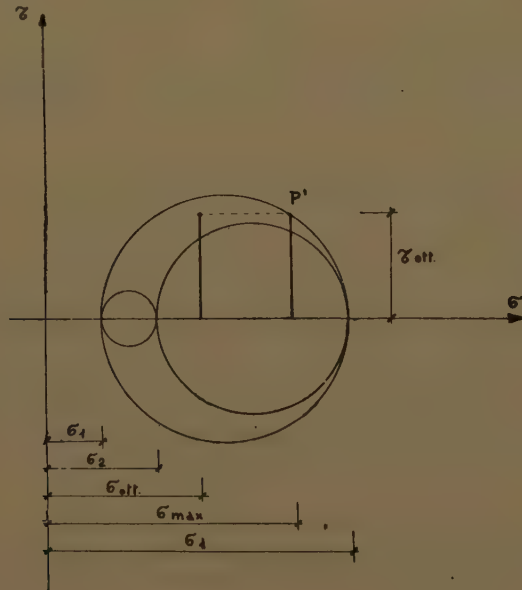


Fig. 3.

4. — Sempre nell'intorno del punto P considerato all'inizio del paragrafo 2, definite al solito $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ le tre tensioni principali, ricaviamo il valore massimo che la σ assume a parità di τ ottaedrale.

Dalla figura 3 si ricava:

$$(7) \quad \sigma_{max} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \frac{2}{9} \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3\right)};$$

Per determinare i coseni direttori degli elementi su cui agiscono τ ottaedrale e σ massima, si scrive il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_{ott.}^2} = \sigma_1 \alpha_1^2 + \sigma_3 \alpha_3^2 \\ \alpha_1^2 + \alpha_3^2 = 1 \end{cases}$$

che risolto dà:

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \sqrt{17 \left(\sigma_1^2 + \sigma_3^2\right) + 8 \sigma_2 (\sigma_2 - \sigma_3) - 2 \sigma_1 (13 \sigma_3 + 4 \sigma_2)};$$

$$\alpha_2^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \sqrt{17 \left(\sigma_1^2 + \sigma_3^2\right) + 8 \sigma_2 (\sigma_2 - \sigma_3) - 2 \sigma_1 (13 \sigma_3 + 4 \sigma_2)};$$

La condizione di sicurezza si scrive:

$$s \cdot \sigma_{mon.} = \pm \sigma_R$$

e poichè l'espressione di σ_{max} nello stato tensionale monoassiale si riduce a:

$$\frac{3 + \sqrt{17}}{6} \sigma_{max} = \sigma_{mon.}$$

la condizione limite di sicurezza si trasforma in:

$$(8) \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + \frac{2}{9} \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1\right)} = \frac{3 + \sqrt{17}}{6} (\pm \sigma_R)$$

scegliendo a secondo membro della (7) dapprima il segno positivo si ottiene:

$$(9) \quad 4 \sigma_1^2 + 4 \sigma_2^2 + 4 \sigma_3^2 - 4 \sigma_1 \sigma_2 - 4 \sigma_3 \sigma_2 - 22 \sigma_1 \sigma_3 + 3 \left(3 + \sqrt{17}\right) \sigma_R \sigma_1 + 3 \left(3 + \sqrt{17}\right) \sigma_R \sigma_3 - \left(13 + 3 \sqrt{17}\right) \sigma_R^2 = 0;$$

È questa l'equazione di una quadrica con determinante dei coefficienti nullo. Il sistema delle sue semiderivate parziali risolto porge, in coordinate omogenee $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, t$, le coordinate del punto doppio della quadrica che risultano $(I, I, I, -\frac{6}{3 + \sqrt{17}} \sigma_R)$. Avendo un punto doppio proprio la

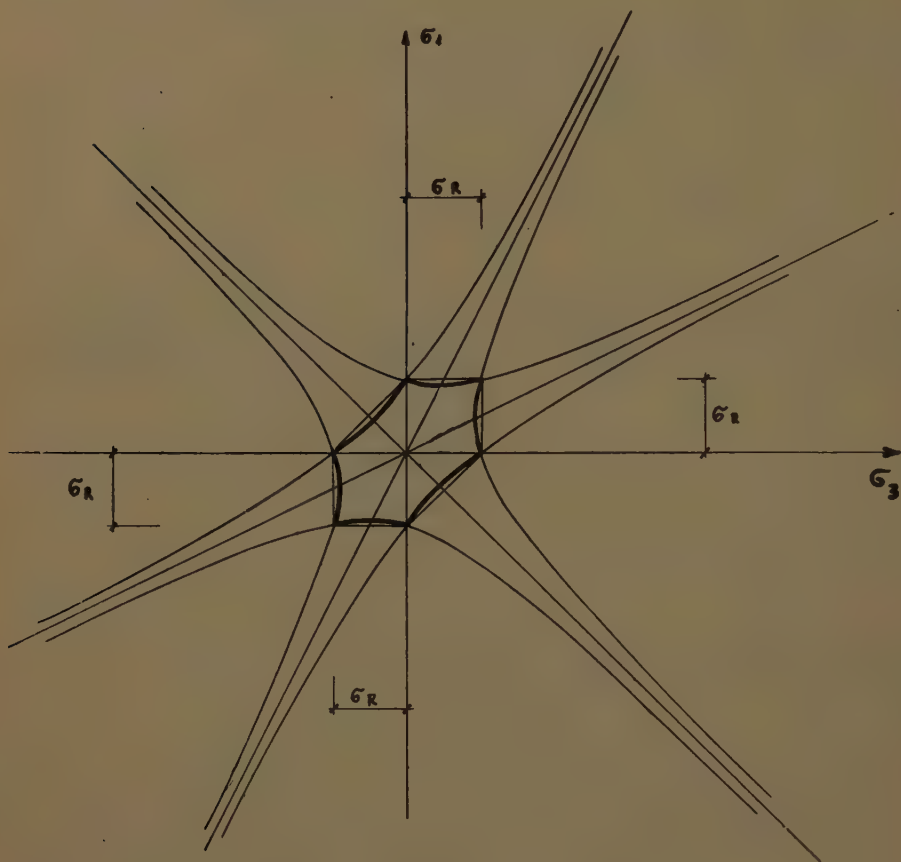


Fig. 4.

quadrica è un cono. La sua intersezione con il piano coordinato σ_1, σ_3 , nel quale si definisce il dominio di resistenza, è una iperbole di equazione:

$$(9_a) \quad 4 \sigma_1^2 + 4 \sigma_3^2 - 22 \sigma_1 \sigma_3 + 3 (3 + \sqrt{17}) \sigma_R \sigma_1 + \\ + 3 (3 + \sqrt{17}) \sigma_R \sigma_3 - (13 + 3 \sqrt{17}) \sigma_R^2 = 0;$$

le coordinate non omogenee del suo centro sono:

$$(9_b) \quad \sigma_1 = \sigma_3 = \frac{3(3 + \sqrt{17})}{14} \sigma_R.$$

si riportano infine i coefficienti angolari degli asintoti:

$$(9_c) \quad \lambda = \frac{11 + \sqrt{105}}{4}; \quad \lambda' = \frac{11 - \sqrt{105}}{4}$$

Permutando al solito σ_2 con σ_1 si ottiene ancora un cono di equazione:

$$(9') \quad 4\sigma_1^2 + 4\sigma_2^2 + 4\sigma_3^2 - 22\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2\sigma_1 - 4\sigma_1\sigma_3 + \\ + 3(3 + \sqrt{17})\sigma_2\sigma_R + 3(3 + \sqrt{17})\sigma_R\sigma_3 - (13 + 3\sqrt{17})\sigma_R^2 = 0$$

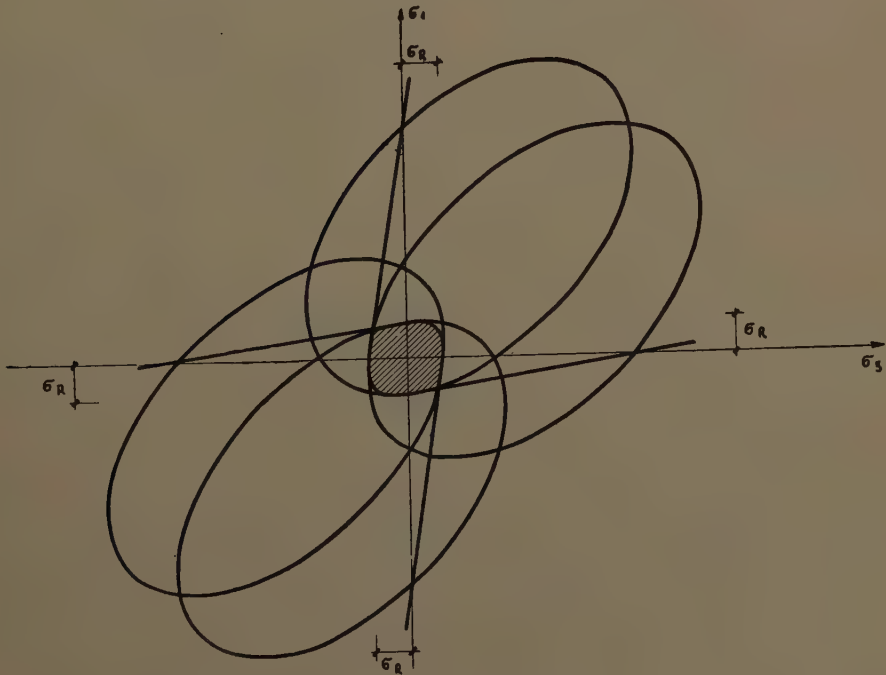


Fig. 5.

la cui intersezione con il piano σ_1, σ_3 , risulta una ellisse di equazione:

$$(9'_a) \quad 4\sigma_1^2 + 4\sigma_3^2 - 4\sigma_1\sigma_3 - 3(3 + \sqrt{17})\sigma_R\sigma_3 - (13 + 3\sqrt{17})\sigma_R^2 = 0$$

il cui centro ha per coordinate non omogenee:

$$(9''') \quad \sigma_1 = - \frac{3 + \sqrt{17}}{4} \sigma_R ; \quad \sigma_3 = - \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \sigma_R$$

le equazioni degli assi sono:

$$\sigma_1 + \sigma_3 + \frac{3}{4} (3 + \sqrt{17}) \sigma_R = 0 ;$$

$$\sigma_3 - \sigma_1 + \frac{1}{4} (3 + \sqrt{17}) \sigma_R = 0 ;$$

Si riportano infine le coordinate dei diametri della ellisse:

$$(9'') \quad \begin{aligned} &A_1 (0,510 \sigma_R ; - 5,860 \sigma_R) ; \quad B_1 (- 4,100 \sigma_R ; - 1,250 \sigma_R) \\ &C_1 (2,195 \sigma_R ; 0,415 \sigma_R) ; \quad D_1 (- 5,755 \sigma_R ; - 7,535 \sigma_R) \end{aligned}$$

riferendosi sia quì che nel seguito la prima coordinata alla σ_1 , e la seconda alla σ_3 .

Permutando infine σ_3 con σ_2 si ottiene ancora un cono di equazione:

$$(9'') \quad \begin{aligned} &4 \sigma_1^2 + 4 \sigma_2^2 + 4 \sigma_3^2 - 22 \sigma_1 \sigma_2 - 4 \sigma_1 \sigma_3 - 4 \sigma_3 \sigma_2 + \\ &+ 3 (3 + \sqrt{17}) \sigma_R \sigma_1 + 3 (3 + \sqrt{17}) \sigma_R \sigma_2 - (13 + 3 \sqrt{17}) \sigma_R^2 = 0 \end{aligned}$$

la sua intersezione con il piano σ_1, σ_3 , è ancora una ellisse di equazione:

$$(9''') \quad 4 \sigma_1^2 + 4 \sigma_3^2 - 4 \sigma_1 \sigma_3 + 3 (3 + \sqrt{17}) \sigma_R \sigma_1 - (13 + 3 \sqrt{17}) \sigma_R^2 = 0$$

le coordinate non omogenee del suo centro sono:

$$(9'') \quad \sigma_1 = - \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \sigma_R ; \quad \sigma_3 = - \frac{3 + \sqrt{17}}{4} \sigma_R$$

e le coordinate dei suoi diametri:

$$(9'') \quad \begin{aligned} &A_2 (- 5,860 \sigma_R ; 0,510 \sigma_R) ; \quad B_2 (- 1,250 \sigma_R ; - 4,100 \sigma_R) \\ &C_2 (0,415 \sigma_R ; 2,195 \sigma_R) ; \quad D_2 (- 7,535 \sigma_R ; - 5,755 \sigma_R) \end{aligned}$$

Prendendo nella (8) — σ_R si viene a limitare la massima σ di compressione. Ciò comporta evidentemente che nell'equazione (9) cambiano di segno i soli termini di primo grado. La quadrica che così si ottiene è ancora un cono avente un punto doppio le cui coordinate restano invariate rispetto a quelle del punto doppio della quadrica (9) a meno del segno. La sua intersezione con il piano σ_1, σ_3 , è ancora una iperbole e per essa le espressioni (9b) cambiano di segno, mentre le (9c) restano inalterate.

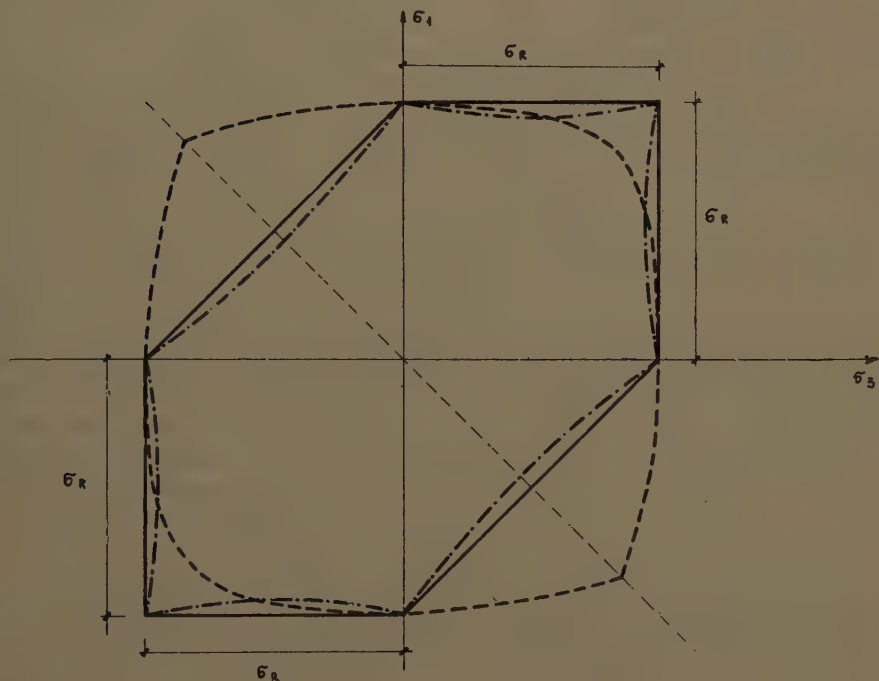


Fig. 6.

Altrettanto accade per le quadriche (9') e (9'') che conducono ancora a due ellissi, quando si intersecano con il piano coordinato σ_1, σ_3 , aventi ancora per equazioni le (9'a) e (9'a') a meno del segno dei termini di primo grado. Anche le (9'b), (9'c), (9'b') e le (9'c') restano inalterate a meno del segno.

Senza alcuna difficoltà si possono definire tutte le intersezioni delle quadriche esaminate coi piani coordinati. Si fa però rilevare che le uniche intersezioni che hanno interesse per la definizione dei domini di resistenza sono quelle effettuate con il piano σ_1, σ_3 .

Si è così completamente esaminato il caso della crisi sui piani dove agiscono la τ ottaedrale e la σ massima che ad essa si associa.

5. — Siamo ora in grado di discutere i risultati ottenuti.

Esaminando il caso in cui la crisi è provocata da σ ottaedrale e τ massima, si sono definiti tre cilindri iperbolici aventi in comune la direzione delle generatrici. Tali cilindri sul piano coordinato σ_1, σ_3 , massima e minima tensione principale, danno luogo ad un esagono mistilineo avente per lati rami di iperboli che s'incontrano nei vertici dell'esagono di TRESKA (fig. 4). Come era da attendersi avendo fatto dipendere la crisi da τ massima, maggiore di τ ottaedrale, si è venuti a ridurre il dominio di resistenza passando dall'ellisse di HENCKY ad un esagono a lati curvilinei interno all'esagono di TRESKA. Esso presenta in comune con questo ultimo sei punti singolari che mal si adattano ad un comportamento continuo del materiale.

Nel caso di disuniformità delle σ critiche a trazione e compressione semplice, il dominio presenterà al pari dei domini ottenuti con tutti gli altri criteri di resistenza, una discontinuità lungo la retta del taglio puro.

Il dominio ottenuto presenta la sua caratteristica fondamentale nella sua forma non convessa; pertanto al lume di numerose considerazioni svolte sull'argomento da diversi autori [4] [5], esso dominio può essere considerato dominio di resistenza, e non dominio di plasticizzazione^{*)}. D'altronde scopo della presente nota è quello di muovere una critica al criterio della massima tensione tangenziale ottaedrale. Infatti ponendo in evidenza il limite, innanzi tutto di natura logica presente nel criterio della massima tensione tangenziale ottaedrale, si è inteso, per via indiretta, avvalorare la tesi della priorità del criterio della curva intrinseca che nelle sue ultime modificazioni [2] [8] si avvicina in maniera eccellente al reale comportamento dei materiali, indipendentemente da ogni astrazione di natura fisico matematica^{**}).

Al contrario presenta forma convessa il dominio ricavato imponendo la crisi per τ ottaedrale e σ massima. Esso è stato ottenuto come intersezione di sei coni con il piano delle massime tensioni principali σ_1, σ_3 . Su tale piano i suddetti coni danno luogo a quattro ellissi e due iperboli che con la loro regione comune definiscono il dominio. Esso, mentre nei due quadranti in cui le tensioni principali presentano segno concorde, è di poco più restrittivo della condizione del Tresca, nei quadranti in cui le tensioni principali presentano segno discorde diventa molto meno restrittivo.

È da notare infine che anche per quest'ultimo dominio si presenterà una linea di discontinuità lungo la retta del taglio puro qualora presentino valore diverso la σ_R a trazione e quella a compressione.

^{*)} In un recente studio di P. BURTON [6] si ha un conforto per i risultati ottenuti. Pensato infatti nella teoria di COULOMB e MOHR il termine $\mu \sigma$ dovuto all'attrito, il BURTON mostra come il dominio di resistenza si modifichi nei due quadranti di segno opposto secondo due rami di iperboli, facendo esplicitamente rilevare che a differenza del dominio di plasticizzazione, nessuna restrizione è stata finora stabilita per la forma della curva di rottura.

^{**}) Il RJANITSIN [7] ha già messo in evidenza l'impossibilità di dare un significato fisico preciso al criterio della massima tensione tangenziale ottaedrale.

BIBLIOGRAFIA

- [1] V. FRANCIOSI. *Scienza delle costruzioni*. Vol. I, Napoli, Pellerano e Del Gaudio, 1959.
- [2] V. FRANCIOSI. *In tema di criteri di plasticizzazione. Considerazioni e proposte*. L'Ingegnere, n. 2, 1960, pag. 103 e seg.
- [3] F. STASSI D'ALIA. *Teoria della plasticità e sue applicazioni*. Palermo, Denaro, 1958.
- [4] P. CICALA. *Presentazione geometrica delle relazioni fondamentali d'elastoplasticità*. Giornale del Genio Civile, n. 2, 3, 1961.
- [5] D. C. DRUCKER. *Plasticity*, sta in: *Structural Mechanics. Proceedings on naval structural mechanics*. Pergamon Press, 1960.
- [6] P. BURTON. *A modification of the Coulomb Mohr theory of fracture*. Journal of Applied Mechanics, giugno 1961.
- [7] A. R. RJANITSYN. *Calcul à la rupture et plasticité des constructions*. Parigi, 1959.
- [8] L. ADRIANI. *Una proposta in tema di criteri di plasticizzazione*. Celebrazioni Archimedee del XX secolo. Siracusa, 11-16 aprile 1961.

RIASSUNTO. — Nello spirito del criterio della curva intrinseca si muove una critica al criterio della massima tensione tangenziale ottaedrale. Si esaminano i domini di rottura ottenuti prendendo quale elemento determinante la crisi, dapprima il vettore tensione avente per componenti la σ ottaedrale e la massima tensione tangenziale che ad essa si associa, poi il vettore tensione le cui componenti sono la τ ottaedrale e la massima σ che ad essa si accompagna. Definite le nuove giaciture di crisi, si mostra la forma assunta dal dominio di resistenza che nel primo caso risulta essere un esagono mistilineo avente per lati rami di iperboli che s'intersecano nei vertici dell'esagono di Tresca; nel secondo invece assume forma convessa ed è definito dalla porzione di piano delimitata dalla intersezione di quattro ellissi e due iperboli.

SUMMARY. — By comparison with the «intrinsic curve» yield criterion, the «octahedral shear stress» criterion is criticized. Two modifications of this criterion are proposed and discussed: namely, the critical stress vector is taken to be equal to (i) the octahedral normal stress plus the corresponding maximum shear stress; (ii) the octahedral shear stress plus the corresponding maximum normal stress. The new crisis planes are defined and the shape of yield profiles in the principal stress plane found. In case (i), the profile is a curvilinear hexagon, whose edges are hyperbolae and whose vertices coincide with the vertices of the Tresca's hexagon; in case (ii), the yield profile is convex and limited by four ellipses and two hyperbolae.

Napoli - Istituto di Scienza delle Costruzioni della facoltà di ingegneria, ottobre 1961.

La soluzione flessionale delle volte scatolari

Nota del dott. ing. Bruno Barbarito

presentata dal socio ordinario Vincenzo Franciosi

(Adunanza del dì 4 novembre 1961)

SOMMARIO. — Il calcolo degli sforzi interni in una volta scatolare, normalmente, si esegue in regime di membrana considerando che le interazioni tra i fogli si riducano ai soli sforzi taglienti paralleli agli spigoli di saldatura dei fogli, attraverso l'equazione dei tre tagli. Nella presente nota si espone un metodo per determinare lo stato tensionale tenendo conto anche delle sollecitazioni di flessione. Un'applicazione numerica mostra la diversità dei risultati cui si perviene in regime di membrana ed attraverso il procedimento esposto. Si forniscono, anche tabelle da cui possono trarsi i valori dei coefficienti che compaiono nelle equazioni risolutrici.

1. — INTRODUZIONE.

Nel calcolo degli sforzi interni in una volta scatolare, usualmente, le ipotesi semplificative che si introducono sono le seguenti:

a) che ciascun foglio non opponga alcuna resistenza per deformazioni fuori dal proprio piano

b) che l'azione mutua che si trasmettono due fogli contigui lungo il loro spigolo di saldatura si possa ridurre soltanto ad una forza parallela allo spigolo stesso

c) che i carichi esterni siano localizzati lungo gli spigoli.

Le uniche incognite del problema, quindi, sono gli sforzi taglienti che si esplicano tra foglio e foglio in corrispondenza degli spigoli. La determinazione di questi sforzi si persegue scrivendo l'eguaglianza delle σ nel generico spigolo i tra i due fogli contigui i ed $i + 1$ (fig. 1).

Detto allora h_i ed s_i l'altezza e lo spessore del foglio i -esimo, S_i ed S_{i+1} le forze agenti nel piano dei fogli, per ogni spigolo si ottiene l'equazione:

$$(1) \quad T_{i-1} \frac{1}{s_i h_i} + 2 T_i \left(\frac{1}{s_i h_i} + \frac{1}{s_{i+1} h_{i+1}} \right) + T_{i+1} \frac{1}{s_{i+1} h_{i+1}} =$$
$$= 3 \left(\frac{S_i}{s_i h_i^2} + \frac{S_{i+1}}{s_{i+1} h_{i+1}^2} \right)$$

detta equazione dei tre tagli, equazioni il cui numero eguaglia quello degli incogniti sforzi taglianti, così che il problema resta risolto.

Nel presente studio si vuole tener conto che in realtà ogni foglio trasmette al foglio contiguo, lungo le generatrici comuni, oltre allo sforzo tagliante parallelo alla generatrice stessa, una distribuzione di momenti flettenti e di tagli in un piano ortogonale alla generatrice ed una distribuzione di sforzi normali nel piano del foglio.

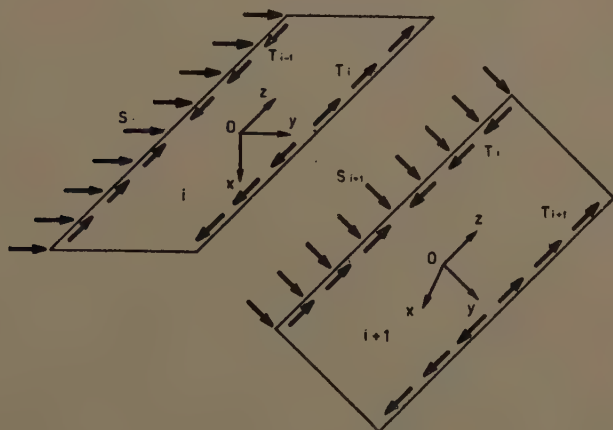


Fig. 1.

Le incognite, quindi, nel generico spigolo i sono sei (fig. 2): $N_{i,i}$, $T_{i,i}$, $N_{i+1,i}$, $T_{i+1,i}$, M_i , t_i , in cui il primo indice rappresenta il foglio ed il secondo lo spigolo.

Il problema si può risolvere scrivendo per ogni spigolo le seguenti sei equazioni esprimanti:

1 - l'eguaglianza delle rotazioni φ dei bordi dei due fogli concorrenti in uno spigolo

2-3 - le eguaglianze degli spostamenti v e w (rispettivamente lungo y e z) dei punti dei piani medi situati sullo spigolo comune

4 - l'eguaglianza lungo lo spigolo comune delle tensioni parallele ai bordi dei fogli

5-6 - le equazioni di equilibrio alla traslazione delle forze concorrenti in ciascun spigolo (l'equazione di equilibrio alla rotazione è identicamente soddisfatta ponendo $M_i = M_{i,i} = M_{i+1,i}$).

2. — LE EQUAZIONI RISOLUTRICI.

Si considera una generica volta scatolare (fig. 2) e si numerano, a partire da sinistra, gli spigoli indicando con i il foglio collegante lo spigolo $i-1$ con lo spigolo i . Per ogni foglio si assume una terna di assi cartesiani x, y, z

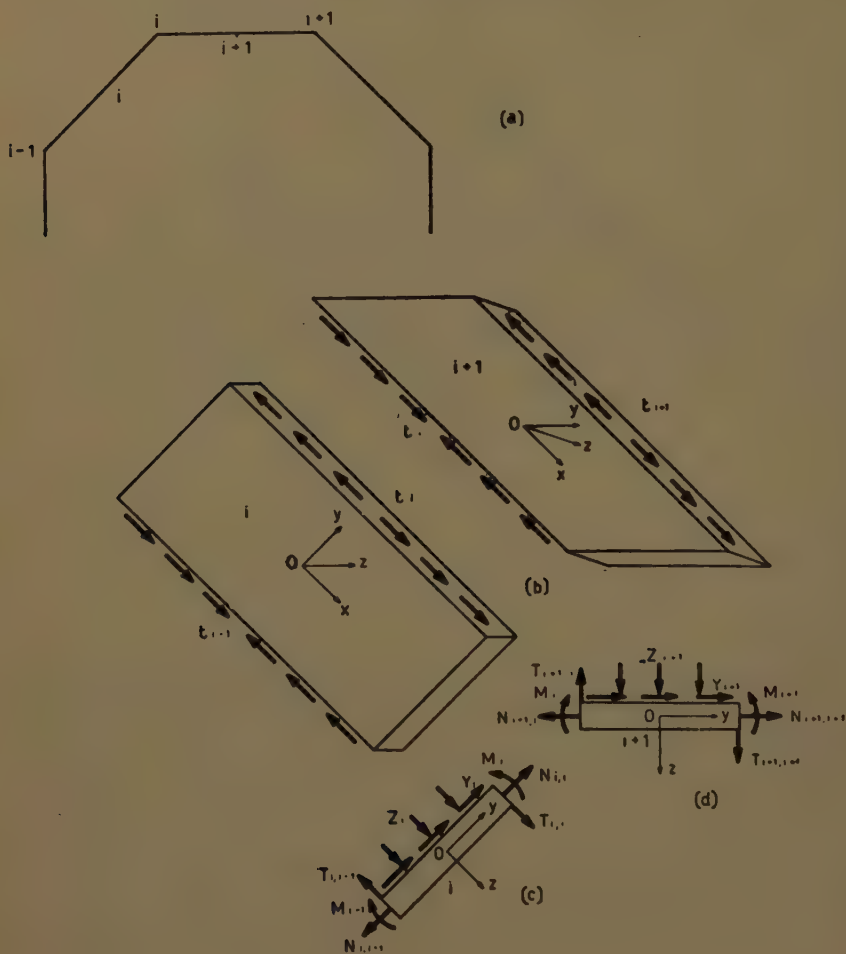


Fig. 2.

(fig. 2b), con l'origine nel centro del piano medio, a cui vanno riferiti gli spostamenti dei punti del corrispondente foglio. I versi positivi delle caratteristiche sono quelli delle figure 2c e 2d. Le componenti degli spostamenti lungo l'asse y e lungo l'asse z , sono positive se hanno il verso positivo degli assi; per le rotazioni la convenzione è la stessa di quella dei momenti. L'angolo tra il foglio i ed $i+1$ si indica con $\alpha_{i,i+1}$.

Le sei equazioni risoltrici, per il generico nodo, simbolicamente si scrivono:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \varphi_{i,i} = - \varphi_{i+1,i} \\
 (3) \quad & w_{i,i} \operatorname{sen} \alpha_i + v_{i,i} \cos \alpha_i = v_{i+1,i} \\
 (4) \quad & w_{i,i} \cos \alpha_i - v_{i,i} \operatorname{sen} \alpha_i = w_{i+1,i} \\
 (5) \quad & \sigma_{i,i} = \sigma_{i+1,i} \\
 (6) \quad & N_{i,i} \cos \alpha_i + T_{i,i} \operatorname{sen} \alpha_i = N_{i+1,i} \\
 (7) \quad & T_{i,i} \cos \alpha_i - N_{i,i} \operatorname{sen} \alpha_i = T_{i+1,i}
 \end{aligned}$$

le quali, ove un nodo k si trovi sull'asse di simmetria, per questo si riducono alle seguenti tre:

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \varphi_{k,k} = 0 \\
 (9) \quad & v_{k,k} + w_{k,k} \operatorname{tang} \frac{\alpha_k}{2} = 0 \\
 (10) \quad & T_{k,k} = N_{k,k} \operatorname{tang} \frac{\alpha_k}{2} .
 \end{aligned}$$

Nella soluzione effettiva del problema tutti gli enti, forze e deformazioni, che appaiono nelle equazioni precedenti si sviluppano in serie di Fourier, così che le equazioni stesse vengono scritte per il generico termine dello sviluppo in serie con il vantaggio, caratteristico dello sviluppo in serie ortogonale, di poter migliorare l'approssimazione con l'aggiunta di termini successivi senza modificare i calcoli precedenti.

Nel caso particolare vedremo, infatti, come una ottima approssimazione sia già raggiunta, almeno per carichi uniformemente ripartiti, al primo termine dello sviluppo, essendo in generale i coefficienti degli enti derivanti dal carico (deformazioni e sollecitazioni) caratterizzati da un coefficiente sempre più piccolo di quello del termine del carico corrispondente.

Il carico esterno, supposto uniformemente distribuito e costante lungo x , si sviluppa in serie di Fourier:

$$(11) \quad q = \sum q_n \cos \frac{n \pi}{2 l} x = \sum q_n \cos \alpha_n x$$

in cui

$$(12) \quad q_n = \frac{4 q}{n \pi} \left(-1 \right)^{\frac{n-1}{2}} = \lambda_n q$$

$$(13) \quad \alpha_n = \frac{n \pi}{2 l}$$

con $\lambda_{n=1} = 1,27324$, $\lambda_{n=2} = -0,42435$, $\lambda_{n=3} = 0,25465$.

Gli spostamenti e le rotazioni prodotte da M e T si sviluppano in serie di Fourier e si determinano considerando i fogli come piastre appoggiate lungo i bordi paralleli ad y , con $1/m = 0$; gli spostamenti e le tensioni normali provocati dal carico esterno, dagli N e dai t si sviluppano anch'essi in serie, considerando i fogli come travi semplicemente appoggiate agli estremi.

Riferendosi al termine n -esimo si ha:

$$(14) \quad \begin{aligned} w_{i,t-1} = & \Delta_{i,t-1}^{Z_i} Z_i - \Delta_{i,t-1}^{M_{i-1}} M_{i-1} + \\ & + \Delta_{i,t-1}^{M_i} M_i - \Delta_{i,t-1}^{T_{i,t-1}} T_{i,t-1} + \Delta_{i,t-1}^{T_{i,t}} T_{i,t} \end{aligned}$$

$$(15) \quad \begin{aligned} w_{i,t} = & \Delta_{i,t}^{Z_i} Z_i + \Delta_{i,t}^{M_{i-1}} M_{i-1} + \\ & + \Delta_{i,t}^{M_i} M_i - \Delta_{i,t}^{T_{i,t-1}} T_{i,t-1} + \Delta_{i,t}^{T_{i,t}} T_{i,t} \end{aligned}$$

$$(16) \quad \begin{aligned} v_{i,t-1} = & \delta_{i,t-1}^{Y_i} Y_i - \delta_{i,t-1}^{N_{i,t-1}} N_{i,t-1} + \\ & + \delta_{i,t-1}^{N_{i,t}} N_{i,t} + \delta_{i,t-1}^{R_{i-1}} R_{i-1} + \delta_{i,t-1}^{R_i} R_i \end{aligned}$$

$$(17) \quad \begin{aligned} v_{i,t} = & \delta_{i,t}^{Y_i} Y_i - \delta_{i,t}^{N_{i,t-1}} N_{i,t-1} + \\ & + \delta_{i,t}^{N_{i,t}} N_{i,t} + \delta_{i,t}^{R_{i-1}} R_{i-1} + \delta_{i,t}^{R_i} R_i \end{aligned}$$

$$(18) \quad \varphi_{i,t-1} = \varphi_{i,t-1}^{M_{i-1}} M_{i-1} - \varphi_{i,t-1}^{M_i} M_i + \varphi_{i,t-1}^{T_{i,t-1}} T_{i,t-1} + \varphi_{i,t-1}^{T_{i,t}} T_{i,t}$$

$$(19) \quad \varphi_{i,t} = -\varphi_{i,t}^{M_{i-1}} M_{i-1} + \varphi_{i,t}^{M_i} M_i - \varphi_{i,t}^{T_{i,t-1}} T_{i,t-1} - \varphi_{i,t}^{T_{i,t}} T_{i,t}$$

$$(20) \quad \begin{aligned} \sigma_{i,t-1} = & -\sigma_{i,t-1}^{Y_i} Y_i + \sigma_{i,t-1}^{N_{i,t-1}} N_{i,t-1} - \\ & - \sigma_{i,t-1}^{N_{i,t}} N_{i,t} - \sigma_{i,t-1}^{R_{i-1}} R_{i-1} - \sigma_{i,t-1}^{R_i} R_i \end{aligned}$$

$$(21) \quad \sigma_{i,i} = \sigma_{i,i}^{Y_i} Y_i - \sigma_{i,i}^{N_{i,i-1}} N_{i,i-1} + \\ + \sigma_{i,i}^{N_{i,i}} N_{i,i} + \sigma_{i,i}^{R_{i-1}} R_{i-1} + \sigma_{i,i}^{R_i} R_i$$

in cui

$$(22) \quad a_i = \frac{l}{h_0}, \quad b_i = \frac{h_i}{h_0}, \quad c_i = \frac{s_i}{h_0}$$

$$(23) \quad \beta_i = \frac{n \pi h_i}{4 l}$$

$$(24) \quad R_i = \frac{2 l}{n \pi} t_i.$$

Sostituendo le espressioni trovate nelle (2), (3), (4), (5), (6), (7), le equazioni risoltrici si riducono a quattro ed assumono, per il generico nodo, le seguenti espressioni:

$$(25) \quad N_{i-1,i-1} \left[\Delta_{i,i}^{T_{i,i-1}} \text{sen} \alpha_{i-1} \text{sen} \alpha_i - \delta_{i,i}^{N_{i,i-1}} \cos \alpha_{i-1} \cos \alpha_i \right] + N_{i,i} \left[\delta_{i,i}^{N_{i,i}} + \delta_{i+1,i}^{N_{i+1,i}} \right] \cos \alpha_i - \\ - N_{i+1,i+1} \delta_{i+1,i}^{N_{i+1,i+1}} - T_{i-1,i-1} \left[\delta_{i,i}^{N_{i,i-1}} \text{sen} \alpha_{i-1} \cos \alpha_i + \Delta_{i,i}^{T_{i,i-1}} \cos \alpha_{i-1} \text{sen} \alpha_i \right] + \\ + T_{i,i} \left[\Delta_{i,i}^{T_{i,i}} + \delta_{i+1,i}^{N_{i+1,i}} \right] \text{sen} \alpha_i + M_{i-1} \Delta_{i,i}^{M_{i-1}} \text{sen} \alpha_i - M_i \Delta_{i,i}^{M_i} \text{sen} \alpha_i + \\ + R_{i-1} \delta_{i,i}^{R_{i-1}} \cos \alpha_i + R_i \left[\delta_{i,i}^{R_i} \cos \alpha_i - \delta_{i+1,i}^{R_{i+1}} \right] - R_{i+1} \delta_{i+1,i}^{R_{i+1}} = \\ = - Y_i \delta_{i,i}^{Y_i} \cos \alpha_i - Z_i \Delta_{i,i}^{Z_i} \text{sen} \alpha_i + Y_{i+1} \delta_{i+1,i}^{Y_{i+1}},$$

$$(26) \quad N_{i-1,i-1} \left[\Delta_{i,i}^{T_{i,i-1}} \text{sen} \alpha_{i-1} \cos \alpha_i + \delta_{i,i}^{N_{i,i-1}} \cos \alpha_{i-1} \text{sen} \alpha_i \right] - N_{i,i} \left[\delta_{i,i}^{N_{i,i}} + \Delta_{i+1,i}^{T_{i+1,i}} \right] \text{sen} \alpha_i + \\ + T_{i-1,i-1} \left[\delta_{i,i}^{N_{i,i-1}} \text{sen} \alpha_{i-1} \text{sen} \alpha_i - \Delta_{i,i}^{T_{i,i-1}} \cos \alpha_{i-1} \cos \alpha_i \right] + T_{i,i} \left[\Delta_{i,i}^{T_{i,i}} + \Delta_{i+1,i}^{T_{i+1,i}} \right] \cos \alpha_i - \\ - T_{i+1,i+1} \Delta_{i+1,i}^{T_{i+1,i+1}} + M_{i-1} \Delta_{i,i}^{M_{i-1}} \cos \alpha_i + M_i \left[\Delta_{i+1,i}^{M_{i+1}} - \Delta_{i,i}^{M_i} \cos \alpha_i \right] - \\ - M_{i+1} \Delta_{i+1,i}^{M_{i+1}} - R_{i-1} \delta_{i,i}^{R_{i-1}} \text{sen} \alpha_i - R_i \delta_{i,i}^{R_i} \text{sen} \alpha_i = \\ = Y_i \delta_{i,i}^{Y_i} \text{sen} \alpha_i - Z_i \Delta_{i,i}^{Z_i} \cos \alpha_i + Z_{i+1} \Delta_{i+1,i}^{Z_{i+1}},$$

$$\begin{aligned}
 & N_{i-1,i-1} \varphi_{i,i}^{T_{i,i-1}} \operatorname{sen} \alpha_{i-1} - N_{i,i} \varphi_{i+1,i}^{T_{i+1,i}} \operatorname{sen} \alpha_i - T_{i-1,i-1} \varphi_{i,i}^{T_{i,i-1}} \cos \alpha_{i-1} - \\
 (27) \quad & - T_{i,i} \left[\varphi_{i,i}^{T_{i,i}} - \varphi_{i+1,i}^{T_{i+1,i}} \cos \alpha_i \right] + T_{i+1,i+1} \varphi_{i+1,i}^{T_{i+1,i+1}} - M_{i-1} \varphi_{i,i}^{M_{i-1}} + \\
 & + M_i \left[\varphi_{i,i}^{M_i} + \varphi_{i+1,i}^{M_i} \right] - M_{i+1} \varphi_{i+1,i}^{M_{i+1}} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - N_{i-1,i-1} \sigma_{i,i}^{N_{i,i-1}} \cos \alpha_{i-1} + N_{i,i} \left[\sigma_{i,i}^{N_{i,i}} - \sigma_{i+1,i}^{N_{i+1,i}} \cos \alpha_i \right] + \\
 (28) \quad & + N_{i+1,i+1} \sigma_{i+1,i}^{N_{i+1,i+1}} - T_{i-1,i-1} \sigma_{i,i}^{N_{i,i-1}} \operatorname{sen} \alpha_{i-1} - \\
 & - T_{i,i} \sigma_{i+1,i}^{N_{i+1,i}} \operatorname{sen} \alpha_i + R_{i-1} \sigma_{i,i}^{R_{i-1}} + R_i \left[\sigma_{i,i}^{R_i} + \sigma_{i+1,i}^{R_i} \right] + \\
 & + R_{i+1} \sigma_{i+1,i}^{R_{i+1}} = - Y_i \sigma_{i,i}^{Y_i} - Y_{i+1} \sigma_{i+1,i}^{Y_{i+1}};
 \end{aligned}$$

per il nodo k , sull'asse di simmetria si riducono a due e diventano:

$$\begin{aligned}
 & N_{k-1,k-1} \left[\Delta_{k,k}^{T_{k,k-1}} \operatorname{sen} \alpha_{k-1} \operatorname{tang} \frac{\alpha_k}{2} - \delta_{k,k}^{N_{k,k-1}} \cos \alpha_{k-1} \right] + \\
 & + N_{k,k} \left[\delta_{k,k}^{N_{k,k}} + \Delta_{k,k}^{T_{k,k}} \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha_k}{2} \right] - \\
 (29) \quad & - T_{k-1,k-1} \left[\delta_{k,k}^{N_{k,k-1}} \operatorname{sen} \alpha_{k-1} + \Delta_{k,k}^{T_{k,k-1}} \cos \alpha_{k-1} \operatorname{tang} \frac{\alpha_k}{2} \right] + \\
 & + M_{k-1} \Delta_{k,k}^{M_{k-1}} \operatorname{tang} \frac{\alpha_k}{2} - M_k \Delta_{k,k}^{M_{k,k}} \operatorname{tang} \frac{\alpha_k}{2} + R_{k-1} \delta_{k,k}^{R_{k-1}} = \\
 & = - Y_k \delta_{k,k}^{Y_k} - Z_k \Delta_{k,k}^{Z_k} \operatorname{tang} \frac{\alpha_k}{2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & N_{k-1,k-1} \varphi_{k,k}^{T_{k,k-1}} \operatorname{sen} \alpha_{k-1} - N_{k,k} \varphi_{k,k}^{T_{k,k}} \operatorname{tang} \frac{\alpha_k}{2} - \\
 (30) \quad & - T_{k-1,k-1} \varphi_{k,k}^{T_{k,k-1}} \cos \alpha_{k-1} - M_{k-1} \varphi_{k,k}^{M_{k-1}} + M_k \varphi_{k,k}^{M_k} = 0;
 \end{aligned}$$

mentre le (26) e (27), per il nodo $k-1$ si trasformano nelle:

$$\begin{aligned}
 & N_{k-2,k-2} \left[\Delta_{k-1,k-1}^{T_{k-1,k-2}} \operatorname{sen} \alpha_{k-2} \cos \alpha_{k-1} + \delta_{k-1,k-1}^{N_{k-1,k-2}} \cos \alpha_{k-2} \operatorname{sen} \alpha_{k-1} \right] - \\
 & - N_{k-1,k-1} \left[\delta_{k-1,k-1}^{N_{k-1,k-1}} + \Delta_{k,k-1}^{T_{k,k-1}} \right] \operatorname{sen} \alpha_{k-1} - N_{k,k} \Delta_{k,k}^{T_{k,k}} \operatorname{tang} \frac{\alpha_k}{2} + \\
 & + T_{k-2,k-2} \left[\delta_{k-1,k-1}^{N_{k-1,k-2}} \operatorname{sen} \alpha_{k-2} \operatorname{sen} \alpha_{k-1} - \Delta_{k-1,k-1}^{T_{k-1,k-2}} \cos \alpha_{k-2} \cos \alpha_{k-1} \right] + \\
 (31) \quad & + T_{k-1,k-1} \left[\Delta_{k-1,k-1}^{T_{k-1,k-1}} + \Delta_{k,k}^{T_{k,k-1}} \right] \cos \alpha_{k-1} + M_{k-2} \Delta_{k-1,k-1}^{M_{k-2}} \cos \alpha_{k-1} + \\
 & + M_{k-1} \left[\Delta_{k,k-1}^{M_{k-1}} - \Delta_{k-1,k-1}^{M_{k-1}} \cos \alpha_{k-1} \right] - M_k \Delta_{k,k-1}^{M_k} - \\
 & - R_{k-2} \delta_{k-1,k-1}^{R_{k-2}} \operatorname{sen} \alpha_{k-1} - R_{k-1} \delta_{k-1,k-1}^{R_{k-1}} \operatorname{sen} \alpha_{k-1} = \\
 & = Y_{k-1} \delta_{k-1,k-1}^{Y_{k-1}} \operatorname{sen} \alpha_{k-1} - Z_{k-1} \Delta_{k-1,k-1}^{Z_{k-1}} \cos \alpha_{k-1} + Z_k \Delta_{k,k-1}^{Z_k}, \\
 & N_{k-2,k-2} \varphi_{k-1,k-1}^{T_{k-1,k-2}} \operatorname{sen} \alpha_{k-2} - N_{k-1,k-1} \varphi_{k,k-1} \operatorname{sen} \alpha_{k-1} - \\
 & - N_{k,k} \varphi_{k,k-1}^{T_{k,k}} \operatorname{tang} \frac{\alpha_k}{2} - T_{k-2,k-2} \varphi_{k-1,k-1}^{T_{k-1,k-2}} \cos \alpha_{k-2} - \\
 (32) \quad & - T_{k-1,k-1} \left[\varphi_{k-1,k-1}^{T_{k-1,k-1}} - \varphi_{k,k-1}^{T_{k,k-1}} \cos \alpha_{k-1} \right] - M_{k-2} \varphi_{k-1,k-1}^{M_{k-2}} + \\
 & + M_{k-1} \left[\varphi_{k-1,k-1}^{M_{k-1}} + \varphi_{k,k-1}^{M_{k-1}} \right] - M_k \varphi_{k,k-1}^{M_k} = 0.
 \end{aligned}$$

in cui le espressioni dei coefficienti sono riportate in appendice assieme ad una loro tabellazione, per vari rapporti di $h/1$.

Ricavati attraverso il sistema di equazioni i valori delle caratteristiche della sollecitazione $N_{i,i}$, $T_{i,i}$, M_i , R_i mediante le (6) e (7) si determinano i valori delle $N_{i+1,i}$ e $T_{i+1,i}$; le (20) e (21), infine, forniscono le σ nei vari spigoli.

3. — APPLICAZIONE NUMERICA.

Al fine di rilevare la diversità di risultati cui si perviene in regime di membrana e con il procedimento sopra esposto, si considera il semplice

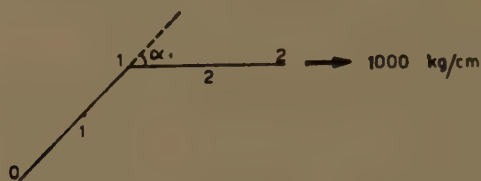


Fig. 3.

caso di figura 3, costituito da due soli fogli, che si studia per diversi valori di $h/1$ e dell'angolo α_1 tra i due fogli (*).

$$(33) \quad \begin{aligned} N_{1,1} \left[\delta_{1,1}^{N_{1,1}} + \delta_{2,1}^{N_{2,1}} \right] \cos \alpha_1 - N_{2,2} \delta_{2,1}^{N_{2,2}} + T_{1,1} \left[\Delta_{1,1}^{T_{1,1}} + \delta_{2,1}^{N_{2,1}} \right] \sin \alpha_1 - \\ - M_1 \Delta_{1,1}^{M_1} \sin \alpha_1 + R_1 \left[\delta_{1,1}^{R_1} \cos \alpha_1 - \delta_{2,1}^{R_1} \right] = 0, \end{aligned}$$

$$(34) \quad \begin{aligned} - N_{1,1} \left[\delta_{1,1}^{N_{1,1}} + \Delta_{1,1}^{T_{2,1}} \right] \sin \alpha_1 + T_{1,1} \left[\Delta_{1,1}^{T_{1,1}} + \Delta_{2,1}^{T_{2,1}} \right] \cos \alpha_1 + \\ + M_1 \left[\Delta_{2,1}^{M_1} - \Delta_{1,1}^{M_1} \cos \alpha_1 \right] - R_1 \delta_{1,1}^{R_1} \sin \alpha_1 = 0, \end{aligned}$$

$$(35) \quad - N_{1,1} \varphi_{2,1}^{T_{2,1}} \sin \alpha_1 - T_{1,1} \left[\varphi_{1,1}^{T_{1,1}} - \varphi_{2,1}^{T_{2,1}} \cos \alpha_1 \right] + M_1 \left[\varphi_{1,1}^{M_1} + \varphi_{2,1}^{M_1} \right] = 0,$$

$$(36) \quad \begin{aligned} N_{1,1} \left[\sigma_{1,1}^{N_{1,1}} - \sigma_{2,1}^{N_{2,1}} \cos \alpha_1 \right] + \\ + N_{2,2} \sigma_{2,1}^{N_{2,2}} - T_{1,1} \sigma_{2,1}^{N_{2,1}} \sin \alpha_1 + R_1 \left[\sigma_{1,1}^{R_1} + \sigma_{2,1}^{R_1} \right] = 0. \end{aligned}$$

(*) Si osservi che nel particolare esempio che si considera, essendo il piano di carico coincidente con quello di uno dei due fogli, nella teoria approssimata di membrana lo stato tensionale risulterebbe indipendente dall'angolo tra i fogli stessi. Nell'applicazione numerica considerata si pone invece particolarmente in luce l'influenza di detto angolo mediante tabellazioni e diagrammi.

I valori delle tensioni normali (kg/cm^2) ottenuti per $h/l = 0,15$, $h/l = 0,30$, $h/l = 0,70$ sono trascritti nella tabella I, nella quale l'ultima riga riporta le σ prodotte dai soli sforzi taglienti paralleli agli spigoli; nelle

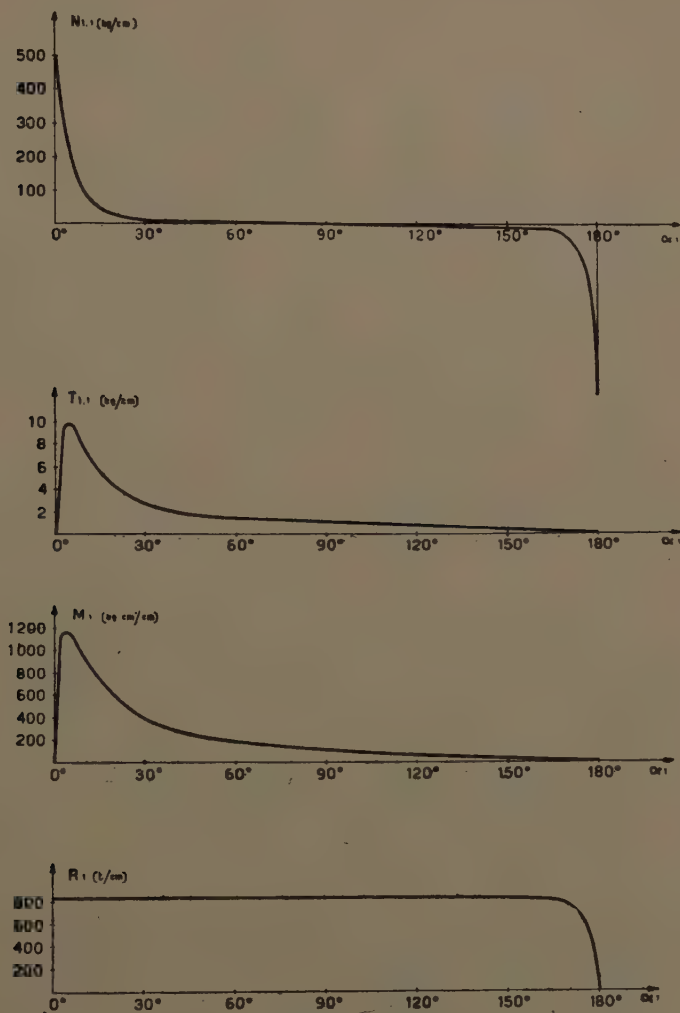


Fig. 4.

figure 4 e 5 sono disegnati, rispettivamente, i grafici che mostrano il variare delle $N_{i,i}$, $T_{i,i}$, M_i , R_i e delle σ , per $h/l = 0,30$, al variare dell'angolo α , tra 0° e 180° .

Dalla tabella e dai grafici si nota che per angoli sufficientemente discosti da 0° e 180° le tensioni, prodotte dai soli sforzi taglienti paralleli agli spigoli,

coincidono con quelle calcolate tenendo conto di tutte le caratteristiche di sollecitazione; per angoli prossimi a 0° e 180° , invece, le altre caratteristiche

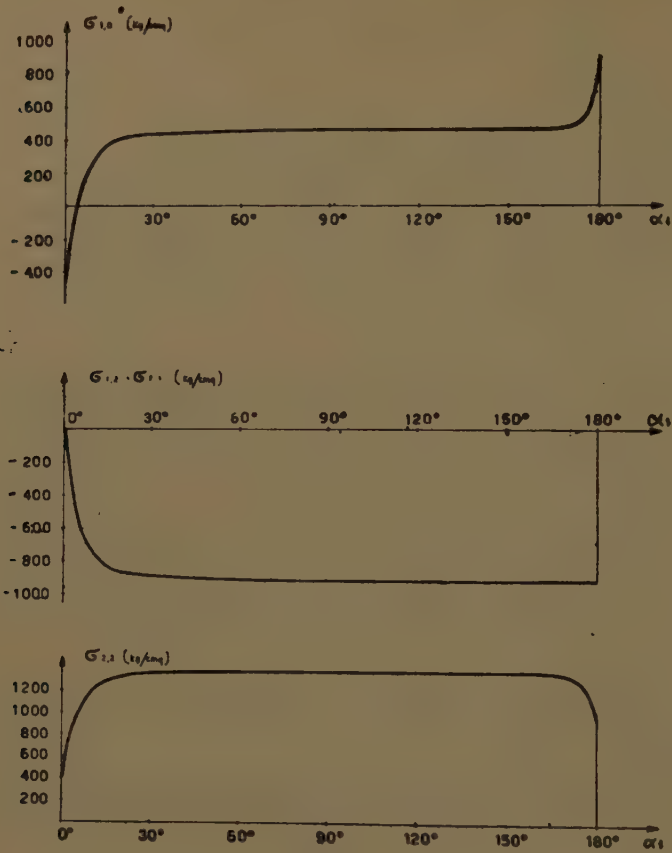


Fig. 5.

influenzano notevolmente le tensioni normali facendo assumere ad esse valori molto diversi da quelli calcolati con la teoria di membrana.

Napoli, Istituti di Scienza delle Costruzioni e Ponti.

TABELLA I.

α	$h/l = 0,15$			$h/l = 0,30$			$h/l = 0,70$		
	$\sigma_{1,0}$	$\sigma_{1,1} = \sigma_{2,1}$	$\sigma_{2,2}$	$\sigma_{1,0}$	$\sigma_{1,1} = \sigma_{2,1}$	$\sigma_{2,2}$	$\sigma_{1,0}$	$\sigma_{1,1} = \sigma_{2,1}$	$\sigma_{2,2}$
0°	— 2254	0	2254	— 455	0	455	— 104	0	104
1°				— 416	— 40	499			
2°				— 310	— 146	603			
3°				— 163	— 282	788			
4°				— 61	— 395	853			
5°				97	— 554	1011			
10°	1471	— 3718	5982				72	— 176	280
15°	1867	— 4115	6380	378	— 834	1292	89	— 193	297
30°	2151	— 4400	6658	435	— 892	1348	100	— 204	309
60°	2227	— 4477	6740	451	— 908	1368	103	— 207	311
90°	2243	— 4497	6757	455	— 910	1368	104	— 208	312
120°				456	— 910	1367			
150°				459	— 910	1365			
165°				466	— 910	1358			
175°				532	— 910	1293			
176°				565	— 910	1259			
177°				620	— 910	1204			
178°				702	— 910	1122			
179°				795	— 910	1029			
180°				910	— 910	910			
α qualunque ipotesi membrana	2249	— 4497	6757	455	— 910	1368	104	— 208	312

APPENDICE

$$\delta_{i,i-1}^{Y_i} = \delta_{i,i}^{Y_i} = \frac{\cos a_n x}{a_n^4 E I_x}$$

$$\delta_{i,i-1}^{N_{i,i-1}} = \delta_{i,i}^{N_{i,i}} = \frac{\cos a_n x}{a_n^4 E I_x}$$

$$\delta_{i,i-1}^{N_{i,i}} = \delta_{i,i}^{N_{i,i-1}} = \frac{\cos a_n x}{a_n^4 E I_x}$$

$$\delta_{i,i-1}^{R_{i,i-1}} = \delta_{i,i-1}^{R_i} = \delta_{i,i}^{R_{i-1}} = \delta_{i,i}^{R_i} = \frac{h_0 b_i}{2 a_n^2 E I_x} \cos a_n x$$

$$\Delta_{i,i-1}^{Z_i} = \Delta_{i,i}^{Z_i} = \frac{\cos a_n x}{a_n^4 E I_y}$$

$$\Delta_{i,i-1}^{M_{i,i-1}} = \Delta_{i,i}^{M_i} = k_{1,i} \frac{\cos a_n x}{2 a_n^3 E I_x}$$

$$\Delta_{i,i-1}^{M_i} = \Delta_{i,i}^{M_{i-1}} = k_{2,i} \frac{\cos a_n x}{2 a_n^3 E I}$$

$$\Delta_{i,i-1}^{T_{i,i-1}} = \Delta_{i,i}^{T_{i,i}} = k_{3,i} \frac{\cos a_n x}{2 a_n^3 E I_x}$$

$$\Delta_{i,i-1}^{T_{i,i}} = \Delta_{i,i}^{T_{i,i-1}} = k_{4,i} \frac{\cos a_n x}{2 a_n^3 E I_x}$$

$$\varphi_{i,i-1}^{M_{i,i-1}} = \varphi_{i,i}^{M_i} = \mu_{1,i} \frac{\cos a_n x}{2 a_n E I_x}$$

$$\varphi_{i,i-1}^{M_i} = \varphi_{i,i}^{M_{i-1}} = \mu_{2,i} \frac{\cos a_n x}{2 a_n E I_x}$$

$$\varphi_{i,i-1}^{T_{i,i-1}} = \varphi_{i,i}^{T_{i,i}} = \mu_{3,i} \frac{\cos a_n x}{2 a_n^2 E I_x}$$

$$\varphi_{i,i-1}^{T_{i,i}} = \varphi_{i,i}^{T_{i,i-1}} = \mu_{4,i} \frac{\cos a_n x}{2 a_n^2 E I_x}$$

$$\sigma_{i,i-1}^{Y_i} = \sigma_{i,i}^{Y_i} = \frac{h_0 b_i}{2 a_n^3 I_s} \cos a_n x$$

$$\sigma_{i,i-1}^{R_{i-1}} = \sigma_{i,i}^{R_i} = \frac{4 \cos a_n x}{c_i b_i h_0^2}$$

$$\sigma_{i,i-1}^{R_i} = \sigma_{i,i}^{R_{i-1}} = \frac{2 \cos a_n x}{c_i b_i h_0^2}$$

$$\sigma_{i,i-1}^{N_{i,i-1}} = \sigma_{i,i}^{N_{i,i}} = \frac{b_i h_0}{2 a_n^3 I_s} \cos a_n x$$

$$\sigma_{i,i-1}^{N_{i,i}} = \sigma_{i,i}^{N_{i,i-1}} = \frac{b_i h_0}{2 a_n^3 I_s} \cos a_n x$$

$$k_{1,i} = \frac{sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} + \beta_{n_i}}{3 sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} + \beta_{n_i}} + \frac{sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} - \beta_{n_i}}{3 sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} - \beta_{n_i}}$$

$$k_{2,i} = \frac{sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} + \beta_{n_i}}{3 sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} + \beta_{n_i}} - \frac{sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} - \beta_{n_i}}{3 sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} - \beta_{n_i}}$$

$$k_{3,i} = \frac{2 sh^2 \beta_{n_i}}{3 sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} + \beta_{n_i}} + \frac{2 ch^2 \beta_{n_i}}{3 sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} - \beta_{n_i}}$$

$$k_{4,i} = -\frac{2 sh^2 \beta_{n_i}}{3 sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} + \beta_{n_i}} + \frac{2 ch^2 \beta_{n_i}}{3 sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} - \beta_{n_i}}$$

$$\mu_{1,i} = \frac{2 ch^2 \beta_{n_i}}{3 sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} + \beta_{n_i}} + \frac{2 sh^2 \beta_{n_i}}{3 sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} - \beta_{n_i}}$$

$$\mu_{2,i} = \frac{2 ch^2 \beta_{n_i}}{3 sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} + \beta_{n_i}} - \frac{2 sh^2 \beta_{n_i}}{3 sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} - \beta_{n_i}}$$

$$\mu_{3,i} = \frac{sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} + \beta_{n_i}}{3 sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} + \beta_{n_i}} + \frac{sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} - \beta_{n_i}}{3 sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} - \beta_{n_i}}$$

$$\mu_{4,i} = \frac{sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} + \beta_{n_i}}{3 sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} + \beta_{n_i}} - \frac{sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} - \beta_{n_i}}{3 sh \beta_{n_i} ch \beta_{n_i} - \beta_{n_i}}$$

h/1	k ₁	k ₂	k ₃	k ₄	μ ₁	μ ₂
0,025	0,50001	0,50001	50,96250	50,94290	25,49563	25,45641
0,050	0,50038	0,49936	25,46505	25,43564	12,78147	12,70301
0,075	0,50061	0,49897	16,99292	16,96351	8,56600	8,44852
0,100	0,50153	0,49745	12,73261	12,69338	6,46404	6,30760
0,125	0,50268	0,49552	10,17410	10,12505	5,44004	5,24486
0,150	0,50342	0,49428	8,48876	8,42999	4,39037	4,15691
0,175	0,50463	0,49225	7,34472	7,20772	3,80797	3,53649
0,200	0,50602	0,48988	6,36647	6,28825	3,37698	3,06754
0,250	0,50929	0,48437	5,09407	4,99653	2,78698	2,40410
0,300	0,51316	0,47774	4,24595	4,12922	2,40815	1,95365
0,350	0,51758	0,47010	3,64051	3,50478	2,14927	1,62567
0,400	0,52250	0,46152	3,33880	3,03482	1,96473	1,37483
0,450	0,52781	0,45213	3,00785	2,66163	1,82924	1,17610
0,500	0,53353	0,44185	2,74544	2,36266	1,72778	1,01486
0,550	0,53963	0,43120	2,53379	2,11485	1,64972	0,87982
0,600	0,54547	0,41987	2,36109	1,90667	1,58951	0,76629
0,650	0,55168	0,40808	2,21808	1,72882	1,54239	0,66925
0,700	0,55795	0,39593	2,09839	1,57497	1,50519	0,58555
0,750	0,56422	0,38352	1,99730	1,44044	1,47557	0,51279
0,800	0,57044	0,37090	1,91131	1,32175	1,45184	0,44918
0,850	0,57655	0,35817	1,83769	1,21621	1,43270	0,39332
0,900	0,58253	0,34533	1,77445	1,12193	1,41722	0,34434
0,950	0,58829	0,33263	1,71963	1,03675	1,40452	0,30064
1,000	0,59387	0,31993	1,67216	0,95984	1,39411	0,26219
1,100	0,60434	0,29494	1,59485	0,82623	1,37842	0,19792
1,200	0,61379	0,27073	1,53577	0,71439	1,36747	0,14737
1,300	0,62218	0,24756	1,49037	0,61979	1,35966	0,10772
1,400	0,62952	0,22560	1,45526	0,53898	1,35394	0,07654
1,500	0,63588	0,20494	1,42805	0,46957	1,34964	0,05228
1,600	0,64130	0,18562	1,40690	0,40964	1,34636	0,03348
1,700	0,64589	0,16767	1,39047	0,35769	1,34381	0,01909
1,800	0,64972	0,15111	1,37767	0,31251	1,34178	0,00816
1,900	0,65296	0,13586	1,36771	0,27313	1,34016	0,00000
2,000	0,65561	0,12190	1,35992	0,23870	1,33883	— 0,00601

BIBLIOGRAFIA

- [1] JOHN E. GOLDBERG-MOWARL L. LAVE. *Theory of prismatic folded plate structures*. Mémoires A. I. P. C., 1957, pag. 59.
- [2] G. KRALL. *Questioni di matematica applicata*. Bologna, Zanichelli, 1939.
- [3] V. Z. VLASOV. *Cylindrical shells and new ways of developing thin-walled spatial systems in structural mechanics*. Proceedings of the second Symposium on Concrete Shell Roof Construction, 1-3 July 1957, Teknisk Ukeblad Oslo, pag. 121.
- [4] A. R. RJANITSYN. *Calcul à la rupture et plasticité des constructions*. Paris, Eyrolles Ed., 1959.

RIASSUNTO. — Il calcolo degli sforzi interni in una volta scatolare, normalmente si esegue in regime di membrana considerando che le interazioni tra i fogli si riducano ai soli sforzi taglianti paralleli agli spigoli di saldatura dei fogli, attraverso l'equazione dei tre tagli. Nella presente nota si espone un metodo per determinare lo stato tensionale tenendo conto anche delle sollecitazioni di flessione, esprimendo in serie di Fourier tutti gli enti, forze e deformazioni, che compaiono nelle equazioni che risolvono il problema. Si svolge, poi, un esempio numerico dal quale si rileva che per angoli tra i fogli sufficientemente discosti da 0° e 180° lo stato tensionale calcolato in regime di membrana coincide con quello determinato tenendo conto di tutte le caratteristiche della sollecitazione.

SUMMARY. — The stresses in a folded plate are usually calculated according to the membrane theory by assuming that the only interactions between the component plates are shear forces along the common edges. A new method is herein presented, which allows to solve a folded plate, taking into account the bending stresses as well. All forces and deformations in the solving equations are expanded in Fourier series. A numerical example is developed: it is noted that the membrane theory and the proposed method give stresses which are practically coincident unless the angle between two consecutive plates is near to 0° or 180° .

Sulla determinazione del peso molecolare di polimeri dell'acido salicilico

Nota del socio ordin. Mario Covello e del dott. Giuseppe Ciampa

(Adunanza del dì 4 novembre 1961)

Come abbiamo dimostrato sul piano sperimentale in una precedente nota ¹⁾, il riscaldamento dell'acido acetilsalicilico in opportune condizioni conduce alla formazione di un polimero avente struttura lineare, costituito dal concatenamento di più molecole di acido salicilico e caratterizzato dall'avere dei gruppi carbossilici quali gruppi terminali.

La conoscenza del peso molecolare di questi polimeri è un dato chimico-fisico interessante per la loro caratterizzazione e per la definizione del loro impiego.

La possibilità di metilare i gruppi carbossilici terminali può fornire un metodo per la determinazione del loro peso molecolare.

Questo metodo però, se da una parte è utile per la definizione della struttura da assegnare a questi composti, d'altra parte può risultare lungo e non molto preciso.

Per ovviare a tali inconvenienti, abbiamo messo a punto un metodo per la determinazione del peso molecolare di questi polimeri, basato sulla titolazione potenziometrica dei gruppi terminali di queste sostanze in solventi non acquosi.

La titolazione dei gruppi terminali, viene frequentemente impiegata nella determinazione dei pesi molecolari di polimeri di condensazione, quali ad es. le poliammidi ed i poliesteri, sostanze dotate di gruppi funzionali caratteristici (2-5).

In questa nota, diamo conto dei risultati ottenuti dalla sperimentazione effettuata.

PARTE SPERIMENTALE.

I campioni di polimero a diverso peso molecolare sono stati preparati riscaldando acido acetilsalicilico puro a 175°C in corrente di azoto.

I prodotti ottenuti, sono stati accuratamente purificati sciogliendoli ripetutamente in acetone e riprecipitandoli con acqua, allo scopo di allontanare l'acido salicilico che, come abbiamo osservato si forma nel processo di condensazione.

Come solvente dei vari campioni è stato adoperato una miscela di benzolo-alcool metilico (4:1; v/v) e come agenti titolanti il metilato potassico e l'idrossido di tetrabutylammonio ambedue disciolti in una miscela di benzolo-alcool metilico.

Abbiamo preferito il metilato potassico al metilato sodico, in quanto il primo è più solubile in benzolo ed inoltre permette di impiegare una minor quantità di alcool metilico per la soluzione.

La presenza di molto alcool metilico provoca innanzitutto la precipitazione del polimero dalla soluzione e inoltre, avendo a che fare con sostanze a debole comportamento acido fa diminuire la sensibilità del punto finale della titolazione.

Preparazione del metilato potassico in soluzione di benzolo-alcool metilico. — Per preparare il metilato potassico 0,1 M, sono stati disciolti 4 g. di potassio metallico tagliato di recente, in una miscela di 40 cc. di alcool metilico e 50 cc. di benzolo anidro, avendo la precauzione di aggiungere il potassio in piccoli pezzi con una costante agitazione e raffreddando in ghiaccio il recipiente per rallentare la violenza della reazione.

La soluzione così ottenuta è stata diluita per addizioni successive di alcool metilico e di benzolo anidro.

L'alcool metilico è stato aggiunto nella minor quantità possibile e solo quando la soluzione benzenica è diventata torbida.

La soluzione così preparata, portata al volume di 1000 cc., è stata conservata in recipiente di Pirex, escludendo il contatto dell'anidride carbonica atmosferica.

Il controllo del titolo della soluzione di metilato potassico è stato effettuato con una soluzione a titolo noto di acido benzoico disciolto in benzolo-alcool metilico (4:1; v/v).

L'anidride carbonica eventualmente presente nella soluzione dell'acido benzoico è stata allontanata facendo gorgogliare in essa azoto.

La titolazione stessa è stata effettuata in corrente di questo gas.

Preparazione dell'idrossido di tetrabutylammonio in soluzione di benzolo-alcool metilico. — La soluzione di idrossido di tetrabutylammonio è stata preparata sciogliendo in matraccio 40 g. di ioduro di tetrabutylammonio puro in 90 cc. di alcool metilico.

Successivamente sono stati aggiunti 20 g. di ossido di argento; il matraccio è stato tappato e sottoposto a forte agitazione per circa 2 h.

Il liquido è stato centrifugato per allontanare il precipitato e saggiato per la presenza dello ione iodidrico, il quale è stato definitivamente allontanato per ulteriore aggiunta di 2 g. di ossido di argento, agitazione per 1/2 h e filtrazione su setto di vetro poroso.

La soluzione così preparata è stata portata a 1000 cc. in modo da avere un rapporto benzolo-alcool metilico di 4:1 (v/v).

Mediante il gorgogliamento di una corrente di azoto puro attraverso la soluzione, è stata allontanata l'anidride carbonica.

Il controllo del titolo della soluzione di idrossido di tetrabutylammonio è stato anch'esso effettuato con una soluzione a titolo noto di acido benzoico disciolto in benzolo-alcool metilico (4:1; v/v).

Titolazione dei campioni. — Le nostre determinazioni sono state condotte su due campioni, i quali essendo stati ottenuti variando opportunamente la durata del riscaldamento dell'acido acetilsalicilico, dovevano avere presumibilmente peso molecolare diverso.

Ciascuno dei campioni è stato accuratamente pesato ($0,2 \div 0,8 \text{ g} \pm 0,0001$) in un matraccio e sciolto con 25 cc. di una miscela benzolo-metanolo 4:1 (v/v); ciascuno dei solventi era perfettamente anidro.

Il matraccio è stato chiuso mediante un tappo provvisto di un foro per l'adduzione dell'azoto e di un altro per l'uscita; inoltre la parte centrale del tappo era anch'essa forata per l'introduzione del gambo della buretta.

Lateralmente al matraccio erano sistemati gli elettrodi.

Prima di effettuare la titolazione è stata scacciata l'aria dal matraccio mediante una corrente di azoto; successivamente si è proceduto all'aggiunta graduale del titolante, agitando la soluzione mediante un agitatore elettromagnetico.

Il solvente utilizzato per la dissoluzione del polimero era stato preventivamente privato dell'anidride carbonica, mediante lavaggio con azoto; inoltre per ogni serie di misure era stata effettuata una titolazione del solvente stesso sempre in corrente di azoto ed impiegando bleu di timolo come indicatore; generalmente erano sufficienti 0,05 cc. di titolante perchè l'indicatore virasse dal giallo al bleu chiaro.

Di questo dato si è tenuto conto nella valutazione finale del peso molecolare.

Misura del punto finale di titolazione. — È stata tentata la rivelazione del punto finale di titolazione mediante un indicatore quale il bleu di timolo.

L'impiego di un tale indicatore però non ha permesso di ottenere dei dati soddisfacenti, a causa della colorazione che assume già la soluzione del polimero in presenza di metilato di potassio o di idrossido di tetrabutylammonio e dell'impossibilità quindi di seguire il viraggio dell'indicatore stesso.

A causa di tali inconvenienti, abbiamo pensato di impiegare un metodo potenziometrico per la determinazione del punto finale nelle titolazioni.

A tale scopo, è stato adoperato uno strumento della ditta Radiometer tipo E 32, equipaggiato con una coppia di elettrodi calomelano-vetro, che abbiamo trovato ben rispondente allo scopo prefissoci.

RISULTATI E DISCUSSIONE.

Con i risultati sperimentalmente ottenuti, sono state tracciate le curve integrali di titolazione (Fig. 1, 3, 5, 7) e le derivate prime ottenute graficamente dalle curve integrali precedenti.

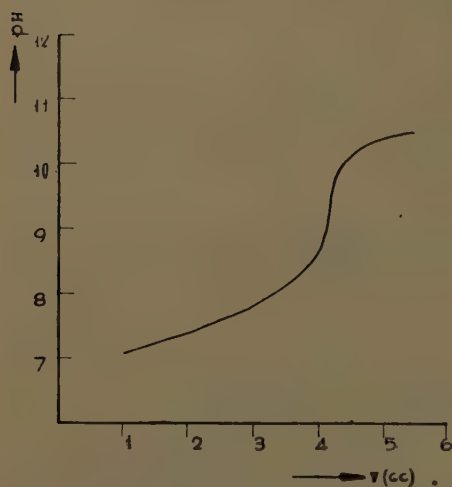


Fig. 1. — Campione A. Curva integrale di titolazione con metilato di potassio.

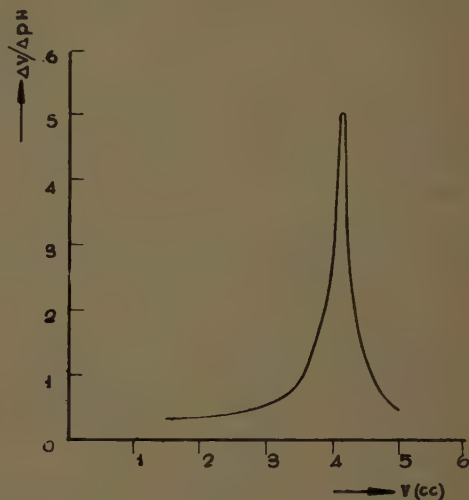


Fig. 2. — Campione A. Curva differenziale di titolazione con metilato di potassio.

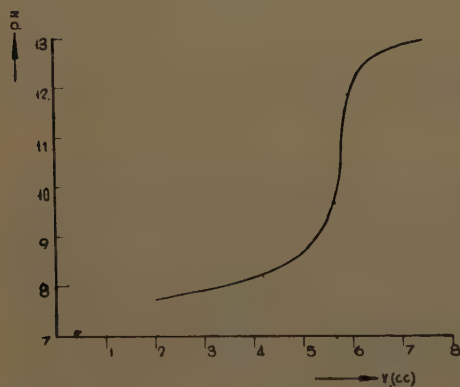


Fig. 3. — Campione A. Curva integrale di titolazione con idrossido di tetra-butilammonio.

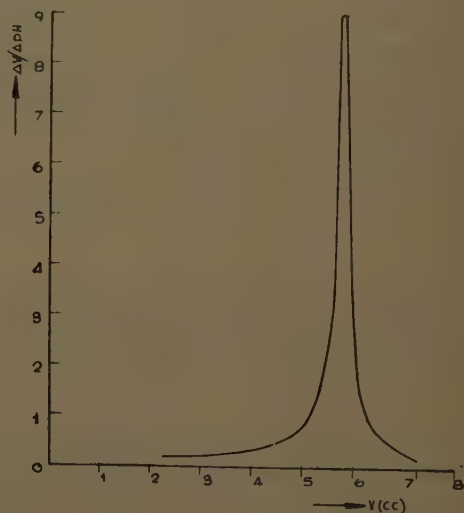


Fig. 4. — Campione A. Curva differenziale di titolazione con idrossido di tetra-butilammonio.

Le derivate riportate in grafico in funzione del volume di titolante forniscono una curva con un sol massimo (fig. 2, 4, 6, 8) in corrispondenza del volume necessario per la titolazione dei gruppi carbossilici.

Dalla conoscenza del numero di equivalenti di titolante (E) e del peso

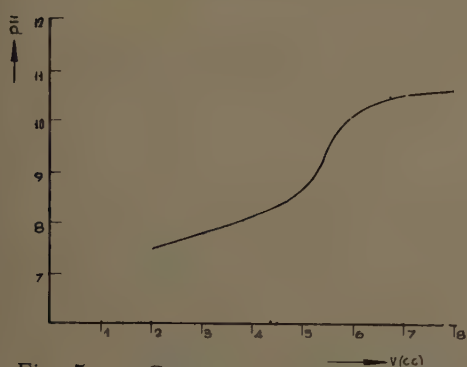


Fig. 5. — Campione B. Curva integrale di titolazione con metilato di potassio.

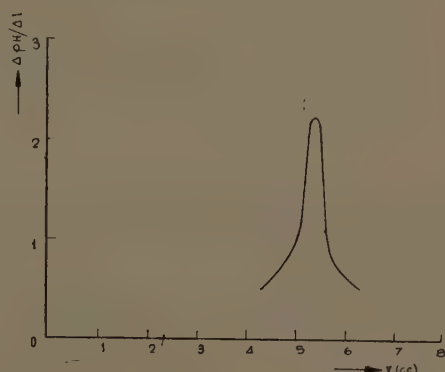


Fig. 6. — Campione B. Curva differenziale di titolazione con metilato di potassio.

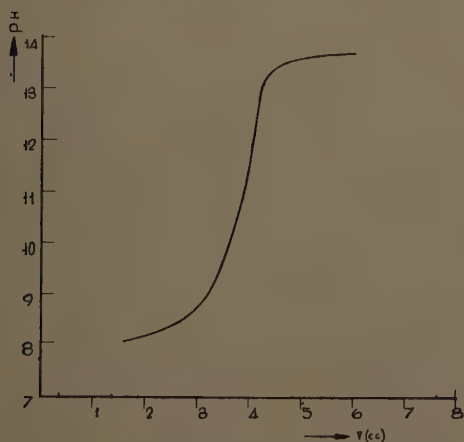


Fig. 7. — Campione B. Curva integrale di titolazione con idrossido di tetrabutylammonio.

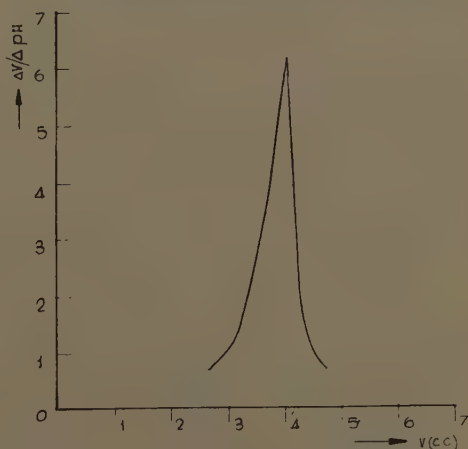


Fig. 8. — Campione B. Curva differenziale di titolazione con idrossido di tetrabutylammonio.

di sostanza impiegato (W), si può risalire al peso molecolare medio numerico del campione come segue:

$$M = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\infty} M_i N_i \right)}{\sum_{i=1}^{\infty} N_i} = \frac{W}{E}$$

Come ben si vede dall'esame della tabella n. 1, i risultati ottenuti sia impiegando come agente titolante il metilato di potassio che l'idrossido di tetrabutylammonio, sono tra di loro in un accordo soddisfacente.

L'esame delle curve pone in evidenza che, impiegando idrossido di tetrabutylammonio, si ha una variazione del pH più accentuata nella vicinanza del punto finale di titolazione il che permette di ottenere una maggiore precisione della misura stessa.

TABELLA n. 1.

Campione	Agente titolante	Peso molecolare medio numerico \bar{M}_n
A	Metilato di potassio	707
A	Idrossido di tetrabutylammonio	705
B	Metilato di potassio	1485
B	Idrossido di tetrabutylammonio	1480

Si può concludere, pertanto, che il metodo potenziometrico da noi messo a punto permette la valutazione del peso molecolare medio numerico di polimeri eterogenei dell'acido salicilico che si ottengono nel riscaldamento, in condizioni sperimentali opportune, dell'acido acetilsalicilico.

I risultati ottenuti sono soddisfacenti e lasciano sperare che un tale metodo di indagine, con una opportuna scelta dei solventi, possa essere impiegato proficuamente nella determinazione di altri pesi molecolari e quindi della stessa curva di distribuzione molecolare dei polimeri che si ottengono dall'acido acetilsalicilico, monomero tanto interessante dal punto di vista chimico-farmaceutico.

BIBLIOGRAFIA

- 1) M. COVELLO, G. CIAMPA. *Rend. Accad. Sc. Fis. e Mat. (Soc. Naz. Sc. lett. Arti Napoli)*, **27**, 573 (1960).
- 2) I. E. WALZ, G. B. TAYLOR. *Anal Chem.*, **19**, 448 (1947).
- 3) S. BASU. *J. Polymer. Sc.* **5**, 735 (1950).
- 4) L. MANDELKERN. *Chem. Rev.* **56**, 903, (1956).
- 5) P. FIJOLKA, I. LENZ, F. RUNGE. *Makromol. Chem.* **23**, 60 (1957).

RIASSUNTO. — È stato messo a punto un metodo potenziometrico per la determinazione del peso molecolare medio numerico di polimeri dell'acido salicilico in solventi non acquosi.

Sono stati impiegati come agenti titolanti il metilato di potassio e l'idrossido di tetrabutylammonio; i risultati ottenuti sono tra di loro concordanti.

SUMMARY. — A potentiometric method has been designed for determining the numerical average molecular weight of salicylic acid polymers in non-aqueous solvents.

Potassium metoxide and tetrabutylammonium hydroxide, were employed as titration agents; the results obtained are mutually congruent.

Nuovi iodo-organici di sintesi.

Sulla preparazione di acidi iodoalchilossibenzoici e derivati (*).

*Nota del socio ordinario Mario Covello
e dei dott. Eugenio Piscopo ed Enrico Abignente*

(Adunanza del dì 4 novembre 1961)

Le indagini chimico-farmacologiche relative ai derivati degli acidi alchilossibenzoici, iniziate oltre venti anni fa particolarmente ad opera di ROHMANN e SCHEURLE (1) e di PIERCE e coll. (2) con lo studio dell'attività anestetica locale, in questi ultimi anni si sono andate sviluppando maggiormente ma con finalità diversa, in conseguenza della osservazione fatta da COATES et al. (3) che la 2-n.amilossi- e la 2-n.esilossibenzammide manifestano attività fungistatica verso taluni dermatofiti. Ciò ha stimolato la ricerca in tale settore, come risulta dalla letteratura più recente (4,5).

Ci sembra lecito, in relazione ai dati sperimentali riportati dai vari ricercatori, sottolineare la influenza positiva che ha la eterificazione della funzione fenolica ai fini dell'attività farmacologica, soprattutto allorquando il radicale alchilico è a catena normale, con un numero di atomi di carbonio compreso tra 4 e 6.

È altresì interessante notare che ciò si riscontra anche nei derivati degli acidi tiobenzoici (6) e nelle alchilresorcine (7-9) le quali, peraltro, si differenziano strutturalmente dai composti di cui sopra, avendo il radicale alchilico direttamente legato ad un atomo di carbonio del nucleo benzenico.

La sperimentazione da noi intrapresa sulle molecole iodurate a funzione idrossialchilica mira a precisare la influenza della presenza dello iodio in tal tipo di strutture. Queste indagini rientrano nel quadro delle ricerche sistematiche che si vanno da tempo conducendo presso questo Istituto nel settore degli iodo-organici di sintesi (10).

Poichè le proprietà farmacologiche di molti derivati degli acidi alchilossibenzoici sono notevolmente interessanti, risulta evidente l'importanza della messa a punto di tecniche semplici e rapide per la preparazione di tali acidi.

Gli acidi alchilossibenzoici vengono preparati ancor oggi secondo tecniche (2, 5, 11) che fondamentalmente si ispirano allo schema di sintesi di COHEN e DUDLEY (12), basato sull'azione di un alogenuro alchilico sull'estere metilico (od etilico) dell'acido idrossibenzoico in ambiente anidro e successiva saponificazione alcalina del legame di estere.

(*) Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R.

Tutta la preparazione, per quanto semplice nella sua schematizzazione, risulta piuttosto delicata, lunga e laboriosa nella pratica esecutiva. È anche da tenere presente che nello schema di sintesi di COHEN e DUDLEY il prodotto di partenza è costituito non già dall'acido idrossibenzoico bensì dal suo estere metilico od etilico, il che comporta la preliminare preparazione di tale composto qualora non sia solitamente disponibile, com'è appunto il caso degli esteri di acidi idrossibenzoici sostituiti.

Nell'iniziare la nostra sperimentazione sugli alcossiderivati degli acidi 5-iodosalicilico e 3,5-diiodo-4-idrossibenzoico si è, pertanto, ravvisata la opportunità di adottare uno schema preparativo più semplice ed utilizzante, possibilmente, come materia prima l'acido idrossibenzoico come tale, non esterificato.

A tal fine ci è sembrato interessante approfondire le osservazioni di JONES et al. (13-15) relative alla eterificazione diretta dell'acido p-idrossibenzoico per azione di ioduro alchilico sul sale potassico dell'acido.

In effetti, la tecnica originariamente descritta dagli AA. (13) non ci ha dato buoni risultati; del resto, gli stessi AA. non fanno menzione del rendimento effettivo della reazione. Abbiamo tuttavia ritenuto opportuno riesaminare questo schema preparativo che per la sua semplicità ci è parso particolarmente indicato soprattutto per gli acidi idrossibenzoici sostituiti.

Nella sperimentazione eseguita abbiamo preso in esame i fattori che maggiormente influenzano il rendimento della reazione, quali sistema solvente, temperatura, tempo di reazione, rapporto tra i reagenti, tipo di alogenuro alchilico e struttura dell'acido idrossibenzoico.

Dalle prove espletate si son potute trarre le seguenti conclusioni relative alla influenza dei fattori sopra citati. Anzitutto si può affermare che lo schema proposto è valido non solo per la serie p-idrossibenzoica ma anche per quella salicilica. Per quanto concerne la influenza del sistema solvente si è constatato che in ambiente acquoso, come inizialmente indicato da BRADFIELD e JONES (13), la eterificazione avviene in misura molto limitata, mentre procede con buona resa allorché si operi in ambiente idroalcolico, riducendo la quantità di acqua al minimo indispensabile per assicurare la completa soluzione del sale alcalino dell'acido idrossibenzoico da eterificare. La reazione si esegue molto semplicemente tenendo il sistema all'ebollizione a ricadere su b.m. per quattro ore.

Il rapporto migliore tra i reagenti è di una mole di acido idrossibenzoico salificato con due moli di idrossido di sodio per una mole di alogenuro alchilico.

Circa il tipo di alogenuro alchilico utilizzabile si può usare vantaggiosamente, oltre lo ioduro, il bromuro. La lunghezza del radicale alchilico, da C_3 a C_6 , influenza scarsamente la resa della reazione; viceversa la struttura degli acidi idrossibenzoici è determinante per il buon andamento della reazione. In particolare si è constatato che per l'acido p-idrossibenzoico la

eterificazione avviene con rese oscillanti intorno all'80%. Rendimenti ancora più elevati si hanno nella preparazione di eteri di acidi p-idrossibenzoici sostituiti: l'acido 3,5-diiodo-4-idrossibenzoico, infatti, viene eterificato con rese che raggiungono il 98% (*).

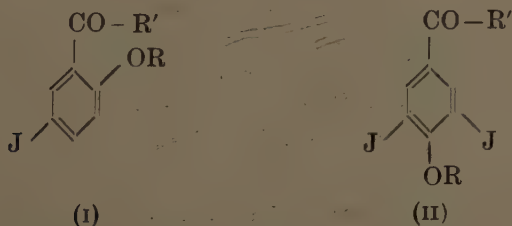
Nella eterificazione dell'acido salicilico, invece, si hanno rese che vanno dal 34% per l'etere propilico al 27% per l'etere esilico. Ciò, peraltro, non dipende da deficienze della tecnica, ma deriva dalla struttura stessa della molecola salicilica, come si rileva anche dall'esame dei dati riportati da PIERCE e coll. (loc. cit.) relativi alla preparazione degli eteri degli acidi salicilico e p-idrossibenzoico col metodo classico di COHEN e DUDLEY. La influenza negativa della struttura dell'acido salicilico nel processo di eterificazione è inoltre convalidata dai risultati sperimentali riferiti da GALIMBERTI et al. (16) relativi alla preparazione degli acidi α (2-carbossifenil)-ossiisobutirrico e -tioisobutirrico.

Passando dall'acido salicilico ad acidi salicilici sostituiti, si constata che le variazioni apportate alla struttura molecolare ne modificano la reattività. L'acido 5-iodosalicilico nella eterificazione presenta una reattività superiore a quella dell'acido non iodurato, avendosi una resa che va dal 50% per l'etere propilico al 46% per l'etere esilico.

Da quanto precede si può concludere che la tecnica preparativa messa a punto in questa sperimentazione è da preferirsi a quella classica di COHEN e DUDLEY nella preparazione degli eteri dell'acido p-idrossibenzoico e di quegli acidi 4-idrossibenzoici e 2-idrossibenzoici sostituiti che sono stati presi in esame.

In questa nota si riferisce sui derivati della serie 5-iodosalicilica, illustrando nella parte sperimentale i dettagli dell'applicazione della tecnica anzidetta alla preparazione degli eteri n.propilico, n.butilico, n.amilico e n.esilico dell'acido 5-iodosalicilico (Tab. I: I-IV). Di tali eteri sono riportate le proprietà chimiche e fisiche, nonché le caratteristiche degli spettri di assorbimento u.v. di confronto con quelle dei corrispondenti eteri dell'acido salicilico.

Mentre è in corso la sperimentazione relativa alla preparazione di derivati degli acidi 5-iodo-2-alcossibenzoici e 3,5-diiodo-4-alcossibenzoici, rap-



presentabili rispettivamente con le formule (I) e (II), ove R è un radicale

(*) I dati sperimentali dettagliati sono riportati in una comunicazione relativa alla preparazione di iododerivati dell'acido p-idrossibenzoico, in corso di pubblicazione.

alchilico lineare, saturo, con un numero di atomi di carbonio variante da 3 a 6 ed R' è un radicale di natura diversa, riferiamo in questa comunicazione sulla preparazione ed i caratteri di una prima serie di iododerivati, riferibili alla formula (I), in cui R' è rappresentato dal radicale $-O-CH_2COCH_3$. Tali composti sono elencati nella Tab. II (X-XIV) che comprende anche gli analoghi non iodurati (V-IX) che sono stati caratterizzati in questa sperimentazione e che, peraltro, non ci risulta siano stati preparati precedentemente, ad eccezione del composto V, da altri ricercatori. A complemento della parte analitica si riportano anche gli spettri u.v. dei nuovi derivati iodurati parallelamente a quelli dei corrispondenti composti non iodurati.

PARTE SPERIMENTALE.

A) *Acidi 2-alchilossi-5-iodobenzoici.*

Come detto nella parte introduttiva, le reazioni di eterificazione sono state condotte adoperando una mole di bromuro alchilico per una mole di acido idrossibenzoico salificato con due moli di NaOH. A titolo di esempio riportiamo i dettagli operativi relativi alla preparazione dell'acido 2-n.propilossi-5-iodobenzoico (I), precisando che anche per gli altri termini della serie (II-IV) si è operato nelle stesse condizioni sperimentali sia per quanto concerne i rapporti molecolari tra i reagenti sia per quanto riguarda il sistema solvente ed il tempo di reazione.

Acido 2-n.propilossi-5-iodobenzoico (I). — A g. 13,2 (0,05 moli) di acido 5-iodosalicilico si aggiungono cc. 10 di NaOH 10 N (0,1 moli), cc. 4,55 (0,05 moli) di bromuro di n.propile e cc. 40 di alcool etilico al 95%. Si mantiene il sistema all'ebollizione su b.m. per quattro ore. Si allontana quindi l'alcool per distillazione a press. atm., si riprende con acqua e si acidifica con HCl dil., così da precipitare il composto (I) in miscela con acido 5-iodosalicilico immodificato. Si raccoglie il precipitato su buchner, si lava con poca acqua, si asciuga il più possibile sul filtro stesso e si essicca poi sotto vuoto su $CaCl_2$. Si estrae quindi con benzolo, a freddo, sì da solubilizzare preferenzialmente il composto (I). Dopo tale lisciviazione benzenica rimane un residuo di g. 5,6 di acido 5-iodosalicilico. Dalla soluzione benzenica, per evaporazione del solvente, si ha come residuo il composto (I) grezzo. Per cristallizzazione da alcool all'80% si hanno g. 7,7 di (I) puro, con una resa del 50,3%.

Acido 2-n.butilossi-5-iodobenzoico (II). — Si prepara in modo analogo a quanto detto per il composto (I). Operando su g. 13,2 (0,05 moli) di acido 5-iodosalicilico si hanno g. 8,1 di (II) con una resa del 50,6% e si recuperano g. 5,3 di prodotto di partenza.

TABELLA I.
Acidi 2-alchilossi-5-iodobenzoici



Composto	R	Formula bruta	Peso molecolare		P. F. (°C)	Iodio %	
			Calc.	Trov.		Calc.	Trov. (*)
I	n.C ₉ H ₇	C ₁₉ H ₁₁ O ₃ J	306,11	302,5	64,0-65,5	41,46	41,35
II	n.C ₄ H ₉	C ₁₁ H ₁₃ O ₃ J	320,13	316,1	77,5-78,5	39,64	39,30
III	n.C ₃ H ₁₁	C ₁₂ H ₁₅ O ₃ J	334,16	336,4	93,5-94,5	37,99	37,82
IV	n.C ₆ H ₁₃	C ₁₃ H ₁₇ O ₃ J	348,19	343,9	87,0-88,0	36,45	36,31

(*) Media di tre determinazioni.

Acido 2-n.amilossi-5-iodobenzoico (III). — Tecnica preparativa analoga a quella descritta per (I). Da 0,05 moli di acido 5-iodosalicilico si ottengono g. 7,9 di (III) con una resa del 47,9% e si recuperano g. 6 di composto di partenza.

Acido 2-n.esilossi-5-iodobenzoico (IV). — Preparato come il composto (I). Da 0,05 moli di acido 5-iodosalicilico si ottengono g. 8 di (IV) (resa 45,95%) con un recupero di g. 6,1 di composto di partenza.

Nella Tabella I sono riportati, per i quattro acidi 2-alchilossi-5-iodobenzoici anzidetti, il p.f., i dati sperimentali relativi alla determinazione del peso molecolare col metodo crioscopico in benzolo ed i valori analitici relativi alla determinazione dello iodio. I corrispondenti composti non iodurati preparati nel corso di questa sperimentazione non sono inclusi nella Tab. I in quanto già noti; verranno invece descritti i caratteri dei relativi derivati ottenuti per condensazione con cloroacetone.

B) *Esteri acetonicili degli acidi: 2-alchilossi-, 2-idrossi-5-iodo- e 2-alchilossi-5-iodobenzoici.*

Gli ester acetonicili descritti in questa nota (v. Tab. II: VI-XIV) sono stati preparati per azione del monocloroacetone sul sale sodico dell'acido idrossi- o alchilossibenzoico in ambiente idroalcoolico all'ebollizione. La tecnica operativa è stata fundamentalmente la medesima per tutti i composti preparati, variando solo nella parte relativa all'isolamento del prodotto della reazione, in relazione allo stato fisico di quest'ultimo. Gli esteri liquidi o con p.f. molto prossimo alla temperatura ambiente (serie salicilica) sono stati isolati mediante estrazione eterea e purificati per distillazione a pressione ridotta. Gli esteri solidi (serie iodosalicilica) sono stati raccolti e purificati per cristallizzazione da alcool-acqua.

a) *Serie salicilica.*

Estere acetonicico dell'acido 2-n.propilossibenzoico (VI). — Grammi 10,8 (0,06 moli) di acido 2-n.propilossibenzoico puro (p.e. 215°/20 mm. Hg) si sciolgono in cc. 100 di alcool etilico al 95%. Si aggiungono poi nell'ordine cc. 60 di NaOH N (0,06 moli) ed una soluzione preparata sciogliendo cc. 9,65 (0,12 moli) di monocloroacetone in cc. 100 di alcool. Si fa bollire a ricadere il sistema su b.m. per tre ore, poi si concentra a lieve calore ed infine si lascia raffreddare. Si ha un sistema liquido bifasico; la fase più pesante, oleosa, di colore giallo chiaro, è costituita dal composto (VI). Si diluisce alquanto il sistema con acqua e si estrae con etere. La soluzione eterea, previo lavaggio con acqua e successiva disidratazione su solfato sodico

anidro, si evapora fino ad allontanamento di tutto il solvente. Come residuo rimane il composto (VI), liquido, che si purifica per distillazione a pressione ridotta, raccogliendo la frazione che passa a 180° a 10 mm. Hg. Si ottengono g. 9,5 di (VI) con una resa del 66%.

Estere acetonilico dell'acido 2-n.butilossibenzoico (VII). — Si prepara da acido 2-n.butilossibenzoico puro (p.e. 200°/12 mm. Hg) con la stessa procedura indicata per (VI). Resa 65%.

Estere acetonilico dell'acido 2-n.amilossibenzoico (VIII). — Preparato da acido 2-n.amilossibenzoico puro (p.e. 206°/12 mm. Hg) con la stessa tecnica descritta per (VI). Resa 64,4%.

Estere acetonilico dell'acido 2-n.esilossibenzoico (IX). — Preparazione analoga alle precedenti. Prodotto di partenza: acido 2-n.esilossibenzoico (p.e. 210°/8 mm. Hg). Resa 59,7%.

b) Serie 5-iodosalicilica.

Estere acetonilico dell'acido 5-iodosalicilico (X). — Si aggiungono cc. 4,3 (0,05 moli) di monobromoacetone sciolti in 10 cc. di alcool ad una soluzione ottenuta sciogliendo a caldo g. 14,3 (0,05 moli) di 5-iodosalicilato sodico in cc. 40 di alcool e cc. 30 di acqua. Il sistema si mantiene all'ebollizione su b.m. per un'ora. Già dopo circa dieci minuti di reazione si nota una graduale precipitazione dell'estere (X). Trascorso il tempo suddetto si lascia raffreddare, si filtra, si lava con poca acqua il precipitato raccolto e lo si essicca in stufa ad 80°. Il prodotto grezzo così ottenuto pesa g. 14 e fonde a 121°-124°. Per cristallizzazione da alcool-acetone si hanno g. 13 di estere puro, fondente a 131°-132°, con una resa dell'81,2%.

La preparazione di (X) può eseguirsi altrettanto bene anche con monocloroacetone, come descritto qui di seguito per gli esteri acetonilici degli acidi 2-alchilossi-5-iodobenzoici.

Estere acetonilico dell'acido 2-n.propilossi-5-iodobenzoico (XI). — A g. 9,18 (0,03 moli) di acido 2-n.propilossi-5-iodobenzoico (I) in cc. 50 di alcool si aggiungono cc. 30 di NaOH N (0,03 moli); si riscalda a blando calore fino a soluzione completa, indi si aggiungono cc. 4,83 (0,06 moli) di monocloroacetone. Si fa bollire a ricadere su b.m. per due ore. Il sistema, inizialmente omogeneo, alla fine della reazione appare formato da due fasi liquide, di cui la più pesante, di colore giallo chiaro, è costituita dal prodotto della reazione grezzo. Si diluisce alquanto con acqua e si raffredda in ghiaccio, col che il composto solidifica in una massa cristallina che viene raccolta, lavata con poca acqua ed essiccata sotto vuoto su CaCl_2 . Il grezzo si purifica sciogliendolo a lieve calore in alcool, lasciando raffreddare e poi diluendo lentamente, a freddo, con acqua. In tal modo si insolubilizza il composto (XI) puro, in forma di laminette cristalline incolori, con p.f. 73°. La resa è di g. 9,4 pari all'86,5% del teorico.

TABELLA II.

Esteri acetonicili degli acidi: Salicilico, 5-iodosalicilico,
2-alchilossi- e 2-alchilossi-5-iodo-benzoico.



Formula generale:

Composto	X	R	Formula bruta	Peso molecolare		P.F. (°C)	P.E. °C/mm Hg	Iodio %	
				Calc.	Trov.			Calc.	Trov. (**)
V (°)	H	H	C ₁₀ H ₁₀ O ₄	194,18	192,7	—	—	—	—
VI	H	n.C ₈ H ₇	C ₁₃ H ₁₂ O ₄	236,26	232,1	liq.	180/10	—	—
VII	H	n.C ₈ H ₉	C ₁₄ H ₁₄ O ₄	250,29	245,5	"	190/12	—	—
VIII	H	n.C ₈ H ₁₁	C ₁₄ H ₁₆ O ₄	264,31	268,1	"	186/10	—	—
IX	H	n.C ₈ H ₁₃	C ₁₆ H ₁₈ O ₄	278,34	276,0	"	178/6	—	—
X	J	H	C ₁₀ H ₉ O ₄ J	320,09	327,3	131-132	—	39,65	39,58
XI	J	n.C ₈ H ₇	C ₁₃ H ₁₂ O ₄ J	362,17	356,0	72	—	35,04	34,90
XII	J	n.C ₈ H ₉	C ₁₄ H ₁₄ O ₄ J	376,20	370,3	42,5-43,5	—	33,74	33,57
XIII	J	n.C ₈ H ₁₁	C ₁₄ H ₁₆ O ₄ J	390,22	381,1	50-51	—	32,53	32,40
XIV	J	n.C ₈ H ₁₃	C ₁₆ H ₁₈ O ₄ J	404,25	398,7	54-55	—	31,40	31,22

(°) Già noto.

(**) Media di tre determinazioni.

Estere acetnilico dell'acido 2-n.butilossi-5-iodobenzoico (XII). — Si prepara e si purifica in modo analogo a quanto detto per (XI), a partire dall'acido 2-n.butilossi-5-iodobenzoico (II). Resa 86% in prodotto puro.

Estere acetnilico dell'acido 2-n.amilossi-5-iodobenzoico (XIII). — Si segue il procedimento descritto per (XI) impiegando come prodotto di partenza l'acido 2-n.amilossi-5-iodobenzoico (III). Resa 85,4%.

Estere acetnilico dell'acido 2-n.esilossi-5-iodobenzoico (XIV). — Si prepara da acido 2-n.esilossi-5-iodobenzoico (IV) secondo la tecnica descritta per (XI). Resa 81,6%.

C) *Proprietà chimiche e fisiche.*

a) *Caratteri degli acidi 2-n.alchilossi-5-iodobenzoici* (I-IV).

Gli acidi (I-IV) sono solidi, incolori, stabili all'aria ed alla luce, quasi insolubili in acqua, solubili nei comuni solventi organici quali alcool metilico ed etilico, etere etilico, acetone, cloroformio e benzolo. Quest'ultimo si dimostra il più indicato per la loro estrazione. La cristallizzazione avviene nel modo migliore da soluzioni idroalcoliche aventi una concentrazione in etanolo dal 70 all'80%.

Il rilevamento della temperatura di fusione evidenzia un andamento irregolare, avendosi un valore massimo per il composto (III) (v. Tab. I).

I saggi e le determinazioni eseguite sui composti in oggetto ne confermano pienamente la struttura. Facilmente evidenziabile è, infatti, la presenza dello iodio (saggio con acido solforico conc. a caldo), l'assenza della funzione fenolica libera (reazione negativa con FeCl_3) e la presenza della funzione $-\text{COOH}$ (formazione di sali alcalini solubili dalle cui soluzioni, per acidificazione con un acido forte, riprecipitano i relativi acidi iodoalcoossibenzoici). I sali di sodio di questi composti sono molto solubili in acqua ed in alcool e si comportano come sali di acidi molto deboli, dando soluzioni a reazione fortemente alcalina, dalle quali precipitano in presenza di eccesso di alcali.

I composti (I-IV) resistono alla saponificazione alcalina (presenza del legame di etere).

Sui composti (I-IV) sono state eseguite determinazioni acidimetriche che hanno confermato la presenza di un solo atomo di idrogeno ionizzabile nella molecola. In accordo con i valori calcolati sono altresì i risultati sperimentali relativi alle determinazioni di iodio e del peso molecolare (metodo crioscopico in benzolo) (v. Tab. I).

b) *Caratteri degli esteri acetnilici* (VI-XIV).

Gli esteri acetnilici preparati sono elencati nella Tab. II ed appartengono alla serie salicilica ed a quella 5-iodosalicilica. La esterificazione del carbossile degli acidi alchilossibenzoici dà luogo ovviamente alla formazione

di composti non salificabili, i quali sono più bassofondenti dei composti di partenza, per cui gli esteri acetonicili della serie salicilica sono liquidi o quanto meno a p.f. molto prossimo alla temp. amb. Pertanto si è ritenuto opportuno riportarne solo la temperatura di ebollizione a pressione ridotta.

Gli esteri acetonicili della serie iodosalicilica risultano anch'essi più bassofondenti dei corrispondenti acidi 2-n.alchilossi-5-iodobenzoici, ma si mo-

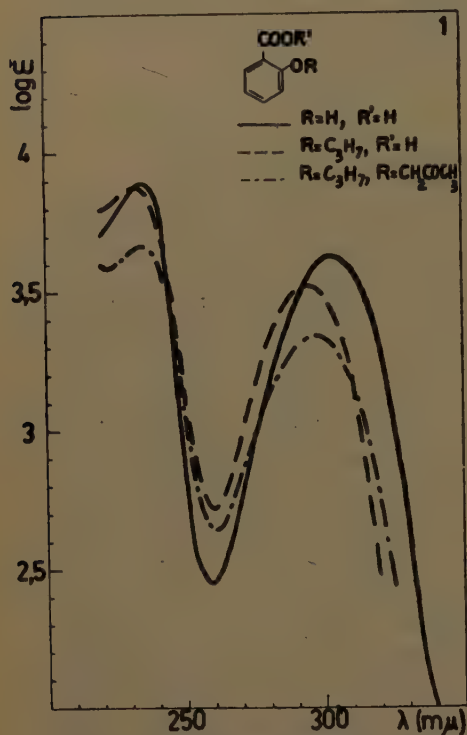


Fig. 1. — Effetti della eterificazione ed esterificazione sull'assorbimento dell'acido salicilico.

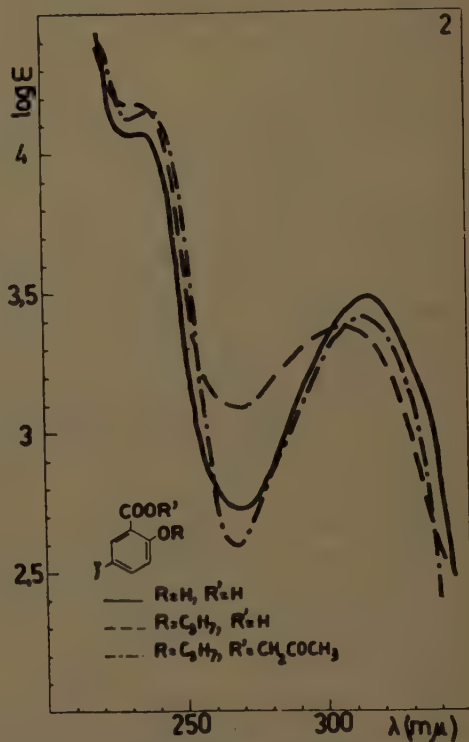


Fig. 2. — Effetti della eterificazione ed esterificazione sull'assorbimento dell'acido 5-iodosalicilico.

strano di più agevole cristallizzazione. È da notare che anche in questa serie si riscontra una irregolarità di variazione del p.f. (v. Tab. II), più alto per il derivato propilico, più basso per gli altri e crescente dal butilico all'esilico.

Tutti gli esteri acetonicili in esame possono essere saponificati tenendoli a ricadere con un alcali forte, così da solubilizzarli sotto forma di sale alcalino del corrispondente acido alcossibenzoico. Le determinazioni gravimetriche eseguite isolando tale acido e pesandolo hanno dato risultati perfettamente in accordo con i valori teorici calcolati.

Gli esteri in parola si sono invece dimostrati molto resistenti all'idrolisi acida: infatti, solo una minima aliquota del composto di partenza subisce

la scissione del legame di etere, cosicchè nel prodotto dell'idrolisi si ritrovano solo minime quantità di estere acetnilico dell'acido salicilico o 5-iodosalicilico, mentre la più gran parte del composto iniziale si ritrova immo-
dificata.

Gli esteri della serie salicilica sono pressochè insolubili in acqua, mentre

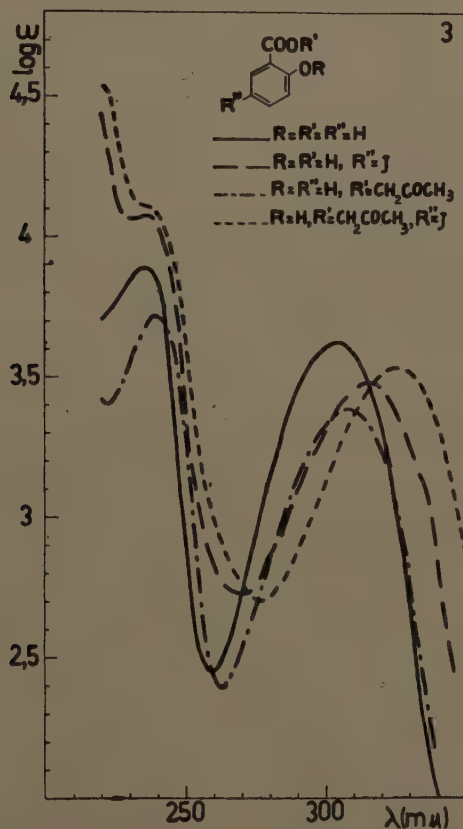


Fig. 3. — Effetti combinati della esterificazione e della sostituzione con iodio.

hanno solubilità elevate nei comuni solventi organici. Solubilità meno accennuate si notano in serie iodosalicilica.

Le determinazioni di iodio e del peso molecolare (metodo crioscopico in benzolo) eseguite sui composti (V-XIV) hanno dato risultati concordanti con i valori teorici, come si può rilevare dai dati raggruppati nella Tab. II.

D) Spettri d'assorbimento nell'ultravioletto.

I nuovi iododerivati sono stati esaminati anche dal punto di vista spettrofotometrico, precisandone le caratteristiche di assorbimento nell'ultravioletto, al fine di fornire dati atti a caratterizzare ulteriormente tali prodotti. Nel

contempo sono stati presi in considerazione gli analoghi non iodurati, dei quali, a quanto ci risulta, non erano stati finora rilevati gli spettri.

Le rilevazioni sono state effettuate con uno spettrofotometro a registrazione Graphi-Spectral Jouan e con uno spettrofotometro manuale UNICAM SP 500, facendo uso di celle di quarzo da 1 cm. Le sostanze in esame sono state purificate con una doppia cristallizzazione dal solvente opportuno,

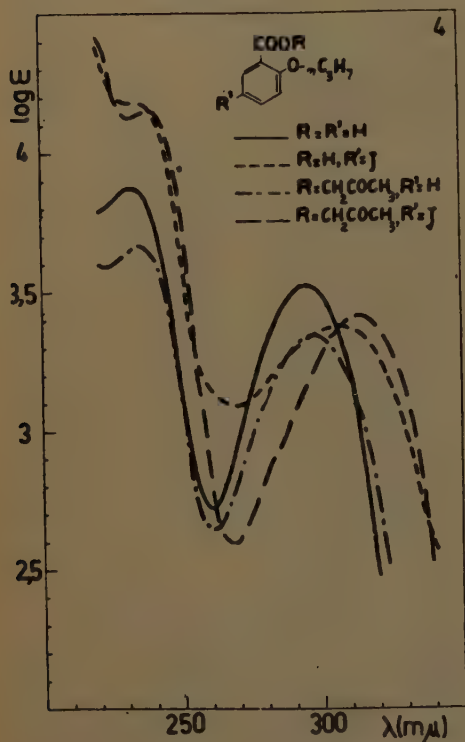


Fig. 4. — Derivati 2-n.propilossibenzoici.

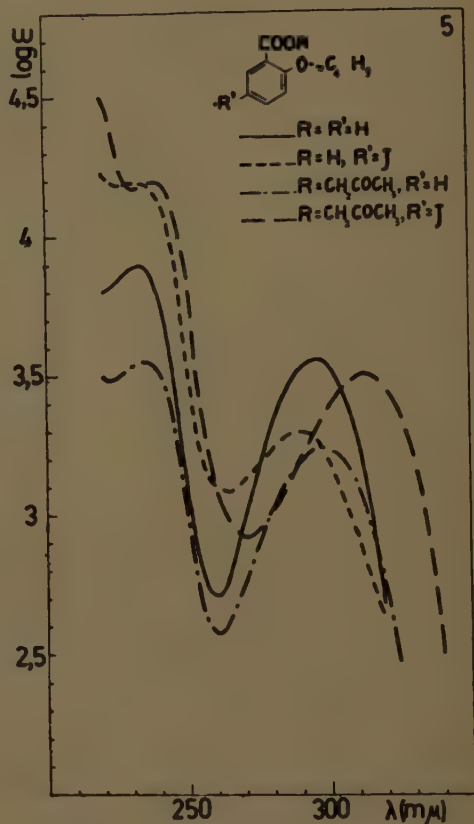


Fig. 5. — Derivati 2-n.butilossibenzoici.

se solide, mentre quelle liquide sono state distillate a pressione ridotta. Per tutte si è fatto uso, come solvente, di alcool etilico al 95%, impiegando soluzioni di concentrazione dell'ordine di 0,02 g./l.

Gli spettri d'assorbimento rilevati sono stati diagrammati esprimendo l'intensità dell'assorbimento a mezzo del $\log \varepsilon$, in funzione della lunghezza d'onda in $m\mu$. I dati relativi ai massimi d'assorbimento sono raggruppati nella Tabella III, in cui i composti nuovi sono riportati con il numero d'ordine con cui figurano nelle tabelle precedenti.

Nella fig. 1 vengono paragonati gli spettri dell'acido salicilico, di un suo etere (il propilico) e del corrispondente estere acetnilico (VI): si può osser-

TABELLA III.
Dati spettrofotometrici (*).

N°	Composto	λ_{\max} (m μ)	log ϵ
I	A) <i>Acido:</i> salicilico	235 304	3,89 3,63
	2-n.propilossibenzoico	232 295	3,88 3,52
	2-n.butilossibenzoico	233 295	3,89 3,55
	2-n.amilossibenzoico	233 296,5	3,75 3,40
	2-n.esilossibenzoico	233,5 296,5	3,93 3,59
	5-iodosalicilico	236 314	4,08 3,48
	5-iodo-2-n.propilossibenzoico	234(**) 307	4,18 3,38
	5-iodo-2-n.butilossibenzoico	234 291,5	4,19 3,29
	5-iodo-2-n.amilossibenzoico	236,5 306	4,18 3,34
	5-iodo-2-n.esilossibenzoico	236 301	4,22 3,37
	B) <i>Estere acetonicico dell'acido:</i> salicilico (salacetolo)	239,2 308	3,72 3,39
	2-n.propilossibenzoico	235 298	3,67 3,34
	2-n.butilossibenzoico	235 298	3,55 3,24
	2-n.amilossibenzoico	235 298	3,67 3,33
II	2-n.esilossibenzoico	235 298	3,65 3,31
	5-iodosalicilico	236(**) 324,5	4,11 3,54
	5-iodo-2-n.propilossibenzoico	239,5 314	4,15 3,41
	5-iodo-2-n.butilossibenzoico	238,5 313	4,20 3,50
	5-iodo-2-n.amilossibenzoico	238 312,5	4,21 3,47
	5-iodo-2-n.esilossibenzoico	238 312,5	4,17 3,42

(*) Solvente: alcool etilico 95%.

(**) Punto di flesso.

vare come l'eterificazione della funzione fenolica deprime l'intensità del secondo massimo, sul quale si osserva anche un discreto effetto ipsocromico. Analoghe considerazioni valgono per l'estere acetnilico, nel quale entrambe le funzioni acide sono bloccate: si ha un analogo effetto ipsocromico sul secondo massimo ed una ancora più accentuata diminuzione d'intensità per entrambe le bande.

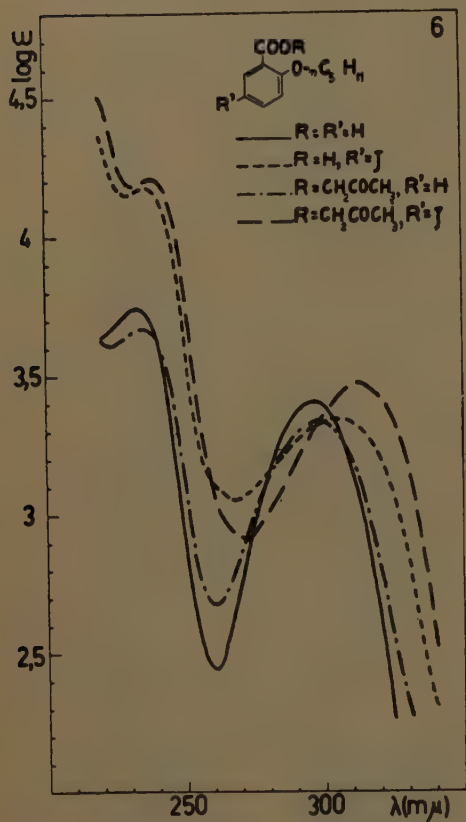


Fig. 6. — Derivati 2-n.amilossibenzoici.

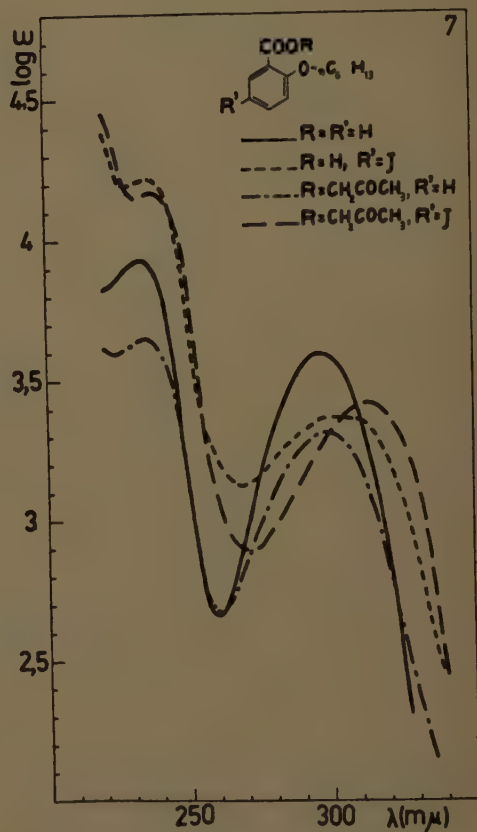


Fig. 7. — Derivati 2-n.esilossibenzoici.

La Fig. 3 raggruppa invece i diagrammi dell'acido salicilico, dell'acido 5-iodosalicilico e dei due corrispondenti esteri acetnilici. Si può osservare come l'esterificazione provochi, nel caso dell'acido salicilico, un sensibile effetto batocromico ed una contemporanea diminuzione dell'intensità di assorbimento. Nel caso dell'acido iodosalicilico, invece, mentre le variazioni indotte sul primo massimo sono minime, sul secondo si nota un evidente effetto batocromico ed un aumento dell'intensità.

Nelle quattro figure successive, infine, vengono raggruppati i diagrammi degli eteri e degli eteri-esteri, suddivisi in base alla lunghezza della catena alchilica. Paragonando i composti iodurati e non iodurati si può osservare

quanto segue: tutti gli iododerivati presi in esame presentano un incremento d'intensità ed un minimo effetto batocromico sul primo massimo rispetto agli omologhi privi di iodio. Per quanto riguarda il secondo massimo si osserva invece una minore uniformità: gli eteri iodurati presentano un sensibile effetto batocromico insieme con una minore intensità d'assorbimento rispetto agli eteri non iodurati; nella serie degli iododerivati acetonicili permene ed anzi si accentua l'effetto batocromico, mentre anche l'assorbimento è maggiore di quello presentato dagli esteri privi di iodio.

CONCLUSIONI.

La sperimentazione eseguita ha permesso di accertare che la tecnica di eterificazione messa a punto dà buoni risultati in serie iodosalicilica, mentre risultati meno favorevoli si ottengono in serie salicilica. D'altro canto, rendimenti migliori si hanno nella eterificazione in serie p-idrossibenzoica, come ci risulta dalla sperimentazione in via di completamento. Tali risultati sono in accordo con la minore reattività, rispetto all'isomero para, manifestata in molte occasioni dall'acido salicilico.

Quanto agli esteri acetonicili preparati, di struttura ricollegabile a quella del salacetolo, essi rappresentano un primo semplice esempio delle possibilità di utilizzazione degli acidi alchilossibenzoici come intermedi per l'ottenimento di molecole d'interesse farmacologico.

BIBLIOGRAFIA

- (1) C. ROHMANN e B. SCHEURLE. *Arch. Pharm.*, **274**, 110 (1936).
- (2) J. S. PIERCE, J. M. SALSURY e J. M. FREDERICKSEN. *J. Am. Chem. Soc.*, **64**, 1691 (1942).
- (3) L. V. COATES, D. J. DRAIN, K. A. KERRIDGE, F. J. MACRAE e K. TATTERSALL. *J. Pharm. Pharmacol.*, **9**, 855 (1957).
- (4) L. V. COATES, D. J. DRAIN, F. J. MACRAE e K. TATTERSALL. *J. Pharm. Pharmacol.*, **11**, 240 T (1959).
- (5) F. GIALDI, R. PONCI e A. BARUFFINI. *Il Farmaco*, Ed. Sc., **14**, 15 (1959).
- (6) F. GIALDI, R. PONCI e A. BARUFFINI. *Il Farmaco*, Ed. Sc., **15**, 856 (1960).
- (7) A. R. L. DOHME, E. A. COX e E. MILLER. *J. Am. Chem. Soc.*, **48**, 1688 (1926).
- (8) F. W. TILLEY e J. M. SCHAFFER. *J. Bact.*, **12**, 303 (1926).
- (9) J. M. SCHAFFER e F. W. TILLEY. *J. Bact.*, **14**, 259 (1927).
- (10) M. COVELLO, E. PISCOPO ed E. ABIGNENTE. *Ann. Chimica*, **50**, 1651 (1960).
- (11) W. M. LAUER, P. A. SANDERS, R. M. LEEKLEY e H. E. UNGNADE. *J. Am. Chem. Soc.*, **61**, 3050 (1939).
- (12) J. B. COHEN e H. W. DUDLEY. *J. Chem. Soc.*, 1732 (1910).
- (13) A. E. BRADFIELD e B. JONES. *J. Chem. Soc.*, 2660 (1929).
- (14) B. JONES. *J. Chem. Soc.*, 1874 (1935).
- (15) G. M. BENNETT e B. JONES. *J. Chem. Soc.*, 420 (1939).
- (16) P. GALIMBERTI, V. GEROSA e M. MELANDRI. *Il Farmaco*, Ed. Sc., **14**, 96 (1959).

RIASSUNTO. — In relazione all'importanza degli acidi alchilossibenzoici quali intermedi per la preparazione di molecole farmacologicamente attive, gli AA. ne hanno riesaminato gli schemi preparativi onde precisare le condizioni sperimentali più idonee al loro ottenimento per alchilazione diretta. La tecnica messa a punto è stata utilizzata per la sintesi degli acidi 2-n.propilossi-, 2-n.butilossi-, 2-n.amilossi- e 2-n.esilossi-5-iodobenzoico. Per condensazione dell'acido 5-iodosalicilico e dei suoi quattro alcossiderivati anzidetti con cloroacetone, sono stati poi preparati i rispettivi esteri acetilici. Inoltre vengono descritti i corrispondenti composti non iodurati, la cui preparazione non risulta registrata in letteratura. Di tutti i prodotti preparati vengono riferite le proprietà chimiche e fisiche, nonché i caratteri spettrofotometrici U.V.

SUMMARY. — In view of importance of alkoxybenzoic acids as intermediates in the preparation of pharmacologically active molecules, the AA. have taken under examination synthetic methods so far used, in order to state experimental conditions suitable for preparing these compounds by direct alkylation. A simple technique has been elaborated and utilized to prepare 2-n.propyloxy-, 2-n.butyloxy-, 2-n.amyloxy- and 2-n.hexyloxy-5-iodobenzoic acids. Through condensation with monochloroacetone of 5-iodosalicylic acid and its four alkoxyderivatives, corresponding acetonilic esters have been prepared. Moreover similar non-iodinated compounds, which are not recorded in literature, are described. Chemical and physical properties as well as U.V. spectrophotometric data are reported.

Sulla presenza del Lias nell'isola di Capri

Nota del socio ordinario Francesco Scarsella

(Adunanza del dì 4 novembre 1961)

Osservazioni fatte nel corso di rilevamenti nell'ultimo decennio, e successive ricerche compiute appositamente col contributo del C.N.R., hanno consentito di riconoscere e precisare alcuni caratteri peculiari dei terreni liassici dell'Appennino abruzzese laziale e campano, cioè dell'*Appennino di facies orientale*.

Da gran tempo sono noti affioramenti di Lias e dei suoi piani nell'Appennino calcareo centro-meridionale, dall'alta valle dell'Aniene al gruppo del Monte Pollino e alla Sila (Longobucco), sono descritti nella bibliografia e figurati nella Carta Geologica d'Italia; l'attribuzione al Lias è basata su fossili, a luoghi abbondanti, a luoghi molto rari; ora di sicuro valore cronologico, come le ammoniti, ora di valore o di determinazione discutibili, come è di alcuni brachiopodi [2] [6].

C. F. PARONA segnalò più volte « l'esistenza nell'Appennino di orizzonti corrispondenti, per fauna e per certe *facies*, alla nota formazione così detta dei *calcarei grigi* delle Alpi Venete » [7]. Ma né PARONA, che come paleontologo poteva anche giustamente disinteressarsene, né i rilevatori dell'Appennino, per quanto risulta dalla bibliografia consultata, hanno mai avvertito che i « calcarei grigi » del Veneto sono caratterizzati, oltre che da una determinata fauna propria, anche dal *modo di presentarsi* di quel *fossile* tanto controverso che è la *Lithiotis problematica* Gümb. Questo fossile, se non ha valore dal punto di vista strettamente sistematico e paleontologico, perchè può corrispondere a più generi diversi di lamellibranchi [1], [8], ha tuttavia un sicuro valore dal punto di vista stratigrafico, come *carattere di facies* e come *carattere da terreno*. Infatti, anche per l'Appennino centro-meridionale è risultato dalle nostre ricerche che in quasi tutti gli affioramenti di Lias medio-superiore esaminati è presente la *Lithiotis problematica*, e, reciprocamente, di tutti gli affioramenti in cui compare la *Lithiotis* si è potuto accertare, in base alla determinazione dei fossili, l'età liassica, dal Lias medio al superiore.

L'argomento della diffusione dei livelli a *Lithiotis* nell'Appennino sarà compiutamente trattato in apposita nota; qui basti accennare che la facies dei calcarei grigi a *Lithiotis problematica*, descritta originariamente per le Prealpi venete (Veronese, Vicentino), è stata successivamente segnalata in regioni tra loro lontane dell'area circummediterranea, dalla Sarthe alla Dal-

mazia, dall'Africa settentrionale (Marocco, Algeria) alla Siria. Solo per l'Appennino, per quanto è a nostra conoscenza, non è stata finora ricordata, forse perchè in essa non si è ravvisata l'importanza stratigrafica che invece sicuramente ha.

Basandosi sul ritrovamento di livelli a *Lithiotis* si è riconosciuta l'esistenza del Lias in varie località dove finora non era noto; di queste interessa ricordare qui il gruppo del Matese¹⁾, i dintorni di Mercato S. Severino, i Monti Lattari (tra Positano e Amalfi).

Si deve ai risultati di queste ricerche fatte nell'Appennino l'aver prima prevista, e poi accertata l'esistenza del Lias nell'isola di Capri.

Si è prevista esaminando il foglio 196-Sorrento della Carta geologica d'Italia, pubblicato di recente, che riporta anche il rilievo dell'isola al 25.000 [9]. In questa Carta, e nella leggenda relativa, non figura il Giurassico (Titonico) nelle località di Venassino e Capo di Sopra, da cui provengono le faune studiate dal PARONA [4] [5]; ciò può essere in relazione con quei motivi che, già al tempo del PARONA, furono causa di discussioni sulla validità di queste faune, da alcuni ritenute rimaneggiate.

Invece viene indicato, nel contrafforte di Punta Ventroso a sud di M. Solaro, un « *Giura² Superiore — Titonico (2) (g) = Calcari magnesiaci bigi, granulari, stratificati, passanti inferiormente a banchi ricchi di sostanza carboniosa e tracce di solfuri di Fe; privi di fossili* ». Su questo *Giura²* si sovrappone un « *Calccare bianco, cristallino-saccaroide (cr_s), delle falesie S. di M. Cocuzzo-Solaro* », a sua volta sottostante a un « *Orizzonte calcareo-magnesiaco scuro, scheggioso con rare venature rosa (crk), a facies stromatolitica e detritica, con tracce di alghe (Sifonee), Gasteropodi e Lamellibranchi spatizzati indeterminabili, a cataclaszizzazione spinta. Base di M. Solaro, Grotta d. Arco* » [9].

Una facies tanto diversa dalle solite del Titoniano dell'Appennino attrasse l'attenzione ed invogliò a conoscerla; l'« *Orizzonte calcareo-magnesiaco (crk)* » con *rare venature rosa* e con *alghe, e Gasteropodi e Lamellibranchi spatizzati indeterminabili* fece, invece, argomentare che si trattasse di un livello a *Lithiotis*.

¹⁾ Nel gruppo del Matese il Lias è segnalato da SARTORI e CRESCENTI (*La zona a Palaeodasycladus mediterraneus (Pia) nel Lias dell'Appennino meridionale*. Giornale di Geologia - Ann. Mus. Geol. di Bologna, ser. 2^a, vol. XVII, 1956. Bologna, 1960) nella serie del M. Monaco di Gioia. In una nota precedente (F. SCARSELLA e M. MANFREDINI, *Relaz. prelim. sul rilevamento geologico del gruppo del Matese*. Boll. Serv. Geol. d'Italia, vol. LXXVI, 2° fasc., Roma, 1955), sfuggita agli Autori sopracitati, è indicato, sempre nella serie del M. Monaco di Gioia, « *a q. 900 c., un banco con grandi ostreidi (fino a 20 cm di lunghezza), appiattite, tutte rappresentate da individui con le due valve* ». Si tratta del livello a *Lithiotis*, e del caratteristico modo di presentarsi di queste sulle testate degli strati; ma in quel tempo non avevamo ancora una conoscenza così sicura di questo *fossile* da designarlo con certezza. Il livello a *Lithiotis* compare ancora in altre parti del Matese: in Valle Fontanella a nord di M. Ariola; in Valle Orsara; ecc.

Le ricerche fatte in proposito, con l'attiva collaborazione dei dottori P. DE CASTRO, P. SCANDONE e I. SGROSSO di questo Istituto, hanno confermato le previsioni.

È risultato che si tratta della caratteristica facies di calcare dolomitico grigio, a luoghi passante a vera dolomia, che, oltre alle solite *Lithiotis* sparse o concentrate in tipici ammassi, contiene: *Opisoma* sp., ? *Pachymegalodon* sp., coralli isolati, *Palaeodasycladus mediterraneus* Pia, *Solenopora* cfr. *liasica* Le Maitre, *Cayeuxia* sp., *Vidalina martana* Farinacci²⁾; è in corso la determinazione di altre forme.

Il livello a *Lithiotis* affiora alla Grotta dell'Arco, o delle Felci, e verso nord si estende alquanto nella parete orientale di M. Solaro; verso sud e ovest, estendendosi a mezza costa nello scosceso versante meridionale di M. Cocuzzo, si desume, dall'andamento degli strati, che copra o avvolga l'affioramento dolomitico di P. Ventroso, indicato nella Carta geologica come *Giura*³⁾. Grandi blocchi franati dal ripido versante sono accatastati sulla riva in fondo alla cala, a ponente, di Marina Piccola; altri sono sulla riva di Cala Ventroso. In questi blocchi, per il dilavamento attivo delle onde, le *Lithiotis* di grandi dimensioni e gli altri fossili spatizzati spiccano bianchi sul fondo grigio della roccia calcarea o dolomitica.

Le indagini sul terreno e gli esami paleontologici continuano ancora; ma, se si può applicare il criterio litologico-stratigrafico, si può già prospettare come probabile che la dolomia di Punta Ventroso, sottostante al livello a *Lithiotis* è uguale a quella di Mercato S. Severino, sia isopica di questa, cioè rappresenti un piano più basso del Lias medio: o il Lias inferiore, o anche un piano del Trias, dal Retico al Norico.

Pare, inoltre, che le nuove conoscenze sulla stratigrafia di Capri possano modificare, almeno nei particolari, ovvero convalidare, qualcuna delle varie interpretazioni che si sono date della tettonica di quest'isola³⁾.

I risultati, per altro, vengono a confermare quanto scriveva il PARONA quasi sessant'anni or sono [4]: « non credo troppo arrischiata la supposizione, che nella potente massa di questi calcari della penisola (*di Sorrento*) non manchi completamente la serie giurassica e liassica, e può darsi che il progredire delle ricerche paleontologiche renda necessaria la ricomparsa del Giura-liassico anche sulle carte geologiche di quest'orlo meridionale della infranta sinclinale mesozoica ed eomiocenica, che include la Campania Felice »⁴⁾.

Napoli, Istituto di Geologia dell'Università.

²⁾ Le determinazioni sono dovute al dott. Piero DE CASTRO, che ha in istudio le faune del livello a *Lithiotis* della Campania.

³⁾ Tenuto conto dello scopo di segnalazione proprio di questa nota, si tralascia, qui, di dare un elenco più ampio della non scarsa bibliografia sulla geologia di Capri, specialmente quella sulla tettonica [3].

⁴⁾ Dopo la comunicazione di questa nota, il dott. A. IETTO mi ricorda che il GALDIERI (*Sul Trias dei dintorni di Giffoni. Contributo alla conoscenza del terreno*

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOEHM G., *Lithiotis problematica*. Ber. d. Nat. Ges. in Freiburg i. B., Bd. VI, H. 3, 1892.
- [2] DE LORENZO G., *Geologia dell'Italia meridionale*. N. Ed. a cura di G. D'Erasmo. E.P.S.A., Napoli, 1937.
- [3] D'ERASMO G. e BENASSAI SGADARI M. L., *Bibliografia geologica d'Italia*, Vol. III, *Campania*. C.N.R. — Comitato per la Geogr., Geol. e Miner., Napoli, 1958.
- [4] PARONA C. F., *Nuove osservazioni sulla fauna dei calcari con Ellipsactinidi dell'Isola di Capri*. Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis. mat. e nat., Vol. XIV, 2°, Roma, 1905.
- [5] PARONA C. F., *Titonico e Cretaceo nell'Isola di Capri: revisione dei fossili dei calcari coralligeni*. Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., mat. e nat., Vol. XIV, 2° sem., Roma, 1919.
- [6] PARONA C. F., *Trattato di Geologia, con speciale riguardo alla Geologia d'Italia*. 2ª ed., F. Vallardi edit., Milano, 1924.
- [7] PARONA C. F., *Spigolature paleontologiche. 1. Calcarei a « Orbitopsella praecursor » (Gümb.) nell'Appennino centrale*. Boll. R. Uff. geol. d'Italia, Vol. III, n. 8, Roma, 1928.
- [8] REIS O. M., *Ueber Lithiotiden*. Abh. d. k. k. geol. Reichsanstalt, Bd. XVII, H. 6, Wien, 1903.
- [9] SERVIZIO GEOLOGICO, *Carta geologica d'Italia al 100.000: Foglio 196 - Sorrento*. Roma, 1960.

RIASSUNTO. — Le ricerche fatte nell'Appennino centro-meridionale sulla facies e sulla diffusione degli affioramenti di « calcari grigi a *Lithiotis problematica* », hanno portato ad accertare che questo livello del Lias, dal medio al superiore, è presente anche a Capri, nel versante orientale e meridionale di M. Solaro, con la facies e con le associazioni faunistiche che ne sono caratteristiche. Le condizioni strutturali fanno ritenere che a Capri affiorino anche livelli o piani più bassi del Lias medio: dell'Infralias o del Trias superiore.

SUMMARY. — The researches accomplished in the Central and Southern Apennines, concerning the facies and the diffusion of the outcrops of « grey-limestones with *Lithiotis problematica* », brought us to establish that these beds, from the Middle to Upper Lias, are present also in Capri, along the Eastern and Southern side of M. Solaro, with the facies and faunal associations which are characteristic of such beds. The structural conditions induce us to think that lower zones or stages than Middle Lias appear at Capri, i. e. that Infralias or Upper Triassic are present.

triassico nel Salernitano. Atti Accademia Pontaniana, vol. XXXIII. Napoli, 1908) aveva già osservato bene e intravisto l'età di questi calcari, come risulta dai seguenti passi tolti dal suo lavoro (pag. 31): « Questo calcare... presenta spesso fossili, però spatizzati e di isolamento pressoché impossibile. ...esso è la continuazione di quello identico che ricopre il Trias... al Parco di Mercato S. Severino, e che affiora anche nell'Isola di Capri, ...ed in moltissimi altri punti dell'Appennino meridionale. ...; a Capri, dove affiora alla base del M. Solaro, fu compreso nel Titonico dell'Oppenheim; ...che sia Cretaceo, ...me ne fanno fortemente dubitare delle sezioni di bivalvi a guscio sottile, cuoriformi, che si direbbero di Megalodonti, e che accennerebbero al Lias ».

Sui sottogruppi normali dei gruppi speciali (*)

*Nota del prof. Mario Curzio
presentata dal socio Alfredo Franchetta*

(Adunanza del dì 4 novembre 1961)

Questa Nota è dedicata alle dimostrazioni di alcuni teoremi che, in una pubblicazione in corso di stampa [3], sono dati soltanto con brevi cenni esplicativi.

Sostanzialmente si tratterà di condizioni a carattere reticolare, sufficienti affinché un gruppo supersolubile risulti speciale. Si prova che in molti casi un gruppo supersolubile è speciale quando la sua struttura normale, o è quella di un gruppo speciale finito, o è isomorfa alla duale di una tale struttura.

Al Professore P. DUBREIL sono debitore di preziosi consigli concernenti la stesura della Nota preventiva di cui in [3].

1. Si premettono alcune notazioni largamente usate nel seguito:

$H \triangleleft G$ o $G \triangleright H$ significa che H è un sottogruppo normale del gruppo G .
 $Z(G)$ è il centro del gruppo G .

$l(G)$ è il reticolo costituito dai sottogruppi di G .

$n(G)$ è il reticolo (modulare) costituito dai sottogruppi normali di G .

Se G è un gruppo finito, $|G|$ ne indica l'ordine.

Con:

$$a \xrightarrow{\varphi} b$$

si indicherà un isomorfismo φ tra i reticoli a e b , mentre:

$$a \xrightarrow{\psi} \hat{b}$$

sta a significare che ψ è un isomorfismo tra a ed il reticolo \hat{b} duale di b .

(*) Il presente lavoro, portato a termine nell'Istituto H. Poincaré di Parigi, è stato oggetto di una conferenza al Convegno di Oberwolfach sulle « Strutture ordinate » (24-27 aprile 1961).

2) Si ha:

Lemma 1-2. Se G è supersolubile ed $n(G)$ finito, G ha ordine finito.

Dimostrazione. Si ricordi che G è supersolubile quando possiede una catena principale [4]:

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_k = 1$$

a fattoriali tutti ciclici. Allora, ogni $l(G_{i-1}/G_i)$ è isomorfo ad un sottoreticolo di $n(G)$; perciò, se $n(G)$ è finito, tale è anche G_{i-1}/G_i . L'asserto è così dimostrato.

Lemma 2-2. Sia G un p -gruppo non ciclico. Se $|G| = p^\alpha$ e $\alpha \geq 3$, G possiede un quoziente non ciclico avente ordine $p^{\alpha-1}$.

Dimostrazione. Non essendo ciclico, G è dotato di due sottogruppi massimi distinti M_1 e M_2 ; poichè $\alpha \geq 3$, il sottogruppo $M_1 \cap M_2$ è diverso dal sottogruppo identico. Ne segue che esiste in G un sottogruppo normale K avente ordine p e tale che:

$$K \leq M_1 \cap M_2.$$

Il fattoriale G/K non è ciclico possedendo due distinti sottogruppi massimi: M_1/K e M_2/K .

Lemma 3-2. Siano: G un p -gruppo finito non ciclico, G' un gruppo supersolubile. Se $n(G)$ ed $n(G')$ sono isomorfi, G e G' hanno uguale ordine.

Dimostrazione. Per il Lemma 1-2, G' è un gruppo finito; sicchè, l'asserto è evidente quando $|G| = p^2$.

Supposto $a \geq 3$ e $|G| = p^a$, si procederà per induzione rispetto ad a .

A norma del Lemma 2-2, G possiede un fattoriale G/K non ciclico e avente ordine p^{a-1} ; sia φK l'immagine di K tramite un isomorfismo:

$$n(G) \xrightarrow{\varphi} n(G')$$

Essendo $n(G/K)$ isomorfo a $n(G'/\varphi K)$, l'ipotesi di induzione assicura che:

$$|G'/\varphi K| = p^{a-1}.$$

Inoltre, φK ha ordine primo q quale sottogruppo normale minimo di G' . Se $p = q$, il Lemma 3-2 è provato.

Si supponga per assurdo $p \neq q$ e si distinguano i casi seguenti:

(1) $Z(G)$ non è ciclico.

In tal caso, G possiede un sottogruppo normale minimo H distinto da K e si ha [4]:

$$K \cup H \leq Z(G)$$

Allora, in $H \cup K$ sono esattamente $p + 1$ sottogruppi normali minimi di G . Pertanto, anche $\varphi(H \cup K)$ contiene esattamente $p + 1$ sottogruppi normali minimi di G' .

D'altra parte, avendosi $|G'| = p^{a-1}q$ ed essendo φK l'unico q -sottogruppo di Sylow di G' , φH ha necessariamente ordine p . Ne segue:

$$\varphi(H \cup K) = \varphi H \times \varphi K$$

e così $\varphi(H \cup K)$ contiene soltanto due sottogruppi normali minimi di G' : φH e φK .

In tal modo, si è giunti ad una contraddizione

(2) $Z(G)$ è ciclico.

In questa ipotesi, K è il solo sottogruppo normale minimo di G [4] e quindi φK è ugualmente l'unico sottogruppo normale minimo di G' .

Ciò premesso ed osservato che φK è dotato in G' di un complemento R' isomorfo a $G'/\varphi K$, si dica C' il centralizzatore di φK in G' . Essendo $\varphi K \triangleleft G'$, è anche: $G' \triangleright C'$; perciò $C' \cap R'$ è normale in R' , risultando $C' \cap R'$ permutabile con ogni elemento di φK , si ha subito che $C' \cap R'$ è normale in G' . Se fosse $|C' \cap R'| \neq 1$, R' conterrebbe un sottogruppo H' normale minimo in G' ed H' sarebbe distinto da φK poichè $|R' \cap \varphi K| = 1$. Dunque:

$$|C' \cap R'| = 1$$

ed R' è isomorfo ad un gruppo di automorfismi di φK . Ne segue che R' è ciclico tale essendo φK ; pertanto, $G'/\varphi K$ è ciclico quale gruppo isomorfo ad R' .

D'altra parte $G'/\varphi K$ è un p -gruppo ed i reticoli $n(G'/\varphi K)$ ed $n(G/K)$ sono isomorfi, con ciò anche G/K risulta ciclico e si è ancora in presenza di una contraddizione.

Lemma 4-2. Sia G un gruppo finito prodotto diretto di gruppi semplici (non abeliani) tra loro isomorfi. Il reticolo $n(G)$ è distributivo.

Dimostrazione. L'asserto è evidente giacchè ogni elemento di $n(G)$, diverso dal sottogruppo identico, è ottenibile in unico modo come unione di punti [5].

Lemma 5-2. Siano: G un p -gruppo abeliano non ciclico, G' un gruppo finito. Se $l(G)$ ed $n(G')$ sono isomorfi, anche G e G' sono isomorfi.

Dimostrazione. Essendo $l(G)$ finito, anche G è finito. Inoltre, G possiede un sottogruppo abeliano elementare A avente ordine p^2 .

Detto φ un isomorfismo:

$$l(G) \xleftrightarrow{\varphi} n(G')$$

il reticolo $l(A)$ è isomorfo al reticolo r generato dai sottogruppi normali minimi di G' contenuti in φA . Perciò, r , oltre che dal massimo e dal minimo, è costituito da $p + 1$ punti N_i che sono gruppi isomorfi.

Si supponga per assurdo N_i' non risolubile.

Per l'essere normale minimo in G' il gruppo N_i' è privo di sottogruppi propri caratteristici; allora, N_i' , non essendo risolubile, è prodotto diretto di gruppi semplici isomorfi. Ne segue facilmente che anche φA è prodotto diretto di gruppi semplici isomorfi (non abeliani); sicchè, $n(\varphi A)$ è distributivo e della stessa proprietà gode r quale suo sottoreticolo. Siamo così giunti ad una contraddizione poichè r , essendo isomorfo ad $l(A)$, non è distributivo. Dunque, N_i' è risolubile. Dalle considerazioni ora fatte, si deduce senza difficoltà che ogni sottogruppo normale minimo di G' è risolubile.

Ciò posto, sia p^α ($\alpha \geq 3$) l'ordine di G e si conduca la dimostrazione per induzione rispetto ad α (l'asserto è vero se $|G| = p^2$).

A norma del Lemma 2.2, G possiede un fattoriale G/K non ciclico e d'ordine $p^{\alpha-1}$. Essendo $l(G/K)$ isomorfo a $n(G'/\varphi K)$ l'ipotesi d'induzione assicura che:

$$|G'/\varphi K| = p^{\alpha-1}.$$

Inoltre, φK ha ordine q^β (q numero primo) essendo normale minimo in G' e risolubile.

Si supponga per assurdo $p \neq q$.

Ovviamente G' possiede un sottogruppo H' normale minimo e distinto da φK ; H' è un p -gruppo poichè $|G'| = p^{\alpha-1} q^\beta$ e poichè φK è q -sottogruppo di Sylow di G' . Ne segue che in $H' \cup \varphi K = H' \times K$ sono soltanto due sottogruppi normali minimi di G' , mentre invece $K \cup \varphi^{-1} H'$ contiene $p + 1$ sottogruppi minimi di G . Questa contraddizione prova che $p = q$.

Dopo di ciò G e G' hanno ugual ordine perchè sono entrambi p -gruppi ed i reticoli $l(G)$ ed $n(G')$ sono per ipotesi isomorfi. Infine, è facile riconoscere che G' è prodotto diretto di gruppi ciclici e che conseguentemente G e G' sono isomorfi.

I Lemmi fin qui dimostrati, permettono di dare i Teoremi che chiudono questo numero.

Precisamente:

Teorema 1-2. Siano: G un gruppo speciale finito privo di sottogruppi di Sylow ciclici, G' un gruppo supersolubile. Se $n(G)$ ed $n(G')$ sono isomorfi, G e G' hanno ugual ordine e G' risulta speciale.

Dimostrazione. Il gruppo G' è prodotto diretto di gruppi, ciascuno dei quali ha il reticolo dei sottogruppi normali isomorfo all'analogo reticolo relativo ad un conveniente sottogruppo di Sylow di G . Il Teorema 1-2 segue quindi dal Lemma 3-2.

Osservazione. Può provarsi con esempi che il Teorema 1-2 non vale quando G' si suppone non risolubile e finito.

Teorema 2-2. Siano: G un gruppo speciale finito privo di sottogruppi di Sylow ciclici, G' un gruppo supersolubile. Se $l(G)$ ed $n(G')$ sono isomorfi, G' è speciale e $|G| = |G'|$.

Dimostrazione. Si possono adoperare procedimenti strettamente analoghi a quelli che hanno condotto al Teorema 1-2.

Osservazione. Esistono gruppi non isomorfi che soddisfano alle condizioni del Teorema 2-2. Infatti, se G è il gruppo dei quaternioni e G' il gruppo diedrale d'ordine 8, si ha: $l(G) = n(G')$.

Teorema 3-2. Siano: G un gruppo abeliano privo di sottogruppi di Sylow ciclici, G' un gruppo finito. Se $l(G)$ ed $n(G')$ sono isomorfi, anche G e G' sono isomorfi.

Dimostrazione. L'asserto è una immediata conseguenza del Lemma 5-2.

3. Si ha:

Lemma 1-3. Sia G un gruppo supersolubile finito. Se ogni sottogruppo normale minimo di G ha ordine uguale all'indice di ogni sottogruppo normale massimo, G è un p -gruppo.

Dimostrazione. Il Lemma 1-3 è già in [2].

Lemma 2-3. Siano G un p -gruppo finito non ciclico, G' un gruppo supersolubile con $n(G')$ duale di $n(G)$. Si ha:

- i) Se $Z(G)$ non è ciclico, G e G' hanno ugual ordine
- ii) Se $Z(G)$ è ciclico, G' ha ordine $p^\alpha q^\beta$ con q numero primo minore di p .

Dimostrazione. Sia φ un isomorfismo duale tra $n(G)$ ed $n(G')$.

Il gruppo G' possiede due distinti sottogruppi normali minimi φH e φK ; infatti, G , non essendo ciclico, contiene certamente due distinti sottogruppi massimi H e K . I sottogruppi normali di G contenenti $H \cap K$ costituiscono un reticolo r isomorfo al reticolo dei sottogruppi di un gruppo non ciclico avente ordine p^2 . Il reticolo r' dei sottogruppi normali di G' contenuti in $\varphi(H \cup K)$ è isomorfo ad r ; perciò, si riconosce agevolmente che $\varphi(H \cup K)$ ha ordine p^2 . In tal modo, resta anche provato che ogni sottogruppo normale minimo di G' ha ordine p .

Ciò premesso, si distinguano i casi seguenti:

(1) $Z(G)$ non è ciclico.

G' possiede più di un sottogruppo normale massimo perchè in G vi è più di un sottogruppo normale minimo. Allora, con procedimento ormai ben solito, si trova che ogni sottogruppo normale massimo di G' ha indice p . Ricordando che p è l'ordine di ogni sottogruppo normale minimo di G' , resta provato che G è un p -gruppo (*Lemma 1-3*). G e G' hanno egual ordine avendo $n(G)$ e $n(G')$ la stessa lunghezza.

(2) $Z(G)$ è ciclico.

Possedendo G un sol sottogruppo normale minimo [4], G' è dotato di un sol sottogruppo normale massimo: perciò, il derivato \bar{G}' di G' ha indice q^β (q numero primo). È noto che \bar{G}' è un gruppo speciale [4]; inoltre, $|\bar{G}'|$ è divisibile per p perchè ogni sottogruppo normale minimo di G' ha ordine p . Più ancora: G' è un p -gruppo; se così non fosse si avrebbe $\bar{G}' = A' \times B'$ con $|A'|$ e $|B'|$ primi tra loro, e, essendo A' e B' normali in G' , esisterebbero in G' due sottogruppi normali minimi $X' \leq A'$ e $Y' \leq B'$ aventi ordini primi tra loro mentre si è visto che i punti di $n(G')$ hanno tutti lo stesso ordine.

Le considerazioni sopra svolte, assicurano che G' ha ordine $p^\alpha q^\beta$.

Si supponga per assurdo: $p = q$.

In tal caso G' è un p -gruppo dotato di un sol sottogruppo massimo e quindi risulta ciclico. Allora $n(G')$ è una catena e lo stesso avverrà per $n(G)$ che è duale di $n(G')$, ma $n(G)$ non può essere una catena poichè per ipotesi G non è ciclico. Dunque: $p \neq q$.

Si osservi che i q -sottogruppi di Sylow di G' saranno di necessità ciclici e che evidentemente: $p > q$.

Osservazione. L'esempio seguente prova l'esistenza di gruppi G e G' di cui al *Lemma 2-3* ed al caso ii):

Sia G non abeliano e d'ordine 3^3 , mentre G' risulti così generato:

$$a_1^3 = a_2^3 = b^2 = 1, \quad a_1 a_2 = a_2 a_1, \quad b a_i b = a_i^{-1}.$$

È evidente che G' è supersolubile (di ordine $3^2 \cdot 2$) e che $n(G)$ è duale di $n(G')$.

Lemma 3-3. Siano: G un p -gruppo finito non ciclico, G' un gruppo supersolubile. Se $n(G')$ è duale di $l(G)$, G e G' hanno lo stesso ordine.

Dimostrazione. Con un procedimento analogo a quello che ha condotto al Lemma 2-3, si prova che ogni sottogruppo normale minimo di G' ha ordine p .

Ciò premesso, si distinguano i casi seguenti:

(1) G possiede più di un sottogruppo minimo.

In tal caso, si vede facilmente che ogni sottogruppo normale massimo di G' ha indice p . Conseguentemente (Lemma 1-3) G' è un p -gruppo e $|G| = |G'|$.

(2) G possiede un sol sottogruppo minimo.

In tal caso G è un gruppo (eventualmente generalizzato) dei quaternioni e p vale 2. Inoltre, è ovvio che G' possiede un sol sottogruppo normale massimo; quindi, il derivato $\overline{G'}$ di G' ha indice q^β (q numero primo). In più, il gruppo speciale $\overline{G'}$ è un 2-gruppo come si deduce dal fatto che ogni sottogruppo normale minimo di G' ha ordine 2.

Le considerazioni sopra svolte assicurano che G' ha ordine del tipo $2^\alpha q^\beta$. Si abbia $q = 2$.

In tal caso, G' è un 2-gruppo che è ciclico essendo dotato di un sol sottogruppo massimo. Ne segue che $n(G)$, come duale di $n(G')$, è una catena; onde, G è ciclico contro quanto si era supposto.

Si abbia: $q > 2$.

È noto [6] che G' possiede un sol q -sottogruppo di Sylow X' . Si avrà:

$$G' = \overline{G'} \times X'$$

e in G' , contro quanto prima riconosciuto, vi è più di un sottogruppo normale massimo.

In conclusione, l'eventualità (2) è possibile solo a priori.

Si è ora in grado di dare i Teoremi che chiudono questa Nota.

Teorema 1-3. Siano: G un gruppo supersolubile, G' un gruppo speciale finito senza alcun sottogruppo di Sylow a centro ciclico. Se $n(G)$ è duale di $n(G')$, G è speciale e: $|G| = |G'|$.

Dimostrazione. La tesi segue dal Lemma 2-3 e dal fatto che G' è prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow.

Teorema 2-3. Siano: G un gruppo supersolubile, G' un gruppo speciale finito privo di sottogruppi di Sylow ciclici. Se $n(G)$ è duale di $l(G')$, G è speciale e: $|G| = |G'|$.

Dimostrazione. Basta tener presente il Lemma 3-3.

Teorema 3-3. Siano: G un gruppo finito, G' un gruppo abeliano privo di sottogruppi di Sylow ciclici. Se $n(G)$ è duale di $l(G')$, i gruppi G e G' sono isomorfi.

Dimostrazione. Per ipotesi esiste un isomorfismo:

$$n(G) \xleftrightarrow{\varphi} l(G').$$

Inoltre, essendo G' finito al pari di $l(G')$, è ben nota [1] l'esistenza di un isomorfismo:

$$n(\tilde{G}') \xleftrightarrow{\psi} l(G').$$

Ne segue che il prodotto $\varphi\psi$ è un isomorfismo tra i reticoli $n(G)$ ed $l(G')$. A norma del Teorema 3-2, i gruppi G e G' risultano isomorfi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. BAER. *Dualism in abelian groups*. « Bull. Am. Math. Soc. » (1937), pp. 121-124.
- [2] M. CURZIO. *Sui gruppi supersolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è autoduale*. « Le Mat. » (1957), pp. 74-79.
- [3] M. CURZIO. *Certains criteres de nilpotence pour les groupes finis*. « Bull. Soc. Math. » (1961).
- [4] M. HALL. *The theory of groups*. The Mac Millan Company, New York (1959).
- [5] G. SCORZA. *Gruppi astratti*. Roma, Perrella (1939).
- [6] G. ZAPPA. *Sui gruppi supersolubili*. « Rend. Sem. Math. di Roma », 2 (1938), pp. 323-330.

RIASSUNTO. — Si danno delle condizioni, relative al reticolo dei sottogruppi normali di un gruppo, sufficienti poichè il gruppo, supposto supersolubile, risulti speciale.

SUMMARY. — Concerning the lattice of the normal subgroups of a groups, we give some conditions for being a supersoluble group a nilpotent group.

Sulle ipotesi a sostegno dei principii di Kirchhoff

Nota del dott. ing. Bruno Barbarito
presentata dal socio ordinario Vincenzo Franciosi

(Adunanza del dì 4 novembre 1961)

SOMMARIO: Si mostra che le ipotesi necessarie per la validità del principio inverso di KIRCHHOFF sono meno limitative di quelle che condizionano il principio diretto.

1. — Il teorema diretto di KIRCHHOFF, valido nelle note ipotesi che condizionano anche il principio di sovrapposizione, cui si aggiunge quella di levigatezza dei vincoli, si enuncia dicendo che ad un dato sistema di forze esterne si associa un'unica terna di componenti dello spostamento. Soltanto pochi Autori [1] [2] [3] accennano alla dimostrazione del teorema inverso. Per altro essi non specificano se tale dimostrazione sia legata alla formulazione di ipotesi più o meno restrittive di quelle necessarie per la dimostrazione del teorema diretto.

Oggetto della presente nota è di mostrare come il teorema inverso (ad una assegnata terna di componenti dello spostamento, definita in tutto il dominio occupato dal corpo, corrisponde, ed in modo univoco, una distribuzione di forze esterne) resta valido anche facendo astrazione dalla legge di HOOKE e dalla piccolezza delle componenti dello spostamento.

2. — Siano assegnate le componenti dello spostamento $u v w$ di un corpo comunque elastico, anche se non linearmente. Ad esse si associano le componenti della deformazione $\varepsilon_i \gamma_{jk}$, definite in modo univoco, in presenza di spostamenti non piccoli, in funzione delle $e_{ii} e_{ijk}$ [4] [5].

Attraverso le equazioni indefinite dell'equilibrio elastico (*)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yx}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} = -X \\ (1) \quad & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zy}} = -Y \\ & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xz}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_z} = -Z \end{aligned}$$

(*) Le φ , ε_{ij} , X , p che compaiono in tali equazioni sono funzioni delle coordinate del punto generico a deformazione avvenuta, e quindi si intendono definite nel dominio occupato dal corpo deformato.

e le equazioni ai limiti (*)

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} \alpha_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yx}} \alpha_y + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} \alpha_z &= p_x \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \alpha_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} \alpha_y + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zy}} \alpha_z &= p_y \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xz}} \alpha_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} \alpha_y + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_z} \alpha_z &= p_z \end{aligned}$$

si ricavano i sistemi di forze di massa $X Y Z$ e superficiali $p_x p_y p_z$ corrispondenti alle componenti dello spostamento $u v w$.

Con riferimento alla stessa configurazione deformata non è possibile che due diversi sistemi di forze soddisfino le (1) e (2), poichè il dominio cui le (1) e (2) si riferiscono è lo stesso, ed in ogni punto i primi membri delle (1) e (2) sono univocamente determinati.

Si può dunque affermare che ad una assegnata terna di componenti dello spostamento corrisponde, in modo univoco, una distribuzione di forze esterne.

Il principio, valido anche per i corpi non isotropi, è fondato, per la dimostrazione fatta sulle seguenti ipotesi:

a - componenti dello spostamento e loro derivate prime e seconde continue, uniformi e derivabili;

b - materiale elastico, anche se non linearmente;

c - vincoli privi di attrito.

Napoli, Istituti di Scienza delle Costruzioni e Ponti, Settembre 1961.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. TIMOSHENKO. *Théorie de l'élasticité*. Librairie polytechnique. Ch. Béranger, Paris e Liege, 1948.
- [2] C. L. RICCI. *Meccanica applicata alle costruzioni*. E.P.S.A., Editrice politecnica S.A., Napoli, 1942.
- [3] R. V. SOUTHWELL. *An introduction to the theory of elasticity*. Oxford University Press, 1941.
- [4] A. E. H. LOVE. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge University Press, pag. 59.
- [5] V. FRANCIOSI. *Scienza delle costruzioni*. Liguori, Napoli, vol. I, pag. 15.

RIASSUNTO. — Si offre una dimostrazione del teorema di KIRCHHOFF (ad una assegnata terna di componenti dello spostamento, definita in tutto il dominio occupato dal corpo, corrisponde, ed in modo univoco, una distribuzione di forze esterne) basata sulle

equazioni di equilibrio indefinito ed ai limiti scritte con riferimento al corpo deformato e si mette in evidenza come il teorema inverso, in analogia a quanto avviene in parecchi altri casi della teoria dell'elasticità, è valido sotto ipotesi molto meno restrittive di quelle che condizionano il teorema diretto.

SUMMARY. — KIRCHHOFF'S theorem (existence and uniqueness of the set of loads corresponding to any set of displacements, defined throughout a linear-elastic body) is demonstrated. The starting point in writing down the body and surface equilibrium equations taking into account the deformation of the body. It is also pointed out that-as in many other cases in the field of elasticity-the converse theorem holds under far less restrictive assumptions than the direct theorem.

Francesco Giordani.

Commemorazione letta dal socio Giovanni Malquori

nell' adunanza plenaria del 22 novembre 1961 (*)

Eminenza, egregi Colleghi, Signore e Signori,

mesta consuetudine è l'iniziare l'attività accademica onorando la memoria dei Colleghi che l'Accademia onorarono, sì che la fiaccola accesa ed alimentata da preclare virtù continui ad illuminare le vie del pensiero e della ricerca; affinché le loro opere vivano in noi ed il velario dell'oblio non le occulti o ne sminuisca la portata.

Onde esse restino di esempio e di incitamento, e nello stesso tempo di ammonimento e di guida.

Vi ringrazio pertanto, Colleghi, di avermi affidato l'incarico di ricordare il Maestro e l'Amico alla memoria del quale mi uniscono indissolubili legami di affetto e di stima deferente, legami affinatisi per lunga consuetudine di vita trascorsa nel medesimo ambiente, fin verso il pacato meriggio della di lui eccezionale, complessa, operosa esistenza costantemente protesa verso il dovere.

È quindi con sentimento scaturito dall'affetto, dalla devozione, dal profondo dolore per la sua dipartita, che mi accingo a porgere il deferente omaggio alla memoria di FRANCESCO GIORDANI, la cui figura si staglia ancor viva nel ricordo di noi tutti, mesto ricordo di una rigogliosa maturità spezzata innanzi tempo.

Compito purtroppo assai arduo, e decisamente superiore alle mie possibilità, quello di lumeggiare i tratti più salienti della figura morale e intellettuale: dello studioso, dell'educatore, del cittadino che alla nazione rese grandi servigi nei molti e gravi uffizi che ricoperse con dedizione severa e

(*) La commemorazione di Francesco Giordani, che è stata tenuta per iniziativa dell'Università di Napoli e della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti, si è svolta nell'Aula Magna dell'Università il giorno 22 Novembre 1961.

Erano presenti: Sua Em.za il Cardinale Arcivescovo di Napoli, il Prefetto e le più alte Autorità cittadine, il Presidente dell'Accademia Nazionale dei Lincei, il Presidente del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, il Presidente del Consiglio Nazionale delle Ricerche, il Governatore onorario della Banca d'Italia, l'intero Corpo Accademico dell'Ateneo napoletano, i Soci delle singole Accademie delle quali si compone la Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti, nonchè numerosi professori di altre Università ed esponenti del mondo industriale, economico e finanziario nazionale.

costante al dovere, apportando ovunque il valido contributo della sua alacre attività.

Compito difficile, dicevo, perchè la figura di FRANCESCO GIORDANI ha aspetto poliedrico; ci appare cioè come un luminoso poliedro ogni faccia del quale presenta una fisionomia così avvincente, con caratteri così pronunciati, da fermare l'attenzione dell'osservatore impedendogli di spaziare in una sintetica visione d'assieme.

Nella scuola infatti, nella ricerca, nell'organizzazione di questa e di quella, nel mondo accademico, nella pubblica amministrazione, nell'economia, nella finanza, nell'industria, la sua opera ha lasciato delle tracce profonde, e ovunque, dagli uomini di scienza e di azione, i suoi consigli furono sollecitati, la sua feconda collaborazione ricercata ed ambita, i suoi pareri altamente apprezzati.

* * *

FRANCESCO GIORDANI ebbe i natali in questa città, il 5 Luglio 1896, ed alla sua Napoli restò istintivamente e coscientemente legato avendo nel sangue le doti di bontà e di tolleranza della sua gente, la cui saggezza atavica si è venuta decantando attraverso esperienza multisecolare.

E di Napoli, oltre gli aspetti, diciamo così, consueti, legati alla bellezza del suo paesaggio, ai suoi tesori d'arte, alle sue tradizioni storiche e culturali, egli amò la parte viva, profondamente umana, sempre pronto con gli umili alla comprensione, al consiglio ed all'aiuto materiale.

E fu sempre per lui graditissima la permanenza, la distensione, anche per pochi giorni, e talvolta per poche ore, nel suo Istituto di Via Mezzocanone, a due passi dalla casa paterna, sul limitare di un antico quartiere dove le nobilissime tradizioni si incastonano negli aspetti e nelle espressioni di una umanità semplice ed umile, pullulante nei vichi e nelle viuzze in una singolare armonia di colori e di rumori.

La vita spirituale di Napoli, dagli inizi del secolo fin verso la prima guerra mondiale, risentiva beneficamente dell'impulso che ingegni eletti, operanti nei vari campi di attività del pensiero, le avevano impresso sul finire dell'ottocento.

Uomini insigni fra i quali ricordo: il Croce, il Miraglia, Francesco Saverio Nitti, Michelangelo Schipa, Giuseppe De Lorenzo, ed altri che mi scuso di non nominare, illuminavano con le loro opere e con il loro fascino quell'ambiente nel quale il giovanissimo GIORDANI veniva muovendo i primi passi verso l'erta scala dei valori sociali, spinto dal desiderio di spaziare in orizzonti sempre più vasti.

L'ambiente familiare favorì poi, non poco, anzi in modo determinante, direi, la formazione del di lui carattere, nonchè l'indirizzo del corso della sua carriera.

Un ambiente di antiche e solide virtù e di convinzione religiosa profonda, nel quale la rettitudine, l'attaccamento al dovere, l'austerità, non avevano compromessi, e dove spiccavano le qualità di probi funzionari — il padre: Giulio, era ingegnere presso il Comune di Napoli; gli zii: uno, Andrea, colonnello dell'esercito, l'altro, Domenico, Presidente di Cassazione e Senatore del regno — probi funzionari dalla quotidiana consuetudine con i quali discendeva il rispetto verso la cosa pubblica e l'intima soddisfazione di operare nell'interesse generale.

Ai familiari egli fu sempre legato da affetto esemplare, costantemente ricambiato da tutti con pari moneta, ed è nella Famiglia — e particolarmente nelle cure, nell'abnegazione della dolcissima sorella Elena — che egli trovò rifugio, sollievo e conforto quando il declino delle forze, dopo le prime avvisaglie divenne dolorosa realtà.

Frequentò la scuola pubblica e, per precisare, compì gli studi classici presso il Liceo Vittorio Emanuele a Piazza Dante, distinguendosi per la prontezza e la vivacità dell'ingegno, ossia per la rapidità e la capacità dell'apprendere, sì che assai prima del consueto egli aveva assimilato una solida preparazione umanistica. Quella intelligente padronanza dei classici, cioè, che più tardi affiora simpaticamente quà e là nella sua scintillante conversazione, o ad ornare lezioni e conferenze.

Giovanissimo entrò nel nostro Ateneo, attratto dagli studi di fisica che iniziò sotto la guida severa di MICHELE CANTONE, e questo inizio gli procurò l'occasione di affinare la sua tendenza, la sua curiosità verso i fenomeni chimico-fisici, campo che poco più tardi doveva divenire fertile palestra ove poter cimentare le eccezionali qualità della sua intelligenza.

Siamo sulla soglia della prima guerra mondiale; si sommuovono abitudini, si scuotono tradizioni, ideologie, rapporti sociali, e soprattutto si chiede alla tecnica sempre di più.

Atmosfera, questa, che non può lasciare indifferente il giovane universitario di cui ho tratteggiato or ora la preparazione culturale e la vivacità dell'ingegno. L'esordio dell'aviazione lo ha colpito e appassionato al punto che, fresco dei soli studi liceali, egli licenzia per le stampe quattro note su problemi di aeronautica e di aerodinamica, note dalla cui lettura a tanti anni di distanza, si è ben impressionati per la serietà dell'impostazione e la quadratura del ragionamento.

L'interesse per i fenomeni chimici spingeva tuttavia il GIORDANI verso l'Istituto di via Mezzocannone dove, sotto la guida di AGOSTINO OGLIALORO, e specialmente per opera della di lui consorte: la cara Signora BAKUNIN, di cui tutti noi conserviamo vivo ed affettuoso il ricordo ed il rimpianto, vennero avviate delle ricerche sperimentali in differenti campi di indagine, ricerche al buon esito delle quali il GIORDANI contribuì in modo determinante.

Questo ambiente di lavoro, sano ed onesto, era poi avvivato e poten-



FRANCESCO GIORDANI

ziato dal salotto della Signora, vero centro intellettuale di primo piano, dominato dal carattere forte e volitivo, e nello stesso tempo dalla umanità e dalla gentilezza della di Lei generosa personalità, salotto dove — come diversi di Lor Signori ricordano — convenivano i migliori nomi dell'ambiente universitario e dello stesso mondo culturale napoletano.

MARUSSIA BAKUNIN sa, con pronta intuizione, valutare le possibilità del giovane e differirle sagacemente nel tempo. Gli offre per tanto, incondizionata, la sua stima, la sua esperienza, il suo consiglio, indirizzandolo con mano ferma sulla via del successo.

È assistente prima ancora di conseguire la laurea in chimica, che ottiene nel 1918. Collaboratore della BAKUNIN in alcune ricerche di chimica organica, già in questi primi lavori sperimentali: sulle reazioni fotochimiche dei fenilnitroindoni, sulla eterificazione dei fenoli, sulle soluzioni colloidali e le sintesi organiche, egli pone a profitto: preparazione moderna e vedute di ampio orizzonte.

Ormai il GIORDANI è pronto per librarsi verso l'avvenire con l'entusiasmo che nasce dalla piena coscienza del proprio valore.

L'ambiente è particolarmente favorevole perchè alla fine della guerra il progresso tecnologico continua ad avanzare rapidamente aprendo le porte a profondi mutamenti di indirizzo. Le idee si affollano ed i tentativi verso concrete realizzazioni si moltiplicano.

Assistente ora alle cattedre di Chimica tecnologica organica e di Elettrochimica del nostro Politecnico, e dal 1919 nominato per meriti eccezionali professore incaricato di elettrochimica, prima ancora di aver conseguito la libera docenza, ha modo di trovarsi a contatto con diversi problemi pratici interessanti, fra i quali ricordo qui: la utilizzazione, attraverso la distillazione per ricavarne oli ittici, degli scisti bituminosi di Giffoni Vallepiiana, già studiati compiutamente, per la loro natura, dalla Signora BAKUNIN, e soprattutto l'elettrolisi delle salamoie nonchè i numerosi problemi marginali che a questa industria sono connessi, industria alla quale quì a Napoli, un gruppo di giovani capeggiato da UMBERTO POMILIO, si apprestava a dar vita.

È — ripeto — soprattutto in quest'ultimo settore che il GIORDANI si cimenta conseguendo dei risultati brillanti, la cui importanza si è venuta viepiù evidenziando attraverso gli anni.

Il problema, qualunque sia la sua finalità, è sempre impostato non solo con assoluto rigore, ma con tale ampiezza di visione — adopero le stesse parole della relazione per la sua nomina ad Accademico d'Italia, relazione firmata da: NICOLA PARRAVANO, GUGLIELMO MARCONI e GIOVACCHINO VOLPE — « onde i suoi studi teorici hanno condotto molto spesso a dirette applicazioni, mentre talune sue indagini di carattere applicativo lo hanno portato ad approfondire questioni di puro interesse teoretico »

È particolarmente il caso delle ricerche intorno agli elettrolizzatori a

diaframma e a circolazione, per i quali il GIORDANI fornisce la teoria completa, la cui messa a punto ha dovuto tuttavia essere preceduta da quella del comportamento degli elettroliti forti — nel caso specifico: dei cloruri e degli idrossidi alcalini — entro limiti estesi di concentrazione e di temperatura.

Assieme di indagini, questo, che mediante la rilevazione di conduttività e di viscosità, permette di risalire alla valutazione delle forze interioniche attraverso una suggestiva ricostruzione delle azioni reciproche che gli ioni di varia specie esercitano fra di loro nelle soluzioni.

Una interessante ricerca diretta alla osservazione della mobilità degli ioni: ossidrilici e idrogeno gli permetteva più tardi di raggiungere il duplice scopo: di ricondurre il comportamento dell'ione ossidrilico nel quadro generale che lega la mobilità degli ioni alla viscosità del mezzo, e di illustrare alla luce di questa interpretazione il comportamento degli elettroliti forti in soluzione concentrata.

La notevole mole di lavoro, i cui risultati inquadravano in termini realistici il problema dell'elettrolisi delle salamoie — interpretato fino ad allora sulla sola scorta di leggi valide per condizioni limite e per tanto irreali — ebbe i suoi benefici riflessi sulla progettazione delle attrezzature di elettrolisi, e l'elettrolizzatore che porta il nome: GIORDANI-POMILIO ha trovato larga applicazione pratica fino a tempi a noi molto vicini.

Come ho detto più avanti, accanto e contemporaneamente all'argomento di base: l'elettrolisi dei cloruri alcalini, il GIORDANI ha fermato la sua acuta capacità di osservazione su problemi marginali relativi allo stesso settore di applicazioni.

Intendo di riferirmi alla decomposizione delle soluzioni di ipoclorito, argomento questo che impostato, forse, al suo inizio, per rispondere a finalità pratiche, acquistò, sotto la di lui abile guida, un interesse teorico di primo piano.

Tali ricerche, infatti, sulla cinetica della decomposizione dell'ipoclorito in soluzione, e sui valori anormalmente elevati dei coefficienti di temperatura, gli permisero di sviluppare una rigorosa sintesi sulla interpretazione del fenomeno, con particolare riguardo al significato fisico dell'incremento critico della reazione, ed all'influenza esercitata dalla presenza dei catalizzatori.

La passione che ha sempre coltivato per il settore della cinetica chimica, specie per l'aspetto teorico, lo conduce ad esporre nuove e suggestive vedute sui fenomeni di accelerazione delle reazioni chimiche, comunque determinati (fotolisi, catalisi, ecc.), nonchè ad enunciare una teoria radiochimica della attivazione molecolare, dall'applicazione della quale risultano eliminate le discordanze numeriche riscontrate fino ad allora a partire da ipotesi differenti.

Per quanto vastissimi questi campi non soddisfacevano a pieno la sua attività di cultore di problemi elettrochimici. Abborda pertanto l'argomento allora controverso — nonostante i suoi stretti legami con la teoria dell'accumulatore alcalino — della esistenza e della natura degli ossidi superiori

del nickel, ottenendo, a mezzo di osservazioni termochimiche, dei risultati di notevole interesse.

Sempre nel campo dell'elettrochimica teorica ricordo altresì i nuovi metodi introdotti dal GIORDANI per lo studio dei fenomeni di polarizzazione elettrolitica, metodi che costituirono di poi il punto di partenza per ulteriori ricerche sul rendimento di corrente nell'elettrolisi e sulla messa a punto di dispositivi atti a discriminare ed a determinare separatamente i vari termini di cui si compone la sovratensione.

Ed infine i fenomeni di corrosione, per lo studio dei quali la Fondazione Politecnica istituì un apposito Centro presso l'Istituto di Elettrochimica del Politecnico.

A questo proposito mi sovviene la chiarissima esposizione da lui fatta al Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, tenutosi a Bolzano nel 1930, sopra il problema della corrosione dei metalli e delle loro leghe in genere, esposizione nel corso della quale evidenziò magistralmente la differenza concettuale fra « potenziale di regime » e « potenziale di equilibrio », fornendo una elegante interpretazione dell'azione protettrice esercitata da taluni metalli su altri, particolarmente messa a fuoco per il caso della latta.

Nel descrivere, sia pure in modo forse troppo succinto, l'alacre attività del giovane scienziato, non posso passare sotto silenzio il contributo che egli, nel medesimo periodo, portò alla risoluzione di taluni problemi di interesse industriale.

Ho già ricordato più avanti i suoi studi sugli scisti bituminosi, aggiungo quì che tali studi lo condussero alla realizzazione di un impianto pilota per la distillazione di quei materiali, con forno funzionante sul principio del gasogeno.

Rammento ancora le indagini sulla possibilità di mobilitare il potassio e l'alluminio delle leuciti mediante trattamento con acidi minerali; problema, questo della utilizzazione della leucite, che ha sempre attratto la sua attenzione sì che, più tardi, presidente dell'IRI, volle che l'argomento fosse ripreso in esame — sebbene su indirizzo diverso — con la dovuta ampiezza, e quì, a Bagnoli, curò la messa a punto di un impianto pilota per il trattamento cosiddetto alcalino — con calce, allo stato solido, a temperatura elevata — della leucite, onde solubilizzare allumina e potassa.

Il trattamento in questione fu collaudato con pieno successo sia per i rendimenti sia per le particolarità tecnologiche. Mutate tuttavia nel dopoguerra le condizioni del mercato della potassa e soprattutto dell'alluminio, il processo, che era stato felicemente inquadrato sul piano tecnico, non trovò possibilità di realizzazione sul piano economico.

Permettete che mi soffermi un istante rivolgendo il pensiero a quel gruppo di giovani d'ingegno, desiderosi di azione — fra i quali, in prima

linea il GIORDANI — che subito dopo la guerra del 1915-1918, stretti nell'ambito della « Elettrochimica Pomilio », seppero dare all'Italia un'industria nazionale della cellulosa, fondata su nuovi metodi di estrazione — e precisamente mediante trattamento con soda e con cloro — metodi di estrazione che si rivelarono particolarmente indicati per il trattamento delle piante con ciclo annuale, come ad esempio: lo sparto libico — che fu la prima materia ad esser presa in considerazione — e successivamente la paglia di grano.

Alla loro volontà ed alla loro lungimiranza si deve la attuale posizione che il processo cosiddetto: cloro-soda, occupa nel settore industriale della produzione delle cellulose bianchite, essendosi di poi affermato e largamente diffuso nel mondo.

Di queste iniziative FRANCESCO GIORDANI fu costantemente animatore sagace e instancabile, nelle sue molteplici qualità: di scienziato, di tecnico valente, e più tardi nella veste di vice-presidente e poi di presidente dell'IRI, sotto gli auspici del quale sorsero: nel 1936 lo stabilimento di Foggia — oggi del Poligrafico dello Stato — ed alcuni anni dopo quello di Chieti, della Società Cellulosa d'Italia, entrambi per il trattamento della paglia con il procedimento che ho ricordato più sopra.

* * *

La feconda attività di ricerca, di cui in quel che precede ho lumeggiato gli aspetti più salienti, non poteva non richiamare su di lui l'attenzione del mondo chimico italiano.

Sorretto e confortato dal materno ed equilibrato consiglio della Signora BAKUNIN, egli trova comprensione, poi simpatia, e con la simpatia la fiducia e l'affetto. NICOLA PARRAVANO, da poco succeduto ad EMANUELE PATERNÒ nella direzione dell'Istituto chimico dell'Università di Roma, di mano in mano che la dimestichezza con il nostro si accentua, è sempre più affascinato dalle sue qualità di cuore e di ingegno, dalla sua arguta vivacità, dalla probità cristallina, e si lega a lui con affetto fraterno. Quell'affetto che con accorato rimpianto GIORDANI ricorda commemorando l'amico scomparso.

..... « Eppure, sarebbe necessario che qualcuno potesse, in modo adeguato, fissare l'accogliente atmosfera che la sua presenza creava nell'Istituto chimico di via Panisperna, dove tanta gente conveniva da ogni parte per aiuto e consiglio, dove tanti di noi hanno vissuto ore indimenticabili in certe radiose giornate romane, quando il tepore del sole ed il tepore dell'amicizia facevano a gara per farci apparire migliore la vita »

Risultato primo dei ternati nel concorso per l'insegnamento dell'elettrochimica, che ebbe luogo nel 1925, fu in quello stesso anno chiamato a coprire come titolare quella cattedra che da diversi anni occupava per incarico presso il Politecnico.

Nel 1929 riceve il premio reale dei Lincei, e nel 1930 è nominato Accademico d'Italia.

Il suo nome ha ormai varcato i confini della patria, ed i risultati dei suoi studi sugli elettrolizzatori a diaframma ricevono ovunque ambito riconoscimento culminando con la nomina a dottore « *honoris causa* » dell'Università di Francoforte.

Brillante e meritata carriera, che il nostro ha saputo rapidamente percorrere giungendo ai più alti gradini della scala dei valori sociali!

NICOLA PARRAVANO, che ha precisa la percezione del valore e della versatilità dell'amico, ne sollecita ovunque il riconoscimento e, sempre a servizio del paese, propone la sua utilizzazione nei più diversi settori di attività, senza risparmio, e — permettetemi di dire — nutrendo troppa fiducia nella ampiezza dei limiti delle umane possibilità!

Donde vediamo il GIORDANI, chiamato ad assolvere incarichi di alta responsabilità, portare brillantemente a termine le sue missioni con quella pronta e sicura percezione delle linee basilari del problema, che stupiva chi non avesse avuto modo di apprezzare in precedenza le qualità del suo ingegno.

È inviato a Parigi, nel 1927, a rappresentare l'Italia alla Conferenza internazionale per la documentazione chimica. Presiede, nel 1928, la delegazione italiana alla « *Fuel Conference* », tenutasi a Londra. Nel 1925 a Bucarest, in occasione della VI Conferenza internazionale di chimica, presenta un lucido ed esauriente rapporto sul problema dell'azoto nel mondo, rapporto nel quale si ammira non solo la ricchezza della documentazione esposta, ma soprattutto la chiara ed ineccepibile impostazione tecnico-economica che è alla base di quel problema, al di fuori e al di sopra di interessi particolaristici.

Il successo di allora gli procurò in seguito la presidenza delle conferenze internazionali dei concimi chimici, nell'esercizio della quale il suo prestigio, unito a rare doti di equilibrio, riuscì a temperare, e sempre con signorile abilità, gli inevitabili contrasti di tendenze.

Si viene così delineando una aspetto che non ho ancora avuto modo di porre in evidenza.

Il senso dell'equilibrio, al quale ho accennato or ora, lo portava a considerare i problemi tecnici e industriali nella loro interezza, nella loro ragion d'essere nel tempo e nello spazio, e per tanto mai prescindendo dal loro aspetto economico, che egli aveva il dono di saper inquadrare e sintetizzare nei termini essenziali onde renderlo intelligibile anche ai non preparati a tal genere di considerazioni.

E mai a scapito del rigore, anche quando, per maggiore efficacia, soleva ricorrere ai tesori della sua scintillante e bonaria arguzia partenopea!

Alla morte di FERRUCCIO ZAMBONINI, aderendo alle insistenti preghiere dei colleghi, accetta la direzione dell'Istituto Chimico della Facoltà di scienze, attratto dalle possibilità — a quell'epoca però, quasi esclusivamente potenziali — di un grande istituto in fatto di mezzi, locali, attrezzature, nonchè dall'affollamento dei corsi, dalla varietà e dal numero degli insegnamenti, fidando soprattutto nel pieno vigore della sua giovinezza e non pensando neppure per un momento al gravame dei carichi didattici e organizzativi che tale situazione avrebbe comportato per lui nel tempo, a causa del numero e della crescente responsabilità degli incarichi esterni che era chiamato ad assolvere.

Più tardi, nel calmo meriggio della sua maturità, egli soleva talvolta rammaricarsi con gli amici di questa decisione, ed amava risalire con nostalgia agli anni della giovinezza ed alla quiete del piccolo Istituto di Elettrochimica del Politecnico, che egli aveva saputo dotare con dovizia dei mezzi più efficienti per la ricerca, e non solo nel settore di sua competenza, istituto di cui tuttavia volle conservare la direzione, ed insieme l'incarico dell'insegnamento ufficiale, fin quasi alla fine dell'ultima guerra, quando cioè fu lieto di cedere codesti compiti al suo allievo: MARIO MARIA JACOPETTI.

Al nostro Politecnico restò costantemente affezionato, ed i suoi molteplici ed annosi problemi strutturali trovarono in lui comprensione ed appoggio incondizionato.

Mi piace di ricordare qui che all'incirca alla stessa epoca alla quale avveniva il di lui trasferimento alla Facoltà di scienze, il suo prestigio animava una iniziativa diretta a rinsaldare i rapporti fra insegnamento tecnico superiore e attività industriali, iniziativa che nel 1932 si concretava con la istituzione della « Fondazione Politecnica per il mezzogiorno d'Italia », con lo scopo appunto di sollecitare la collaborazione e l'apporto delle categorie industriali onde promuovere ricerche in campo applicativo, con particolari indirizzi verso i problemi del Mezzogiorno.

Elementi propulsivi che coadiuvarono il GIORDANI nel portare a buon fine codesta iniziativa furono: la stima e l'appoggio di GIUSEPPE CENZATO — che con lui aveva allacciato saldi legami di amicizia, divenuti sempre più stretti con il passare degli anni — ed il dinamismo fattivo di GIROLAMO IPPOLITO.

Fu inoltre convinto che lo sviluppo industriale del mezzogiorno non può prescindere, anzi deve esser preceduto, da una larga ed accurata preparazione di specializzati, e non solo al livello universitario, ragione per cui egli, presidente del Consorzio provinciale per l'istruzione tecnica, si adoperò in ogni modo per l'estensione del numero e per il potenziamento dell'efficienza delle scuole professionali.



Le attitudini didattiche del Maestro furono veramente impareggiabili, e delle sue lezioni gli allievi di due generazioni conservano luminoso ricordo: per l'eloquenza forbita, per la calda e colorita comunicativa, per la facilità con la quale sapeva porgere anche gli argomenti più ostici, riuscendo sempre a evidenziare le linee fondamentali sfrondandole dal dettaglio informativo, sì che come pochi sapeva attrarre a sè l'attenzione e l'interesse dei discepoli e creare quella comunione spirituale che è l'aspirazione più ambita dello insegnante.

Assunta la direzione dell'Istituto chimico egli si adoperò per aumentarne la capacità di ricerca, sistemando convenientemente i locali e procurando nuove attrezzature scientifiche. Ma soprattutto ligio, come in ogni sua azione, al dovere, volle che codesta sistemazione fosse preceduta da quella didattica, e per tanto curò la organizzazione dei vari insegnamenti, con particolare riguardo ai corsi di esercitazioni che egli, a ragione, riteneva di fondamentale importanza per la preparazione degli allievi.

E nel sommo rispetto per le finalità didattiche del suo magistero, fu inflessibile verso se stesso e verso i suoi collaboratori.

Attratti dal fascino personale, dal prestigio del nome, dal fervore di lavoro che il Maestro aveva saputo suscitare, ben presto i giovani di buona volontà accorsero numerosi, lieti di sottoporsi alla disciplina che imponeva il metodo ed il rigore della ricerca scientifica fine che egli coltivava.

Animò e diresse — ormai, purtroppo, per quanto gli e lo permetteva la multiforme attività — diversi settori di ricerca, con particolare preferenza però per i campi di lavoro nei quali anni prima aveva esordito così felicemente, campi dalla coltivazione dei quali egli intravedeva la possibilità di arrivare, in prosieguo di tempo, a delle sintesi di assieme che avessero soddisfatto il suo spirito.

È praticamente impossibile — per inderogabili ragioni di tempo e di spazio! — di dire, anche brevemente, di queste ricerche e di illustrarne i risultati assommati nel corso di diversi anni.

Accennerò solo che — come del resto era da aspettarsi da una mente completa — nella sopravvenuta maturità il suo desiderio di creazione puntava verso orizzonti più vasti e si era allontanato sempre più dagli aspetti di dettaglio, direi quasi operativi, della ricerca per spaziare verso sintesi più ampie dove gli aspetti scientifici, tecnici, economici, di un dato problema si fondono armonicamente.

Svariati sono gli scritti che egli ci lascia su i più diversi argomenti: ma sia che tratti delle proprietà dispersoidali dei materiali elettrotecnici, oppure dell'apporto della chimica alla utilizzazione dell'energia termica, o della cellulosa per fibre artificiali, o, infine, dell'utilizzazione industriale della energia nucleare, ecc., sempre vi ammiri la chiarezza della impostazione dei

singoli problemi, e ti colpisce la sottigliezza con cui ne è condotta la disamina.

Nel 1934 ALBERTO BENEDEUCE, allora presidente dell'Istituto Ricostruzione Industriale, gli affida taluni incarichi di supervisione; ed il GIORDANI, uomo di scienza, sbalordisce — è la parola esatta — quegli uomini di azione per la prontezza e la profondità della percezione, per la eccezionale capacità ricettiva, e soprattutto per l'attitudine a ridurre in termini semplici e comprensivi, problemi complessi, anche di carattere economico, finanziario e amministrativo, e ad evidenziarne la soluzione pratica.

Di guisa che, rapidamente guadagna la stima e la fiducia di quegli ambienti, tanto che nel 1937 è nominato vice-presidente del predetto Istituto, e qualche anno dopo presidente.

All'IRI egli incontra DONATO MENICHELLA, e fra i due uomini, straordinariamente affini nella probità, nel disinteresse, nel considerare i doveri verso la cosa pubblica, si stabiliscono dei rapporti di reciproca stima dai quali, nel prosieguo degli anni, scaturirà un'amicizia fraternamente affettuosa.

Il compito del riassetto o della conversione di grossi complessi aziendali, nel clima di una politica economica generale, allora polarizzata su determinate finalità, non era certo dei più semplici.

Ciò nonostante GIORDANI e MENICHELLA, con lo stesso prestigio della loro personalità, tennero, in quel periodo, saldamente nelle loro mani il timone dell'IRI impedendo deviazioni pericolose che avrebbero compromesso la stabilità dell'Istituto, e dando corpo, in ultima analisi, all'attuale formula IRI, mai transigendo sul sano principio della economicità delle gestioni.

La fine della guerra trova FRANCESCO GIORDANI a Napoli, amareggiato dal corso degli avvenimenti ma sempre fiducioso in un avvenire migliore.

Egli è al disopra della mischia, e gli è di conforto la stima deferente dei colleghi e l'affetto degli amici e dei discepoli. Tuttavia la luce vivissima che ha brillato per anni non può esser spenta, ed al rasserenarsi della situazione al GIORDANI vengono offerte mansioni di alta responsabilità; lo stesso MENICHELLA, ora Governatore della Banca d'Italia, ne sollecita, ed ottiene, la collaborazione, affidandogli, per l'Italia e per l'estero, degli incarichi di importanza vitale per l'economia del paese, quale, ad esempio, la partecipazione alla Banca Internazionale dei pagamenti.

GIORDANI è tuttavia perplesso, anzi restio ad accettare, preferendo di rimanere appartato nel suo istituto fra i collaboratori e gli allievi, ai quali si dedica con abnegazione generosa prodigandosi per procurare ai primi

attrezzature di lavoro consone alla avvenuta evoluzione della tecnica della sperimentazione, ai secondi, un magnifico trattato di chimica generale ed inorganica, dove è raccolto con criterio critico il fiore delle sue lezioni, trattato al quale purtroppo, distolto ben presto dalle sopravvenute nuove occupazioni, non potè dare di poi l'ultimo tocco.

La sua sensibilità avverte che i tempi stanno mutando e che l'avanzata del progresso comporta l'ingresso di nuove energie giovani e, diciamo pure, di nuove forze sociali, che occorre guidare ed incanalare onde favorire ogni aspetto positivo e nello stesso tempo impedire lo sperpero derivante dalla mancata o dalla deficiente utilizzazione di istituzioni e strutture tuttora efficienti.

Al settore dell'istruzione superiore e, per precisare, a tutto ciò che è attinente alla ricerca scientifica, egli si appresta a donare la sua capacità organizzativa.

Succeduto, nel 1938, a NICOLA PARRAVANO nella presidenza del Comitato per la chimica del C.N.R., e componente autorevole del consiglio di presidenza, si era da tempo preoccupato di ripartire i magri fondi di cui si disponeva, onde potenziare le possibilità di quegli istituti universitari dove esistesse una concreta attività di ricerca, in qualsiasi direzione .

Naturalmente, la sua mente spaziava ben più lontano, avendo egli chiaro che codesta ripartizione era solo un modesto sollievo per le precarie, deplorevoli condizioni nelle quali si muoveva la ricerca scientifica nell'ambito degli istituti di istruzione superiore, di tal che per anni si è adoperato con tenacia presso le autorità di Governo affinchè il problema venisse affrontato alla base, venisse posto sul suo giusto piano e si provvedesse a migliorare in modo concreto gli stanziamenti ad essa ricerca destinati, convinto che solo con adeguate disponibilità si sarebbe potuto dar vita alle grandi organizzazioni di ricerca, ed attrezzarle convenientemente di personale e di mezzi.

Questa opera — ripeto — appassionata e costantemente protesa verso l'innalzamento del livello degli studi, non ebbe sosta, e si estrinsecò sia nell'ambito del C.N.R., di cui il GIORDANI fu presidente negli anni della guerra, e successivamente dal 1956 in poi, sia in quello del Consiglio superiore della pubblica istruzione al quale il Nostro appartenne per diverse sessioni, a partire dal lontano 1930.

Ricordino i giovani ricercatori, in tutti i settori e di tutti gli indirizzi, i quali godono oggi dell'indiscutibile tangibile miglioramento del tono della ricerca scientifica, la gratitudine dovuta alla memoria di FRANCESCO GIORDANI!

Nel 1952 promosse la creazione del Comitato Nazionale per le Ricerche Nucleari, assumendone la presidenza che conservò per qualche anno intesendo la trama di una organizzazione giunta di poi ad alto grado di efficienza.

Anche in questo campo, del tutto nuovo per lui, le eccezionali doti di percezione, di assimilazione e di sintesi, gli permisero di affermarsi rapida-

mente, sì che nel 1955 egli guida a Ginevra la delegazione italiana alla 1^a Conferenza internazionale sull'utilizzazione pacifica dell'energia atomica, e poco dopo è chiamato, insieme con ARMAND ed ETZEL, a stendere il rapporto così detto dei « Tre Saggi », rapporto che ha avuto larga eco in campo internazionale e nel quale vengono presentate ed analizzate le prospettive future sull'impiego dell'energia nucleare per la produzione di energia elettrica su scala industriale. La coordinazione proposta, di possibilità e di iniziative sul piano europeo, si concretò successivamente — come Loro sanno — nella costituzione dell' « Euratom ».

• • •

Alla nostra Accademia, che lo aveva accolto giovanissimo, restò diligentemente affezionato e si prodigò per innalzarne il decoro e la efficienza culturale.

Corrispondente dal 1921, ne tenne la presidenza nel 1934, nel 1951 e nel 1958, anno quest'ultimo nel quale troviamo il GIORDANI a presiedere altresì la Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti, di Napoli.

Accademico dei Lincei, della stessa Accademia fu nominato vice-presidente nel 1952 e presidente nel 1958.

Nell'espletamento di questo incarico — che lui ebbe particolarmente gradito — seppe in ogni circostanza far apprezzare la sua naturale signorilità, il suo livello spirituale, le salde basi della sua cultura scientifica ed umanistica e, nel governo delle Fondazioni: FELTRINELLI e DONEGANI, la non comune abilità di amministratore oculato e prudente.

Fu onorato di appartenere all'Accademia Pontificia delle Scienze, e molte altre Accademie e Istituzioni culturali — che mi scuso di non nominare — vollero, in Italia ed all'estero, onorarsi del suo nome.

Parimente — per non tediare Lor Signori — non nomino tutte le Amministrazioni pubbliche, gli Enti vari, le Associazioni di categoria, che chiesero con continuità al GIORDANI parere e consiglio, nè le diverse aziende industriali alle quali apportò il prezioso contributo della sua preparazione tecnologica, dell'ampiezza e della praticità di veduta, della più scrupolosa probità amministrativa.

Cito solo che la Montecatini lo ebbe suo vice-presidente e l'Ilva presidente, nel periodo preparatorio di un radicale rinnovamento.

E non posso passare sotto silenzio la presidenza della Svimez, alla quale volle donare la sua cosciente solidarietà di meridionale, battendosi in ogni occasione, qualunque fosse la posizione di partenza, per un migliore avvenire del Mezzogiorno, ed in specie della sua Napoli diletta.

• • •

Scienziato di fama internazionale, ebbe dei compiti della scienza una concezione etica — direi quasi religiosa —, quella concezione che attraverso

la disciplina dell'analisi conduce al rispetto dell'armonia della Legge.

Portò nell'azione tutta la gamma degli affetti e delle passioni più elette. Apprezzò in sommo grado la lealtà e la dirittura del carattere, indulgente e generoso con gli umili, inflessibile con i pusillanimi ed i filistei. E nel giudizio degli uomini non fu mai pessimista, incline a dimenticare gli aspetti meno buoni ed a porre in luce i migliori; nè mai nelle relazioni con essi fece uso men che discreto dell'autorità che gli derivava dalle posizioni eminenti che aveva raggiunto.

Sentì il culto dell'amicizia come è dato sentire solo agli animi forti, e per gli amici fu sollecito in ogni occasione ed in ogni modo, tollerando e rispettando con signorile discrezione, anche aspetti ed atteggiamenti che nel suo intimo disapprovava.

Amò i giovani e di essi volle forgiare soprattutto degli uomini.

Con l'esempio di una assoluta dedizione al dovere da compiere, con la quadratura del ragionamento, con l'umanità del giudizio e del tratto, sapeva acuire nei discepoli, accanto alla gioia del lavoro, il senso della responsabilità in ogni istante, senza tregue nè compromessi di sorta.

Alla Famiglia restò sempre affettuosamente legato, e pur in mezzo al turbinio delle più diverse mansioni, alle svariate esteriorità inerenti alla sua posizione di primo piano, conservò intatto il senso nostalgico del bel vivere semplice.

..... « Nella coscienza di un individuo puro ed onesto non troverai nulla di corrotto, di contaminato che sembri integro e sia putrido, nè mai la sua vita sarà imperfetta, se pur la morte lo colpisca d'improvviso »

In questo pensiero di MARCO AURELIO è racchiuso l'elogio dell'Uomo.

* * *

Lo vidi per l'ultima volta a Natale, e purtroppo anch'io, che fra gli amici che seguivano con trepida attesa le vicissitudini del male, ero fra i più fiduciosi, tanto possente mi era apparsa in ogni tempo la sua vitalità, ebbi la precisa sensazione dell'inevitabile.

Il Maestro si distaccava vieppiù dalle cose terrene e la sua mente veniva astraendosi verso quel mondo migliore, che egli aveva sognato ed al quale aveva donato la sua stessa esistenza.

È così, che in serena umiltà, il 24 Gennaio Egli approdava dolcemente ai silenzi delle isole elisie.

Colleghil

È solo con opere egregie che degnamente si onora la memoria di FRANCESCO GIORDANI.

Possa lo spirito che aleggia in quest'aula, guidarci ognora sulla traccia che Egli imprime — indelebile — nei nostri cuori!

Gioacchino Leo Sera

Commemorazione letta dal socio Mario Galgano

(Adunanza del dì 2 dicembre 1961)

Il Professor SERA veniva talvolta all'Istituto di Anatomia Comparata di Firenze, dove ero allora assistente. Ricordo la sua alta, asciutta figura, il suo volto fine di studioso dai tratti incisivi e volitivi, i chiari occhi dallo sguardo gentile e osservatore. Lo rividi per l'ultima volta, cieco ormai da tempo, ma sorretto sempre da un'indomita volontà, animato sempre dalla sete del sapere, e intento alla stesura di un'opera di largo respiro sui Mammiferi, purtroppo rimasta incompiuta.

Era nato a Roma il 15 settembre 1878. Laureatosi nel 1903 in Medicina e Chirurgia presso l'Università della città natale, pochi anni dopo si dedicava agli studi antropologici, in cui ben presto doveva primeggiare. Nel 1911, presso l'Università di Bologna, conseguì la libera docenza in Antropologia, e nell'anno seguente gli fu conferito l'incarico di questa materia nell'Università di Pavia, che tenne fino al 1925.

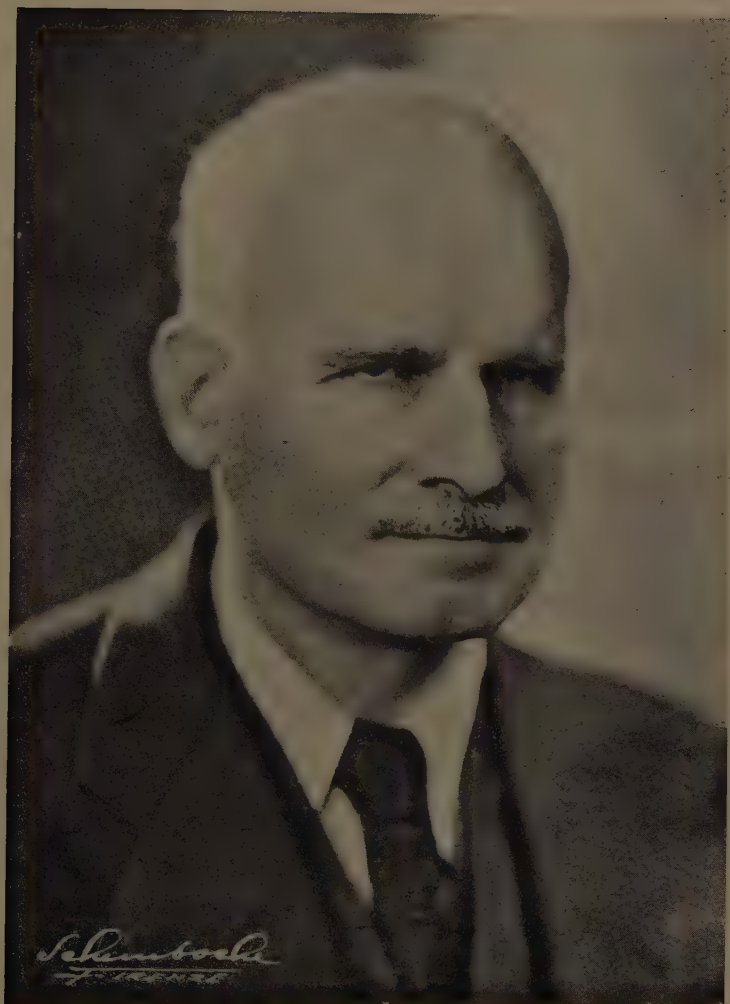
Quivi, per suo merito, sorse nel 1913 l'Istituto di Antropologia, che in séguito accrebbe, ed al quale donò recentemente la sua ricca miscellanea. Sempre a Pavia, fondò il « Giornale per la Morfologia dell'Uomo e dei Primati », nel quale pubblicò soprattutto lavori suoi e dei suoi allievi durante il decennio 1917-1927; per tale iniziativa, presa in un periodo difficilissimo per il nostro Paese, fu molto lodato da parecchi fra i più autorevoli colleghi italiani e stranieri.

Nell'anno accademico 1924-'25 tenne anche l'incarico di Antropologia presso l'Università di Milano. Dal 1925 al 1937 diresse la Sezione « Antropologia » dell'Enciclopedia Italiana.

Nel gennaio del 1926 passò all'Università di Napoli, incaricato dell'insegnamento di Antropologia per l'anno 1926-'27. Nel 1927 fu nominato professore di Antropologia « per meriti eccezionali », e da allora diresse l'Istituto di Antropologia dell'Università di Napoli fino al 1948, anno in cui fu posto fuori ruolo per raggiunti limiti di età.

Era membro della Società Italiana di Scienze Naturali di Milano, della Società Italiana di Antropologia ed Etnologia, dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere di Milano, della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, della Société d'Anthropologie di Parigi e dell'Académie Malgache.

Il SERA è stato uno degli antropologi più colti e più dotati, il quale,



GIOACCHINO LEO SERA

approfonditosi in molti e differenti campi di ricerca, ha portato contributi originali di grande valore, talora essenziali per la risoluzione di problemi d'importanza anche generale, ed ha aperto nuove prospettive. È stato soprattutto un morfologo nel senso più ampio della parola, che dai suoi studi ha saputo trarre interpretazioni nuove, e risalire a vedute d'insieme, fino ai problemi della filogenesi dell'Uomo e delle sue forme, tenendo debito conto, nell'analisi naturalistica, dei fattori geografici e di quelli cronologici.

I primi lavori antropologici del SERA furono pubblicati nel 1909: una nota intorno alla morfologia dell'occhio mongolico, argomento che riprese soltanto più tardi; due lavori intorno al cranio fossile di Gibralta, con i quali dette l'avvio a una lunghissima serie di ricerche paleontologiche, e una comunicazione concernente la plagiocefalia.

L'opera scientifica di Gioacchino Leo SERA è però così vasta e varia, che dovrò limitarmi a ricordarne solo i temi principali. Premetterò le innovazioni tecniche, introdotte dal SERA, perché su di esse è fondata buona parte dei suoi studi intorno ai resti fossili e alle razze attuali.

Costruì (1910 a) e poi perfezionò (1920 a) un orbitostato d'uso facile e rapido, che permette di prendere l'asse vero della formazione steretica della orbita, e quindi di determinare con precisione il piano binorbitale di orientamento del cranio, ovviando agli inconvenienti teorici e tecnici dell'orbitostato di BROCA. Si noti che il piano binorbitale era — si può dire — l'unico piano di orientamento del cranio allora conosciuto, che fosse valido in generale non solo per i Primati, ma anche per i Mammiferi (beninteso, in quelli ove l'orbita è almeno costituita da un anello più o meno completo). Ciò permise al SERA di fare utili comparazioni.

Ideò pure uno strumento e una tecnica (1915), per misurare, senza incertezze, l'altezza sopraauricolare del cranio: lo strumento, che è una modificazione del radiometro di BUSK, trova le sue applicazioni più importanti sui crani fossili privi di base e sui crani con base appiattita per fenomeni patologici e senili.

Ma nel campo dell'antropometria ha portato contributi di gran lunga più importanti con i suoi metodi per la valutazione dell'altezza del cranio in rapporto ai diametri di larghezza e di lunghezza dello stesso. Si servì dapprima (1910 e), nel lavoro « Sul significato della platicefalia, etc. », per valutare le altezze relative, di un sistema di rette empiriche (cioè di curve regolarizzate in rette), ricavate riportando, sopra un diagramma a coordinate ortogonali, sulle ascisse i valori dell'indice orizzontale e sulle ordinate quelli dell'indice vertico-longitudinale. Inoltre stabilì tre serie come serie fondamentali e corrispondenti ai tre tipi di altezza, piccola, media e forte. Circa due anni dopo (1912 c - 1913), nel lavoro intitolato « L'altezza del cranio in America », adottò altre linee, costruibili graficamente in un modo molto semplice, che in séguito risultarono essere delle iperboli corrispondenti all'indice misto di TOPINARD (1879), uguale alla media dei due indici verti-

cali. Ma, ciò che è più importante, tracciò delle perpendicolari a quelle linee, per separare i crani lunghi da quelli corti. Risolse quindi in tal modo, sia pure in via empirica, ma completamente, tanto il problema formale, metodologico, dell'apprezzamento dell'altezza in funzione delle altre due dimensioni, quanto il problema concreto, di fatto, di stabilire i tipi fondamentali d'altezza del cranio (cfr. 1931 *a*).

Doveva tuttavia scaturire nel 1914 dalla mente del GIARDINA, alimentata dalla lettura dei lavori del SERA e dalle discussioni amichevoli avute con lui, la vera misura dell'altezza relativa, chiamata indice di altezza, ed espressa dalla formula:

$$Y = \frac{H}{\sqrt{L \cdot B}}$$

in cui H indica l'altezza, L la lunghezza e B la larghezza. Dalla formula Y si può giungere a costruire delle parabole (curve di eguale indice di altezza, o curve di altezza). Nel quadrante cranico le curve empiriche del SERA coincidono quasi con tali parabole, e in pratica le due sorta di curve si equivalgono; tanto che lo stesso GIARDINA ebbe a scrivere in proposito: « Servendosi dunque del nuovo indice di altezza, è bene ripeterlo, non è altro che proseguire nell'indirizzo iniziato dal SERA nel suo lavoro sul significato della platicefalia ». Le iperboli del SERA si discostano un poco di più dalle parabole: « presentano però — scrive ancora il GIARDINA — il vantaggio di essere facilmente costruibili senza calcoli di sorta ».

Il SERA, non solo fu il primo (1914 *e*) a riconoscere il grande valore del nuovo indice, ma nel 1916 (1916 *a*) elaborò anche un foglio di proiezione per rapporti morfometrici in corpi tridimensionali, che dà la possibilità di apprezzare con una sola occhiata l'altezza del cranio in funzione dei due diametri orizzontali (di lunghezza massima e di larghezza massima), secondo l'indice di altezza del GIARDINA.

I lavori scientifici del SERA (1910 *e*; 1911 *e*; 1912 *c* - 1913; 1920 *f*; 1921 *a b*; 1929 *a, b, e*, 1930-'31, 1931 *a, b*; 1934 *a, b*; 1935 *b, c*) e dei suoi allievi (PELIZZOLA, GIOIA, FIORATTI), fatti in questo campo, hanno dato risultati d'importanza fondamentale per il riconoscimento delle varie razze attuali e dei loro rapporti con le popolazioni preistoriche. Possiamo desumerne il perché dalle stesse parole del SERA (1931 *a*): « Una serie di lavori antropogeografici, in testa ai quali sono quelli del BIASUTTI, mentre ha posto in luce come l'indice orizzontale non abbia una grande portata tipica differenziativa delle forme, mostra come l'altezza del cranio abbia maggiore importanza. Le forme diverse di altezza del cranio manifestano un grado assai più spiccato di segregazione geografica e quindi un maggior valore tipico ». È pertanto auspicabile che il fertile indirizzo di ricerca del SERA, più completo e preciso di quelli oggi generalmente in uso, si diffonda maggiormente all'estero,

affinché siano colmate le grandi lacune, che ancora oggi restano per molti paesi.

Il SERA, d'altra parte, si è avvalso da maestro anche dei criteri descrittivi nei campi della paleontologia, dei caratteri morfologici e della classificazione dei tipi razziali attuali.

Come paleontologo ebbe fama internazionale; ma non fu, io credo, sufficientemente apprezzato.

Con due lavori critici — a mio parere di somma importanza — fu il primo, nel 1909 (1909 *b, c*), a sostenere che il cranio di Gibraltar apparteneva a una forma più antica dell'Uomo di Neanderthal tipico, a una forma primitiva, preneandertaloide, e che l'Uomo di Neanderthal non era, come allora si riteneva, un tipo primitivo, ma un tipo specializzato. Si può dire che in tal modo precorse la suddivisione, oggi da studiosi di gran fama seguita, dei Paleantropi in Preneandertaliani o gruppo di Ehringsdorf, dell'interglaciale riss-würmiano (il cranio di Steinheim ancora più antico) e in Neandertaliani o gruppo di La Chapelle-aux-Saints, del Würm I.

E già nel secondo di questi lavori scriveva (pag. 178), quando non si conosceva ancora il Sinantropo, che « l'acquisto di spazio del cranio umano non si conosceva ancora il Sinantropo, che « l'acquisto di spazio del cranio umano non è stato solamente in alto, come parrebbe potesse desumersi dalle idee e dai metodi dello SCHWALBE, ma anche in basso; non è stato solamente un accrescimento verso la fronte e verso l'apice, ma anche verso la parte posteriore della base del cranio ». Aggiungeva che, dal confronto fra Pitecantropo, Gibraltar e Neanderthal, i segmenti che più risultavano aumentati erano la porzione dell'occipitale fra inion e lambda e il segmento dei parietali fra lambda e bregma, poi il frontale e la porzione sottoiniac del- l'occipitale. Depongono in favore della giustezza delle osservazioni del SERA molte ricerche, fra le quali ricorderò soltanto le seguenti: Sergio SERCI (1941) ha rilevato che il distacco fra le creste occipitale e sopramastoidea nel Sinantropo, e quindi lo spazio che si interpone tra esse, è un carattere esclusivamente umano, assente in tutti i Pitecantropi. Tale distacco si accompagna, come aveva dimostrato in uno studio dell'encefalo umano nel 1908, allo sviluppo della sezione posteriore del cervello, e più precisamente ai fenomeni d'evoluzione, cui soggiace in particolar modo il lobulo parietale inferiore. Più recentemente DELATTRE (1951), usando il piano vestibolare orizzontale preconizzato da GIRARD (1911, 1922, 1923, 1924), è giunto alla conclusione che il cranio animale si sia trasformato in quello umano mediante l'aggiunta di una specie di spicchio sferico subito al disopra dell'inion, dove il cranio si sarebbe aperto, permettendo l'accrescimento dell'encefalo (cfr. anche DELATTRE e FENART, 1960).

Affacciava inoltre (pag. 179-183) l'ipotesi, estesa in séguito fino a costituire un saggio di dottrina craniologica (1911 *a*; 1920 *a*; 1931 *b*), che la dolico- e la brachicefalia trovassero la loro spiegazione nella flessione dello

sfenoidale a livello della commissura sfenobasilare, a partire da una forma come quella del cranio di Gibraltar, avente base cranica estesa, forma brachioide (indice 80) e platicefalia teromorica. La serie architettrale di sviluppo sarebbe stata: brachiplaticefalia teromorica, dolicoipsicefalia, brachipsicefalia, mentre il basioccipitale assumeva una posizione sempre più verticale e i conseguenti fenomeni di tensione della volta cranica, dapprima sul piano sagittale, venivano poi esercitati nel piano orizzontale, che passa al livello della commissura sfenobasilare. Certo è, come ha dimostrato BIASUTTI (1910) con la distribuzione geografica dell'indice cefalico e dei tipi craniometrici, che la brachicefalia si è sviluppata dalla dolicocefalia in numerosi centri della superficie terrestre. Tuttavia solo il tempo ci potrà dire il valore della dottrina del SERA.

Esponendo infine il dubbio che la razza di Neanderthal fosse il prodotto dell'adattamento dell'uomo alle mutate condizioni climatiche del glaciale, e successivamente (1910 e - 1911 a) distingueva la platicefalia primitiva, teromorfa, del cranio di Gibraltar da quella della razza di Neanderthal e di numerosissimi gruppi umani attuali, emettendo l'ipotesi che quest'ultima fosse « sorta probabilmente come conseguenza di un adattamento passivo al clima glaciale, risultante dall'azione di processi semipatologici o francamente patologici, che dovettero essere nei glaciali più frequenti ed intensi e che agirono per variazione rapida, abbassando l'altezza del cranio ». Ciò in parziale accordo con le osservazioni di BIASUTTI (1910, 1934, 1959), secondo il quale la brachiplaticefalia è relativamente recente e sembra più spesso di origine locale, o legata a condizioni ambientali poco favorevoli o a regioni montane e isolate. PIVETEAU (1957) ritiene che la concordanza della platicefalia con un clima freddo esista per gli Ostiachi, viventi in un clima subpolare, come per primo ammise il SERA, ma non si verifichi per i Boscimani.

Illustrò il cranio dell'Olmo (1930-'31), del quale descrisse le varie caratteristiche, tra cui l'assenza di arcate sopraorbitarie, la dolico-platicefalia (con un indice orizzontale di circa 76, che indica un cranio un po' larghetto), le quali sono risultate vicine a quelle dei resti di Swanscombe e di Fontéchevade, ritrovati successivamente, e considerati come gli unici rappresentanti d'età ben stabilita di quel gruppo di Ominidi, nuovo per il Pleistocene inferiore, che è stato chiamato dei Presapianti o Profanerantropi. Il SERA osservò pure che questo cranio possiede una capacità elevata (di circa 1400 cc) ed una fronte notevolmente larga. Oggi, dopo la scoperta dei resti di Swanscombe nel 1935 e di Fontéchevade nel 1947, e dopo che GOTTARDI e TONGIORGI hanno trovato una quantità di fluoro assai elevata nel cranio dell'Olmo, PARENTI (1959) tenderebbe a ritenerlo il più recente dei Profanerantropi e il più vicino alle forme pienamente fanerantropiche (cioè di *Homo sapiens*), che dilagarono in Europa dopo il primo acme della glaciazione di Würm.

Notevoli sono le conclusioni, cui giunse intorno al problema del tipo di Grimaldi, *Homo sapiens* del Paleolitico superiore, ritenuto in genere di

tipo negroide. SERA (1918), invece, considerò il tipo di Grimaldi appartenente al *phylum* australo-caucasico e rappresentante una forma molto precoce di differenziamento in senso europeo. La sua ipotesi è avvalorata dal fatto che non sono stati trovati fino a oggi, nemmeno in Africa, resti fossili altrettanto antichi, che siano simili a quelli dei cosiddetti negroidi di Grimaldi.

Molto interessanti sono i risultati dell'analisi dei movimenti etnici avvenuti nel Caucaso (1920 f). Secondo il SERA l'elemento somatico più antico è quello brachi-platicefalo, a caratteri della faccia « un po' diversi dagli alpini » (1921 b), da lui trovato soprattutto nelle valli più alte, dove si è conservato meglio, a causa dell'isolamento geografico. Con una scorsa della bibliografia, possiamo giungere a identificare tale tipo nella varietà Georgiana dell'Uomo indoeuropeo brachimorfo, distinta dal GIUFFRIDA-RUGGERI nel 1918 come la più bassa e la più leptorina fra le varietà leucoderme, e nella sottorazza Georgiana della Razza Alpina del BIASUTTI (1941). Nel Caucaso centrale (Ossezia) invasori dolico-platicefali biondi di tipo germanico avrebbero scalato il Caucaso del Sud al Nord (e non viceversa), lasciando tracce del loro sangue sul posto, per riversarsi in Europa (cfr. anche 1921 a). Soltanto dopo di loro seguirono i meridionali dolico-ipsicefali, che costituiscono l'attuale fondo della popolazione ossetica. Queste vedute del SERA sono confortate dalla testimonianza di Ammiano MARCELLINO, vissuto nella seconda metà del IV secolo, per il quale gli Alani, predecessori degli Osseti, erano biondi e aitanti della persona; d'altra parte la presenza di elementi di tipo germanico, oggi chiamato più propriamente nordico, segnalata dal SERA in vari gruppi e perfino nei Cumicchi (Tartari), è stata confermata da successive osservazioni (cfr. BIASUTTI, 1931). Più tardivo di tutti è stato l'accesso dei brachi-ipsicefali, cioè dell'elemento somatico mongolico, il quale, infatti, non è giunto a penetrare nell'interno.

In uno studio sulla successione spaziale e cronologica dei tipi etnici dell'Europa settentrionale ed orientale (1921 a), il SERA mise anche in evidenza quanta gran parte hanno avuto, nella composizione antropologica dell'Europa orientale, i brachicefali trovati nelle antiche necropoli slave. Inoltre dimostrò che gli antichi slavi brachicefali avevano preceduto i dolico-platicefali nordici, e la probabile esistenza, già nel neolitico, di dolico-ortocefali d'origine meridionale in alcune località settentrionali (Làdoga).

Si deve al SERA la prima trattazione comparativa estesa a tutti gli Antropomorfi fossili (1917 a). Questo studio gli consentì di giungere a una conclusione morfologica generale assai importante, oggi generalmente accettata come indiscutibile, e cioè che « gli Antropomorfi e l'Uomo non provengono da forme bestializzate, ma da forme in cui, pur non verificandosi il fatto essenziale, centrale dell'antropogenesi, il prevalere di massa e di funzione del sistema nervoso centrale..., non si era neppur verificato il fatto dell'acquisizione di forti armi di difesa, soprattutto con la trasformazione teroide dell'apparato dentale », quale si riscontra negli attuali Antropomorfi.

Ne consegue che « laddove questi caratteri si riscontrano più o meno attenuati negli *Hominidae* fossili, essi non siano niente affatto prove di una stretta parentela con gli Antropomorfi,... ma risultato di convergenza nella bestializzazione ». Questa possibilità era stata già prospettata; ma non era stata ancora appoggiata con tanto vigore, come dai fatti posti in rilievo dal SERA.

Un anno dopo, nel 1918, il SERA ci ha dato in un poderoso lavoro una sistemazione dei caratteri descrittivi della faccia in tutto il gruppo dei Primati, gli uomini compresi. Egli dimostrò che le caratteristiche più significative per le vere affinità filetiche sono da ricercare nelle differenze fisiologiche complessive, date dalla forma e dalla struttura ossea della faccia e specialmente dalla diversa conformazione della regione fronto-naso-lacrimale. In base a queste differenze affermò l'esistenza di sei tipi facciali, che seguì negli stadi successivi delle Platinine, Catarrine, Antropomorfi, Uomini, giungendo così ad ammettere che si fossero verificate sei linee di sviluppo nell'interno del gruppo generale. Egli ammise pertanto l'origine poligenistica dell'Umanità da sei forme primitive diverse (nell'articolo sull'origine dell'Uomo, nel 1937, tendeva a ritenere che il numero dei fili dovesse essere aumentato). Tuttavia, essendo un critico acuto e profondo, vide forse più di tanti altri le manchevolezze e le lacune delle teorie opposte, monogenistiche e poligenistiche, per cui concludeva pacatamente (1937 *b*) che soltanto con l'accrescersi delle conoscenze dei caratteri filetici veri avrebbe potuto fondarsi una solida teoria delle origini.

La sua attenzione fu attratta in seguito dai Lemuridi (1935 *f*; 1936; 1938 *a, c*; 1949). Mentre, introdotta nel 1894 e poi abbandonata (1900) dal MAJOR, ma ripresa e sviluppata soprattutto dallo STANDING (1908), dominava la teoria « degenerativa » intorno all'origine dei Lemuridi, secondo la quale i particolari caratteri di questi si spiegavano con la scomparsa o con la riduzione dei caratteri pitecoidi, il SERA insorse contro tale teoria, dimostrando che i fili secondari dei Lemuridi si continuano con fili corrispondenti nelle Scimmie. Egli sviluppò a sua volta, in base a numerosi caratteri anatomici, l'ardita ipotesi, da tener pur sempre in considerazione, che i Lemuridi più antichi fossero acquatici (*) o avessero da poco abbandonata l'acqua, e, per conseguenza, che i Primati fossero diventati arboricoli in un secondo tempo. In uno dei suoi ultimi lavori (1950) ha in parte accettato le critiche della CARLETON (1936, 1937) e del LAMBERTON (1946); ma in sostanza ha confermato le sue principali vedute intorno ai Lemuridi fossili e attuali in rapporto alla evoluzione dei Primati.

Sono da segnalare anche tante altre ricerche, delle quali si valse per

(*) STANDING (1908) suppose per primo che *Palaeopropithecus* avesse abitudini acquatiche, basandosi sulla direzione delle orbite verso l'alto, come nell'Ippopotamo, e su altri caratteri.

le sue deduzioni a carattere generale: il breve saggio sull'antichità della forma dell'orecchio umano (1917 *c*); i lavori sulla dentatura dei Primati, nei quali prospettò la genesi della categorie dentarie e le relazioni tra i diversi gruppi sistematici in base ai caratteri dentarii (1916 *b*; 1917 *e, f, g*); le ricerche per dimostrare l'omologia dei centri di origine del malare dei Primati con le ossa postorbitali degli Stegocefali (1920 *b*); gli studi concernenti l'arto inferiore degli *Anthropoidea* (1921 *c*), la colonna vertebrale e il bacino dei Primati (1926 - '27), in rapporto alla questione delle origini umane; la nota sulla omologia del lacrimale dei Primati (1921 *f*); lo studio intorno alla dipendenza della struttura generale anatomica dalle condizioni di vita negli Antropomorfi (1930); le osservazioni sulle ossa del carpo dei Boscimani e sull'origine filetica di questo gruppo (1937 *a*); lo studio sulla genesi del piede e l'acquisto della attitudine eretta nell'Uomo (1941 *c*); lo studio dell'angolo interarticolare dell'omero nelle razze umane (1944 *b*), e le discussioni intorno ai resti fossili delle forme gigantesche trovate a Giava e nella Cina meridionale (1946 *b*; 1947 *a*) e alle *Australopithecinae* del Sud Africa (1947 *b*; 1948), per le quali ultime credè il nome di *Orthodromidae*, a motivo della fondamentale capacità di corsa in attitudine bipede, che loro attribuiva.

In definitiva, al SERA spetterà sempre il merito di aver dato un impulso straordinario alla conoscenza dell'anatomia dei Primati, e di avere posto importanti quesiti di biologia.

Il SERA estese le ricerche anatomo-comparate, filetiche e paleobiologiche anche a gruppi estinti di altri Mammiferi, ai Monotremi, ai Marsupiali, alla origine stessa dei Mammiferi (1919; 1921 *d*; 1940 *a*; 1941 *b, d*; 1942 *a, b*; 1942 - '43, ed. 1947; 1944 *a*; 1953; 1954).

Ipotesi singolarmente originali espose intorno all'interpretazione dei tipi sierologici nell'Uomo e nei Mammiferi (1938 *b*) e all'origine delle mammelle e della lattazione (1939 *a*).

Fra le ricerche intorno ai caratteri morfologici nell'Uomo è degna di un cenno speciale la minuziosa analisi della particolare morfologia dell'occhio « mongolico » (1909 *a*; 1918; 1932; 1935 *a*; 1946 *a*). Il SERA mise in luce che il carattere essenziale dell'occhio « mongolico » consiste in una posizione più avanzata della cresta lacrimale anteriore, e perciò nell'impianto del legamento del tarso più all'innanzi, rispetto al bulbo oculare, di quanto non accada in altri tipi. Può concorrere un carattere dell'apertura dell'orbita, talora presente nel cranio di tipi mongolici, e cioè che i diversi margini della apertura tendono ad essere in uno stesso piano (mentre nelle razze europee e in altre il margine esterno dell'orbita è portato sensibilmente indietro). Ne consegue che la palpebra superiore — invece di avere presso a poco la forma di uno spicchio sferico e di giacere e scorrere sul globo oculare stesso, come avviene nell'occhio « europeo » — è posta più avanti, in un piano tangente al globo oculare, e ciò tanto più, quanto più è in aggetto il margine esterno dell'apertura dell'orbita. Perciò la palpebra può scorrere

solo in un piano, come un sipario. Questo tipo a sipario, essendo fisso agli angoli inferiori, non può aprirsi che in minor grado dell'occhio « europeo »; inoltre nell'aprirsi determina una piega di tensione, che si continua fino al margine esterno del naso, coprendo a guisa di falce la caruncola lacrimale (plica mongolica, o, meglio, piega entocantica del SERA) e talora persino buona parte delle ciglia. Chiari pure che l'occhio di tipo mongolico, talora osservabile negli Austro-africani, è dovuto ad una morfologia ossea simile, la quale, però, dev'essere sorta indipendentemente da quella dell'Asia centro-orientale, trattandosi non di forme ataviche o arcaiche di mongolismo, come certi Autori sono invece propensi a ritenere, ma di un fenomeno di convergenza. Questa veduta si appoggia, oltre che sui particolari caratteri razziali dei Boscimani e degli Ottentotti e sulla grande lontananza dell'Africa australe, ove essi vivono, dall'Asia centrale e settentrionale-orientale, abitata dai gruppi etnici mongolici e mongoloidi, anche sull'esistenza, da lui accertata, di una plica « mongolica » transitoria o permanente nell'occhio di primati diversi: *Cebus*, *Orango*, *Cercocebas*, *Ateles*. La plica consimile (*epicanthus*), talvolta esistente nel bambino europeo, non avrebbe nulla a comune con la plica « mongolica », ma sarebbe dovuta a un ritardo di sviluppo delle parti ossee sottostanti.

Con gli estesi e approfonditi studi intorno alla morfologia facciale, da me più sopra accennati, l'apporto dato dal SERA alla Classificazione delle Razze Umane attuali è stato imponente e fondamentale (1918; 1929 *a, b*; 1932; 1934 *a, b*; 1935 *c*). Le sue osservazioni al riguardo hanno contribuito in modo decisivo a dimostrare che le razze negre del gruppo africano debbono essere tenute distinte da quelle bruno scuro o nerastre del gruppo oceanico (1918), mentre ancora una parte degli Autori, attardandosi a dare maggior peso alla forma del capello, staccano i Tasmaniani, i Neocalédoni e i Melanesiani (Papuasidi) dagli Australiani e dai Veddidi, per unirli alle razze negre dell'Africa.

Per quanto concerne i gruppi di statura inferiore alla media dell'Asia e dell'Oceania, non solo riconobbe il tipo negro nei Negritos della Penisola di Malacca e delle Filippine, ma giustamente da questi distaccò i Pigmoidi della Nuova Guinea, nei quali osservò che mancava il carattere essenziale del tipo negroide, la forte depressione della radice nasale (eccetto casi sporadici), per riunirli ai Melanesiani (Papuasidi). Distaccò pure dai Negritos gli Andamanesi, che per i caratteri facciali considerò come « uno stadio precoce di quanto si osserva nei Boscimani, un'associazione cioè tra caratteri negroidi e mongoloidi », ma senza connessione filetica con i mongoloidi.

Fin dal 1918 identificò, lasciandocene anche la miglior descrizione, il tipo da BIASUTTI (1941) considerato dei Pre-mongoloidi, che Egli chiamò I tipo facciale o tibeto-polinesiano, e che riconobbe più o meno ben conservato, o presente soltanto in pochi individui, in gruppi a distribuzione nettamente periferica: specialmente nei Samoiedi e nei Ciukci, popoli iper-

borei dell'ovest e dell'est dell'Asia, nelle tribù montanare dell'alta Birmania e della Cina di sud-ovest, nei nomadi del grande Tibet e nei Patagoni; sporadicamente nella Micronesia (Isolani delle Caroline), nella Polinesia (Maori, Isolani delle Hawaii, Moriori etc. fino all'isola di Pasqua), nei Pelli Rosse, fra gli Andini, fra i Tasmaniani, nella estremità meridionale e orientale dell'Australia e della Nuova Guinea, nelle Isole Salomone etc. in Melanesia, e nell'Arcipelago Indiano.

Notevolissimo è stato il contributo portato dal SERA, con lo studio della conformazione della faccia, alla risoluzione dell'arduo, complicato problema delle razze indigene dell'America. Egli distinse 14 tipi americani (1929), e in particolare dobbiamo ricordare che negò l'affermazione di alcuni Autori, i quali attribuivano un tipo australoide ai Fuegini.

Il SERA compì anche altre numerose osservazioni sui caratteri somatici delle più varie popolazioni attuali della Terra. In Egitto riconobbe (1929 *a*) l'esistenza di un tipo particolare, che chiamò copto dal nome del gruppo etnico in cui è meglio conservato. Il tipo in questione corrisponde, Egli scrisse, a quello fine, che si riscontra nei crani degli antichi Egiziani. A proposito dei Bantu del Sud osservò acutamente (1934 *b*) che non possono essere considerati come provenienti da una mescolanza dell'elemento etio-pico con l'elemento nigrizio, perchè presentano caratteri (forte sviluppo muscolare, forme piene e carnose, torace largo, spalle piuttosto spioventi in basso), che nessuno dei due tipi presunti genitori possiede. Buoni contributi dette anche per il Madagascar (1934 *a*), sia con studi craniologici, sia riconoscendo che il tipo umano ivi giunto in età preistorica dall'Africa doveva presentare caratteri particolari, quali si possono trovare ancora fra i Bantu meridionali.

In ultimo ricorderò uno degli articoli più importanti pubblicati dal SERA sulla Enciclopedia Italiana: quello sulla « Razza », del 1935. È una disamina a fondo, compiuta con equilibrio e con una vastità di cognizioni straordinaria, dei vari aspetti sotto i quali è stato considerato il problema delle razze umane. Numerose volte interviene con la sua critica acuta, esprime la sua opinione sempre pacata e prudente, mettendo in risalto le lacune, indicando la via giusta e gli errori, ponendo degli interrogativi, sia che si tratti della classificazione, che dei caratteri fisiologici delle razze umane, oppure dei rapporti fra razze e psiche, lingua, civiltà e storia. Ma il valore maggiore di questo articolo consiste nella stroncatura del razzismo, e specialmente di quello germanico, additando come pericolose le tendenze escludiviste allora dimostrate dalle Nazioni, e concludendo che « come la storia della civiltà non autorizza esclusivismi di popoli nell'opera creativa della civiltà umana, così l'antropologia non autorizza esclusivismi di razza ».

Le pubblicazioni scientifiche del SERA formano un insieme imponente per acume, per vastità e per profondità. Ma non si può apprezzare appieno il valore dell'Uomo e dello Scienziato, se non avendo presente la forza

d'animo e il grande amore per la ricerca scientifica, che gli permisero di continuare il Suo lavoro, nonostante la terribile infermità, da cui fu colpito fin dal 1947, e che l'aveva reso cieco del tutto negli ultimi anni.

La mole di lavoro, compiuta dal 1947 in poi, con l'aiuto della Consorte e di qualche lettrice, ci fa comprendere meglio di ogni altro attestato la Sua grandezza morale e la Sua dedizione agli studi.

Si è spento in Firenze il 7 maggio 1960, dopo lunga malattia, assistito con affetto dalla Sua eletta compagna. L'intensa luce interiore che lo animava ci ha lasciato un esempio di vita, che ispira rispetto, gratitudine, ammirazione.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI SCIENTIFICHE DEL PROF. G. L. SERA

- 1) *Nota sull'occhio mongolico*. « Atti Soc. Romana Antrop. », Roma, Vol. XV, fasc. 1°, pp. 55-59, 1909 a.
- 2) *Di alcuni caratteri importanti sinora non rilevati nel cranio di Gibraltar*. Ivi, Vol. XV, fasc. 2°, pp. 197-208, 1909 b.
- 3) *Nuove osservazioni ed induzioni sul cranio di Gibraltar*. « Arch. Antrop. e Etnol. », Firenze, Vol. XXXIX, fasc. 3°-4°, pp. 151-212, 1909 c.
- 4) *Sulla Plagiocefalia*. Ivi, Vol. XXXIX, Rendic., pp. 305-306, 1909 d.
- 5) *Un nuovo orbitostato*. « Atti Soc. Romana Antrop. », Roma, Vol. XV, fasc. 3°, pp. 309-312, con 2 fig. nel testo, 1910 a.
- 6) *Sul piano orizzontale del cranio*. « Arch. Antrop. e Etnol. », Firenze, Vol. XL, fasc. 1°, pp. 19-43, 1910 b.
- 7) *L'attuale controversia su poligenismo e monogenismo in Italia*. Ivi, Vol. XL, fasc. 1°, pp. 97-108, 1910 c.
- 8) *Australoidismo e neandertaloidismo*. « Arch. Antrop. e Etnol. », Firenze, Vol. XL, fasc. 2°, pp. 189-202, 1910 d.
- 9) *Sul significato della platicefalia con speciale considerazione della razza di Neanderthal*. Ivi, Vol. XL, fasc. 3°-4°, pp. 381-432, con 13 fig. e 3 tabelle nel testo e con tav. VII fuori testo, 1910 e, e Vol. XLI, fasc. 1°, pp. 40-82, con 7 fig. nel testo, 1911 a.
- 10) *Fenomeni fisiopatologici di struttura craniensi*. Ivi, Vol. XL, Rendic., pp. 503-504 e pp. 511-512, 1910 f.
- 11) *A proposito di due recensioni del Sig. P. Bartels*. Ivi, Vol. XLI, fasc. 1°-2°, pp. 192-196, 1911 b.
- 12) *Sull'uomo fossile sud-americano*. « Monit. Zool. Ital. », Firenze, Vol. XXII, fasc. 1°, pp. 10-24, con 3 fig. nel testo, 1911 c.
- 13) *Per alcune ricerche sulla base del cranio*. Ivi, Vol. XLI, fasc. 4°, pp. 374-398, 1911 d.
- 14) *D'un rapporto anomalo della capacità con l'altezza del cranio*. « Arch. Antrop. e Etnol. », Firenze, Vol. XLI, Rendic., pp. 459-460, 1911 e.
- 15) *La posizione fra le Scienze e il valore dell'Antropologia (Prelezione)*. Tipografia M. Ricci, Firenze, pp. 1-28, 27 novembre, 1912 b.
- 16) *L'altezza del cranio in America. Induzioni antropologiche ed antropogeografiche*. « Arch. Antrop. e Etnol. », Firenze, Vol. XLII, pp. 64-124, 161-251, 297-329, con 25 fig. nel testo, 1912 c., e Vol. XLIII, pp. 13-88, con 12 fig. e 5 tabelle nel testo, 1913.
- 17) *Residui di popolazioni mongoloidi nelle Isole di California*. Ivi, Vol. XLIV, fasc. 2°-3°, pp. 143-147, con tav. VI nel testo, 1941 a.

- 18) *Indirizzo morfologico è indirizzo morfometrico*. Ivi, Vol. XLIV, fasc. 2°-3°, pp. 241-249, 1914 b.
- 19) *I caratteri antropometrici degli Aymarà e il mongolismo primordiale dell'America*. « Monit. Zool. Ital. », Firenze, Vol. XXV, fasc. 9°-10°, pp. 215-230, con 3 fig. nel testo, 1914 c.
- 20) *Brevi note sopra un femore umano fossile dell'America meridionale*. « Rend. R. Ist. Lombardo Scienze e Lettere », Milano, Vol. XLVII, fasc. 17°-18°, pp. 987-993, con 2 fig. nel testo, 1914 d.
- 21) *Alcune osservazioni sulle parabole di altezza del Giardina*. « Arch. Antrop. e Etnol. », Firenze, Vol. XLIV, fasc. 4°, pp. 327-330, 1914 e.
- 22) *L'altezza sopraauricolare, la sua tecnica e la valutazione dei due indici ad essa relativi*. Ivi, Vol. XLV, fasc. 2°, pp. 180-199, con 2 fig. nel testo, 1915.
- 23) *Un foglio di proiezione per rapporti morfometrici in corpi tridimensionali ed in particolare per l'altezza del cranio*. « Monit. Zool. Ital. », Firenze, Vol. XXVII, fasc. 6°, pp. 113-119, con un grafico, 1916 a.
- 24) *La pieghettatura dello smalto nei denti di Antropomorfi*. Ivi, Vol. XXVII, fasc. 10°, pp. 208-215, con 1 fig. nel testo, 1916 b.
- 25) *La testimonianza dei fossili di Antropomorfi per la questione della origine dell'Uomo*. « Atti Soc. Ital. Scienze Nat. », Pavia, Vol. LVI, pp. 25-156, con 7 fig. nel testo, 1917 a.
- 26) *Un preteso « Hominida » miocenico: « Sivapithecus indicus »*. Natura, Milano, Vol. VIII, pp. 149-173, 1917 b.
- 27) *È la forma dell'orecchio umano antica o recente?* « Giorn. Morfol. Uomo e Primati », Pavia, Vol. I, fasc. 2°, pp. 109-125, con 3 fig. nel testo, 1917 c.
- 28) *Una risposta*. Ivi, Vol. I, fasc. 2°, pp. 126-128, 1917 d.
- 29) *La genesi delle categorie dentarie nei Primati*. Ivi, Vol. I, fasc. 3°, pp. 135-190, con 11 fig. nel testo e la tav. II fuori testo, 1917 e.
- 30) *I caratteri di forma dei molari delle Scimmie e la divisione di queste in due gruppi fondamentali*. Ivi, Vol. I, fasc. 3°, pp. 191-216, 1917 f.
- 31) *Le relazioni reciproche dei diversi gruppi sistematici dei Primati in base ai caratteri dentarii*. Ivi, Vol. I, fasc. 3°, pp. 217-221, con 1 fig. nel testo, 1917 g.
- 32) *I caratteri della faccia e il protilfetismo dei Primati*. Ivi, Vol. II, fasc. 1°-2° e 3°, pp. 1-296, con 25 fig. nel testo, e le tav. I-VIII fuori testo, 1918.
- 33) *La genèse de l'articulation secondaire (« squamoso-dentalis ») de la mandibule et l'origine des Mammifères*. Ivi, Vol. III, fasc. 1°, pp. 19-36, con 5 fig. nel testo, 1919.
- 34) *Sui rapporti della conformazione della base del cranio colle forme craniensi e colle strutture della faccia nelle razze Umane. Saggio di una nuova dottrina craniologica con particolare riguardo dei principali cranii fossili*. « Mem. Soc. Ital. Scienze Nat. e del Museo Civ. di St. Nat. di Milano », Milano, Vol. IX, fasc. 2°, pp. 165-261, con 7 fig. nel testo, e con 2 tav. e 6 tabelle numeriche fuori testo, 1920 a.
- 35) *L'omologia dei centri di origine del malare dei Primati, colle ossa pastorbitali degli Stegocefali*. « Riv. Ital. di Paleontol. », Parma, Vol. XXVI, fasc. 1°-2°, pp. 10-17, con 1 fig. nel testo, 1920 b.
- 36) *Morfologia umana e Antropologia*. « Natura », Milano, Vol. XI, pp. 37-64, 1920 c.
- 37) *Qu'est-ce que l'Anthropologie?* « Scientia », Bologna, Vol. XIV, fasc. 10°, pp. 87-96, 1920 d.
- 38) *I movimenti etnici nel Caucaso*. « Monit. Zool. Ital. », Firenze, Vol. XXXI, fasc. 10°-11°, pp. 172-185, con 2 fig. nel testo e la tav. V fuori testo, 1920 f.
- 39) *La successione spaziale e cronologica dei tipi etnici nell'Europa settentrionale ed orientale*. « Arch. Antrop. e Etnol. », Firenze, Vol. L, p.p 18-64, con 8 fig. nel testo, 1921 a.

- 40) *La distribuzione geografica dei brachi-platicefali ed i relitti della fauna glaciale in Europa.* « Riv. di Biol. », Perugia, Vol. III, fasc. 1°, pp. 53-57, 1921 b.
- 41) *Sul significato polifiletico delle differenze strutturali nell'arto inferiore di « Anthro-poidea » (mihi).* « Giorn. Morfol. Uomo e Primati », Pavia, Vol. III, fasc. 2°-3°, pp. 85-162, con 3 fig. nel testo, 1921 c.
- 42) *La fonction de rotation du fibula d'« Ornithorynchus » et la double adaptation aquatique et fossoriale des Mammifères primitifs.* Ivi, Vol. III, fasc. 2°-3°, pp. 163-181, con 1 tav. nel testo, 1921 d.
- 43) *Risposta al Prof. V. Giuffrida-Ruggeri.* Ivi, fasc. 2°-3°, pp. 182-186, 1921 e.
- 44) *La omologia del lacrimale dei Primati.* « Riv. Ital. di Paleontol. », Parma, Vol. XXVII, fasc. 2°-3°, pp. 45-49, con 1 fig. nel testo, 1921 f.
- 45) *La recente scoperta dell'Uomo fossile nell'Africa meridionale.* « Riv. di Biol. », Perugia, Vol. IV, fasc. 1°, pp. 106-114, 1922.
- 46) *A proposito del polifiletismo dei Primati.* « Giorn. Morfol. Uomo e Primati », Pavia, Vol. IV, fasc. 1°, pp. 3-13, 1923.
- 47) *Presente ed avvenire dell'Antropologia.* « Riv. di Scienze Nat. "Natura" », Milano, Vol. XVI, pp. 3-12, 1925.
- 48) *Sopra alcune caratteristiche morfologiche differenziali di valore statico-meccanico nella Colonna vertebrale e nel Bacino dei Primati; loro conseguenze per la stazione e locomozione in generale dei diversi gruppi e per la questione delle origini umane.* Ivi, Vol. IV, fasc. 2°, pp. 1-120, con 30 fig. nel testo e con 5 tabelle e 2 tav. fuori testo, 1926, e Vol. IV, fasc. 3°, pp. 129-216, con 29 fig. nel testo e 1 tav. fuori testo, 1927.
- 49) *Articolo: Africa: antropologia.* In « Enciclopedia Italiana », Roma, Vol. I, pp. 755-758, 1929 a.
- 50) *Articolo: America: antropologia.* Ivi, Vol. II, pp. 903-906, 1929 b.
- 51) *Articolo: Antropologia.* Ivi, Vol. III, pp. 580-588, 1929 c.
- 52) *Articolo: Antropomorfi: gli Antropomorfi fossili.* Ivi, Vol. III, pp. 605-610, 1929 d.
- 53) *Articolo: Asia: antropologia.* Ivi, Vol. IV, pp. 866-868, 1929 e.
- 54) *La dipendenza della struttura generale anatomica dalle condizioni di vita negli Antropomorfi.* « Riv. di Scienze Nat. "Natura" », Milano, Vol. XXI, pp. 1-25, con 1 fig. nel testo, 1930.
- 55) *Esame morfologico del cranio dell'Olmo.* « Arch. Antrop. e Etnol. », Firenze, Vol. LX-LXI, pp. 79-98, con 2 fig. nel testo e 2 tav. fuori testo, 1930-'31.
- 56) *Articolo: Cefalici, Indici.* In « Enciclopedia Italiana », Roma, Vol. IX, pp. 632-636, 1931 a.
- 57) *Articolo: Cranio: il cranio dal punto di vista antropologico; capacità del cranio; le deformazioni patologiche del cranio.* Ivi, Vol. XI, pp. 782-792, 1931 b.
- 58) *Articolo: Fisionomia: fisionomia facciale etnica.* Ivi, Vol. XV, pp. 488-496, 1932.
- 59) *Articolo: Madagascar: antropologia.* Ivi, Vol. XXI, pp. 813-815, 1934 a.
- 60) *Articolo: Negri: antropologia.* Ivi, Vol. XXIV, pp. 510-513, 1934 b.
- 61) *Articolo: Occhio: antropologia.* Ivi, Vol. XXV, pp. 129-130, 1935 a.
- 62) *Articolo: Paleoantropologia.* Ivi, Vol. XXVI, pp. 1-16, 1935 b.
- 63) *Articolo: Paleoasiatici: antropologia.* Ivi, Vol. XXVI, pp. 17-18, 1935 c.
- 64) *Articolo: Razza: I. Le Razze Umane; II. Caratteri fisiologici delle Razze Umane; III. Razze e Psiche; IV. Razze e Lingue; V. Razze e caratteri etnografici; VI. Razze e Civiltà. Razze e Storia.* Ivi, Vol. XXVIII, pp. 911-929, 1935 d.
- 65) *Studi di Antropologia fisica (Londra e Parigi, luglio-ottobre 1933).* « Viaggi di studio promossi dalla Fondazione Volta », Roma, Vol. II, pp. 5-7, 1935 e.
- 66) *I caratteri morfologici di « Palaeopropithecus » e l'adattamento acquatico primitivo dei Mammiferi e dei Primati in particolare. Contributo alla morfologia, alla filogenesi e*

- alla paleobiologia dei Mammiferi. « Arch. Ital. Anat. e Embr. », Firenze, Vol. XXXV, fasc. 2°, pp. 229-370, con 25 fig. nel testo e le tav. VII-XIV, 1935 f.
- 67) Il significato dell'anello timpanico libero nella bolla acustica di alcuni Lemuri e di « Tupaiidae ». « Riv. Ital. di Paleontol. », Pavia, Vol. XLII, fasc. 4°, pp. 58-68, con 4 fig. nel testo, 1936.
- 68) Certi caratteri di forma delle ossa del carpo dei Boscimani e soprattutto dell'« Os magnum carpi » e l'origine filetica di questo gruppo. « Arch. Antrop. e Etnol. », Firenze, Vol. XLVII, pp. 33-40, con 3 fig. nel testo, 1937 a.
- 69) Articolo: Uomo, Origini dell'. In « Enciclopedia Italiana », Roma, Vol. XXXIV, pp. 748-755, 1937 b.
- 70) Alcuni caratteri anatomici delle Platinine ed il recente abbandono da parte di esse dell'abitato acquatico. « Arch. Zool. Ital. », Torino, Vol. XXV, pp. 201-218, con 6 fig. nel testo, 1938 a.
- 71) Proposta di interpretazione dei tipi sierologici A, B, AB, O, nell'Uomo e nei Mammiferi. « Riv. di Biol. », Perugia, Vol. XXIV, pp. 3-15, 1938 b.
- 72) Alcuni caratteri scheletrici di importanza ecologica e filetica nei Lemuri fossili ed attuali. Studi sulla paleobiologia e sulla filogenesi dei Primati. « Paleontogr. Ital. », Pisa, Vol. XXXVIII (N. Ser. Vol. VIII), pp. 1-113, con 49 fig. nel testo e 3 tav. fuori testo, 1938 c.
- 73) La origine delle razze umane secondo un libro del Prof. H. Weinert. « Arch. Antrop. e Etnol. », Firenze, Vol. XLVIII, pp. 240-258, 1938 d.
- 74) L'origine delle mammelle e della lattazione. (Contributo alla paleobiologia dei Mammiferi). « Riv. di Biol. », Perugia, Vol. XXVIII (I Vol. Giubilare in onore del Prof. O. POLIMANTI), pp. 7-22, 1939 a.
- 75) La necessità di una organizzazione sistematica delle Scienze fisiche e morali sull'Uomo. Proposta per la creazione di una Alta Facoltà delle Scienze Antropologiche. Fratelli Stianti, Tipografi, Saneasciano Val di Pesa, pp. 1-19, 1939 b. « Riv. di Biol. », Perugia, Vol. XXXI (IV Vol. Giubilare in onore del Prof. O. POLIMANTI), pp. 1-14, 1941 a.
- 76) Il meccanismo di produzione della sindattilia e il suo significato per la Paleobiologia e la Filogenesi dei Marsupiali. « Arch. Zool. Ital. », Torino, Vol. XXVIII, pp. 151-174, con 7 fig. nel testo, 1940 a.
- 77) Ricerche paleontologiche e antropologiche a Parigi e a Londra (luglio-agosto 1938). « Viaggi di studio promossi dalla Fondazione Volta », Roma, Vol. V, pp. 5-12, 1940 b.
- 78) La omologia del muscolo peroneo lungo e la Paleobiologia e Filogenesi dei Mammiferi. « Riv. di Biol. », Perugia, Vol. XXXII (V Vol. Giubilare in onore del Prof. O. POLIMANTI), pp. 85-99, con 3 fig. nel testo, 1941 b.
- 79) La genesi del piede e l'acquisto dell'attitudine eretta nell'Uomo. « Arch. Ital. Anat. e Embr. », Firenze, Vol. XLVI, pp. 205-287, con 18 fig. nel testo, 1941 c.
- 80) Il significato di certi fondamentali caratteri distintivi delle due sottoclassi dei « Theria » (« Marsupialia » e « Monodelphia ») per la paleobiologia di esse. « Scritti Biologici », Siena, Vol. XVI, pp. 1-11, con 4 fig. nel testo, 1941 d.
- 81) Sulla doppia emigrazione dei muscoli « Extensores digitorum breves » del piede nella linea dei Mammiferi. « Arch. Zool. Ital. », Firenze, Vol. XXX, pp. 195-205, 1942 a.
- 82) La ecologia e la posizione fra i Marsupiali di « Wynyardia bassiana ». « Riv. Ital. di Paleontol. », Milano, Vol. XLVIII, fasc. 1°, pp. 1-6, con 1 fig. nel testo, 1942 b.
- 83) L'occultamento subacqueo e l'ancoramento nella Paleobiologia di parte dei Monodelphi e la distinzione di questi in due gruppi filetici. « Paleontogr. Ital. », Pisa, Vol. XLI (N. Ser. Vol. XI), pp. 63-120, con 11 fig. nel testo, 1942-43, ed. 1947.
- 84) Sul modo di vita degli Ancilopodi e di alcuni altri gruppi estinti di Mammiferi. « Riv. Ital. di Paleontol. », Milano, Vol. L, fasc. 3°, pp. 1-11, con 4 fig. nel testo, 1944 a.

- 85) *L'angolo interarticolare dell'omero (cosiddetto angolo di « torsione ») nelle razze umane.* « Ann. Museo Civ. di St. Nat. di Genova », Genova, Vol. LXII, pp. 188-210, con 2 tabelle nel testo, 20 luglio, 1944 b.
- 86) *Meccanismo funzionale, genesi e significato filetico dell'occhio cosiddetto « mongolico ».* « Riv. di Biol. », Perugia, Vol. XXXVIII, pp. 142-152, 1946 a.
- 87) *Ominidi fossili giganteschi di Giava e della Cina meridionale in una recente pubblicazione del Weidenreich.* « Riv. di Scienze Preistor. », Firenze, Vol. I, fasc. 3°, pp. 227-230, 1946 b.
- 88) *L'interpretazione dei resti fossili trovati a Giava e nella Cina meridionale ed attribuiti a forme gigantesche di « Hominidae ».* Ivi, Vol. II, fasc. 1°, pp. 3-29, con 2 fig. nel testo, 1947 a.
- 89) *I cosiddetti uomini-scimmie del Sud-Africa, secondo il paelontologo R. Broom.* « Riv. Sc. Nat. " Natura " », Milano, Vol. XXVIII, pp. 24-30, 1947 b.
- 90) *La posizione zoologica e la biologia delle cosiddette « Australopithecinae ».* « Arch. Zool. Ital. », Torino, Vol. XXXIII, pp. 121-181, con 17 fig. nel testo, 1948.
- 91) *Il valore morfologico, funzionale, filetico del femore del cosiddetto « Bradytherium » (G. Grandidier).* « Homenaje a Don Luis de Hoyos Sainz », Tomo I, Madrid, pp. 301-309, con 4 fig. nel testo, 1949.
- 92) *Ulteriori osservazioni sui Lemuri fossili ed attuali. Significato di alcuni caratteri in rapporto con l'evoluzione dei Primati.* « Paleontogr. Ital. », Pisa, Vol. XLVII (N. Ser. Vol. XVII), pp. 1-97, con 39 fig. nel testo, 1950.
- 93) *La posizione zoologica del genere mammale miocenico « Desmostylus ».* « Arch. Zool. Ital. », Torino, Vol. XXXVIII, Parte II, pp. 485-506, con 4 fig. nel testo, 1953.
- 94) *I modi di vita degli « Astrapotheria ».* pp. 1-8, con 1 fig. nel testo,
- 95) *Posizione zoologica dei « Pyrotherii ».* « Monit. Zool. Ital. », Firenze, Vol. LXII, N. 1, pp. 42-44, 1954.

PUBBLICAZIONI DI ALTRI AUTORI, CITATE NEL TESTO.

- BIASUTTI R. *Alcune osservazioni sulla distribuzione geografica dell'indice cefalico e dei principali tipi craniometrici.* « Arch. Antrop. e Etnol. », Firenze, Vol. XL, pp. 353-373, 1910.
- *Alcune osservazioni sulla distribuzione geografica dell'indice cefalico e dei tipi craniometrici.* Ivi, Vol. XL, Rendic., p. 512, 1910.
 - *Articolo: Caucaso: Caratteri antropologici, La cultura.* In « Enciclopedia Italiana », Roma, Vol. IX, pp. 492-495, 1931.
 - *Osservazioni sulla distribuzione e sui caratteri della brachicefalia nella regione alpina.* In « Scritti raccolti in onore di E. ROMER », Leopoli, 1934.
 - *Le Razze e i Popoli della Terra.* U.T.E.T., Torino, I Edizione, 1941.
 - *Idem*, III Edizione, 1959.
- CARLETON A. *The limb bones and vertebrae of extinct Lemurs of Madagascar.* « Proc. Zool. Soc. London », Vol. 106 A, pp. 281-307, 1936.
- *Note on the osteology of « Palaeopropithecus ».* Ivi, Vol. 107 B, pp. 295-297, 1937.
 - *On the osteology of certain extinct Lemurs of Madagascar.* Ivi, Vol. 107 B, pp. 553-556, 1937.
- DELATTRE A. *Du crâne animal au crâne humain.* Masson et Cie, Parigi, 1951.
- DELATTRE A. e FERNART R. *L'hominisation du crâne étudiée par la Méthode Vestibulaire.* Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Parigi, 1960.
- GIARDINA A. *Gli indici di altezza, di larghezza e di lunghezza in corpi aventi diametri fra loro correlativi (Ricerca metodologica, con speciale riguardo all'altezza relativa del cranio).* « Arch. Antrop. e Etnol. », Firenze, Vol. XLIV, pp. 148-218, 1914.

- GIRARD L. *Le labyrinthe et la station verticale*. In « Atlas d'anatomie chirurgicale du labyrinthe », 1911.
- *Le labyrinthe et la station verticale*. « Ann. des maladies de l'oreille, du larynx, du nez et du pharynx », Parigi, Vol. XLI, fasc. 4, pp. 378-388, Aprile 1922.
- *Le plan des canaux semi-circulaires horizontaux considéré comme plan horizontal de la tête*. « Bull. et Mém. Soc. Anthropol. de Paris », Ser. VIII, Vol. IV, pp. 14-33, 1923.
- *La ligne vestibulaire horizontale. Sa projection sur le profil de la tête*. « Oto-Rhino-Laryngologie internat. », Lyon, Vol. VIII, fasc. 5, pp. 257-266, 1924.
- GIUFFRIDA-RUGGERI V. *Prime linee di un'Antropologia sistematica dell'Asia*. « Arch. Antrop. e Etnol. », Firenze, Vol. XLVII, pp. 165-249, 1918.
- LAMBERTON CH. *Contribution à la connaissance de la faune subfossile de Madagascar. Note XVI. « Bradytherium » ou Palaeopropithecus?* « Bull. Acad. Malgache », Tananarive, n. s., Vol. XXVI, pp. 89-141, con 15 tav., 1947.
- MAJOR FORSYTH C. I. *Ueber die Malagassischen Lemuriden - Gattungen « Microcebus », « Opolemur » und « Chirogale »*. « Novitates Zoologicae », Londra e Aylesbury, Vol. I, pp. 2-39, tavv. I e II, 1894.
- *Summary of our present Knowledge of extinct Primates of Madagascar*. « Geol. Mag. », Londra, n. s., Vol. VII, pp. 492-499, 1900.
- PARENTI R. *Antropologia fisica*. Libreria Scientifica G. Pellegrini, Pisa, 1959.
- PIVETEAU J. *Traité de Paléontologie. Tome VII. Paléontologie Humaine*. Masson et Cie, Parigi, 1957.
- SERGI S. *Sul limite posteriore del lobo parietale e sui solchi occipitali esterni nel cervello dell'Uomo*. « Atti Soc. Romana Antrop. », Vol. XIV, fasc. 1°, pp. 75-87, 1908.
- *Gli Ominidi fossili di forme estinte*. In « Le Razze e i Popoli della Terra » di R. BIASUTTI, Vol. I, Cap. III, pp. 67-106, U.T.E.T., Torino, I Edizione, 1941.
- STANDING H. F. *On recently discovered subfossil Primates from Madagascar*. « Trans. Zool. Soc. London », Vol. XVIII, Parte II, pp. 59-216, 1908.
- TOPINARD P. *L'Anthropologie*. C. Reinwald, Parigi, III edizione, 1879.

Nuove vedute sulla geologia dei dintorni di Lagonegro^{*)}

Nota del dott. Paolo Scandone

presentata dal socio Francesco Scarsella

(Adunanza del dì 2 dicembre 1961)

Le prime notizie geologiche sui terreni affioranti nel circondario di Lagonegro risalgono al 1842, quando PIERRE DE TCHIHATCHEFF, nel suo *Coup d'oeil sur la constitution géologique des provinces méridionales du royaume de Naples* [20], assegnò gli scisti silicei al gruppo dell' « Oxford clay ». Tale datazione fu però fatta solo in base a considerazioni di carattere litologico, non avendo il geologo russo trovato traccia alcuna di fossili.

Nel 1886 il MENECHINI annunciò di aver rinvenuto nei calcari stratificati, sottostanti agli scisti silicei, resti di Ellipsactinidi che datavano la formazione come titoniana. In realtà tali supposte Ellipsactinidi, tra le quali fu addirittura creduto di riconoscere la *Sphaeractinia diceratina* Steinm., si rivelarono essere nient'altro che noduli di selce zonati, contenuti nei calcari [4].

Sei anni più tardi VIOLA [21] assegnò all'Eocene medio la formazione calcareo scistosa alle falde del Sirino.

Nello stesso anno DE LORENZO iniziò i suoi studi nella regione, studi che si protrassero sino al 1898 e che furono resi noti in una serie di lavori [2-9].

Egli attribuì al Trias medio (*gruppo Ladinico di Bittner*) i « calcari a liste e noduli di selce » e gli « scisti silicei », nonchè i « calcari dolomitici a scogliera » ritenuti « amigdaloidamente » inclusi nelle due prime formazioni come facies eteropiche.

Attribuì quindi al Trias sup. (Norico) la dolomia bianca triturrata ed interpretò il passaggio scisti-dolomia come successione stratigrafica.

SIGNORINI [18] per primo, nel 1939, pose in dubbio la regolarità di questa successione, avendo rinvenuto in più località lenti laminate di flysch fossilifero tra gli scisti e la dolomia. Avanzò quindi l'ipotesi di un generale sovrascorimento avvenuto in epoca posteriore al Miocene inferiore.

Soltanto recentemente LUCINI [12] ha posto in dubbio la triassicità degli scisti silicei, avendo osservato nei pressi di Lagonegro il graduale passaggio dagli scisti silicei s. str. al flysch galestrino e argilloso filladico. Egli ha avanzato anche l'ipotesi che i calcari di scogliera fossiliferi rappresentino un termine sottostante ai calcari con liste e noduli di selce.

^{*)} Lavoro eseguito con il contributo del C.N.R.

SCARSELLA [17] a conclusione di sue osservazioni riguardanti gli affioramenti di S. Fele, M. Pierno, Pignola, Riofreddo ed Abriola, distingue dall'alto in basso in serie: scisti argillosi galestrini-scisti silicei-calcarei con liste e noduli di selce-dolomia bianca o grigia saccaroide, ritenendo dubitativamente tale successione come comprensiva di tutti i piani, dal Trias sup. al Cretaceo inferiore o medio.

TACOLI e ZOIA [19] pongono un primo punto fermo al problema assegnando gli scisti silicei di S. Fele al Cretaceo inf. in base al ritrovamento di *Trocholina elongata*, *Coscinoconus alpinus*, *Dictyoconus* sp.

Particolare importanza riveste la comunicazione fatta dal RICCHETTI in occasione della LXI Adunanza Estiva della Soc. Geol. Ital. In essa viene reso noto il ritrovamento di forme specifiche nella serie calcari-scisti-flysch nelle zone di Pignola ed Abriola. Tali forme hanno permesso una sicura datazione del complesso dal Carnico al Neocomiano.

A conclusioni analoghe sono giunti i miei studi nella zona di Lagonegro.

* * *

Ritengo innanzitutto che, almeno per quanto riguarda il circondario di Lagonegro, occorra distinguere due formazioni:

a) la prima probabilmente autoctona, comprendente calcari con liste e noduli di selce, calcari di scogliera, scisti silicei e porzione basale del flysch;

b) la seconda, alloctona, comprendente dolomia triassica, calcari, dolomie e calcari dolomitici giurassici s.l. e cretacei.

Questi terreni sarebbero sovrascorsi sugli scisti silicei i quali, assieme al flysch, avrebbero funzionato da lubrificante tettonico.

Resta da determinare se la porzione più alta del flysch appartenga al bacino sedimentario di Lagonegro o sia invece alloctona anch'essa.

I calcari con liste e noduli di selce presentano, nella zona studiata, trecentocinquanta-quattrocento metri di potenza affiorante. Compattissimi e di color grigio perla nei livelli più bassi, tendono, verso l'alto, ad un colore più scuro, sino a grigio piombo, presentando intercalazioni di livelli alquanto dolomitici e di straterelli chiari siliciferi. Non è raro, inoltre, rinvenire qualche banco detritico o addirittura conglomeratico.

Verso l'alto sono intercalate ai calcari marne e scisti argillosi fissili dal colore giallognolo o rosso-vinaccia, che divengono poco a poco predominanti per passare ai veri e propri scisti silicei.

Dove meglio può osservarsi tale successione è nello spicchio cupolare della Grada, presso il burrone Cararuncedde. Qui è stata eseguita la campionatura di una serie, che considero la serie base per gli scisti silicei di Lagonegro.

Dal basso verso l'alto si distinguono:

1) Calcari con selce nera, in strati di circa un metro di potenza, grigi, a gran fine, con piccole e grosse vene di calcite, contenenti radiolari, spicole di spugna e resti di lamellibranchi (*Halobiae?*) (m. 4);

2) Calcari grigi e grigio-bruni a grana finissima, in straterelli di 5-10 cm di spessore, con radiolari, spicole di spugna e piccoli foraminiferi ind. (m. 4,5);

3) Marne verdi e scisti argillosi fissili con numerose spicole di spugna (m. 1);

4) Calcari grigio-perla e grigio-bruni, con grosse vene di calcite, in strati di 50-60 cm alternanti con straterelli di 5-10 cm di spessore contenenti numerosi radiolari, poche spicole di spugna e resti di lamellibranchi (*Halobiae?*) (m. 18);

5) Scisti silicei rossicci e verdognoli con radiolari e spicole di spugna (m. 4);

6) Calcari grigi e grigio-bruni, intercalati a straterelli silicei diasprigni che verso l'alto finiscono col predominare. In sezione sottile radiolari, e spicole di spugna (m. 30);

7) Scisti rosso-vinaccia e verdi, fissili, sterili (m. 2);

8) Banchi di calcare dello spessore non superiore ai 40 cm intercalati da scisti verdi per lo più argillosi (m. 7);

9) Alternanza di scisti rossi, verdi e bruni, con straterelli di calcare. Radiolari e spicole di spugna (m. 5 circa);

10) Calcari grigi, alternati a scisti verdi e a calcari diasprigni grigio-verdi a frattura scheggiata contenenti nitidi radiolari (m. 4);

11) Scisti neri con radiolari (m. 1);

12) Calcare marnoso grigio-azzurro e marne vinaccia (m. $\frac{1}{2}$);

13) Scisti di color verde chiaro e verde scuro, durissimi, a frattura scheggiata, molto ricchi di radiolari, intercalati da scisti rosso-vinaccia sterili (m. 8);

14) Scisti verdi e grigio-verdi con straterelli di selce nera (m. 5);

15) Scisti cerulei, con radiolari e spicole di spugna (m. 3);

16) Scisti rosso-vinaccia (m. 4);

17) Diaspri giallo-verdognoli facenti passaggio graduale, verso l'alto, a flysch. Quest'ultimo livello presenta una potenza variabile, ma di solito non inferiore ai 15-20 metri.

Lucini riconobbe il passaggio stratigrafico scisti-flysch e ne descrisse la successione data da: diaspri verdognoli (parte alta degli scisti silicei s. str.) — argilloscisti nerastri (30 cm) — diaspri (70 cm) — argilloscisti (30 cm) — un primo strato calcareo - argilloscisti intercalati con banchi calcarei (porzione basale del flysch).

Tra i diaspri (70 cm) e gli argilloscisti (30 cm) ho riscontrato anche un livello di argilla plastica (6-7 cm) i cui lavati sono però risultati sterili.

Il passaggio stratigrafico fu rilevato presso la Grada e a Cappella S. Angelo. Studiando la regione ho avuto modo di riscontrarlo in molte altre località: allo Zango; alle pendici sud-occidentali della Serra Bramafarina e



Fig. 1.

del Sirino; al M. Sirino stesso, sulla larga spalla che dalla chiesetta conduce alla Tempa dell'Asino; alla Tempa Pellinera e alle pendici orientali della Serra Ortica. In quest'ultima località si ha un'insolita giacitura: trattandosi, strutturalmente, di una piega rovesciata, si riscontra dal basso verso l'alto (topograficamente) la successione, molto ben esposta: flysch-scisti silicei-calcarei con liste e noduli di selce.

Il flysch, cui gli scisti fanno passaggio (fig. 1), appare come un'alternanza di argilloscisti e galestri, con strati calcarei che presentano la caratteristica fessurazione latente di *pietra paesina* pur essendo, a differenza della *pietra paesina* tipica, abbastanza siliciferi.

Questa porzione del complesso flyschoidale va dunque ascritta al flysch galestrino e argilloso filladico che costituisce gli orizzonti basali del flysch della Lucania e che, comunemente indicato come paleogenico, viene oggi attribuito, sulla scorta di dati paleontologici sempre più frequenti, al Cretaceo inferiore.

Da molti è ancor oggi negato il carattere stratigrafico della successione scisti silicei-flysch, e quest'ultimo viene considerato trasgressivo sugli scisti

triassici. Il fatto che il flysch sia alla base « silicizzato » e « simile alla sottostante formazione degli scisti silicei » — com'ebbe a scrivere SIGNORINI, — verrebbe attribuito al fatto che nell'ingressione marina, ingressione avvenuta con estrema lentezza, i nuovi sedimenti (flyschoidi) si sarebbero formati a spese del materiale sottostante (scisti silicei).

Ciò mi pare inverosimile. Innanzitutto dovrebbero trovarsi tracce di questa presunta trasgressione; in secondo luogo non sarebbe possibile la costante concordanza che si ritrova tra i due complessi. Se si ammette, infatti, una lacuna durata dal Trias all'epoca di formazione di questo flysch, di età certamente non anteriore al Cretaceo inferiore, bisogna di conseguenza ammettere un'emersione. Tale emersione non avrebbe potuto interessare tutta la zona in blocco, vale a dire non avrebbe potuto essere di tipo tabulare. In effetti quanti parlano di trasgressione ammettono la sedimentazione normale della dolomia (Trias sup.) sugli scisti (Trias medio). Evidentemente, perchè ciò potesse avvenire, dovevano ben esistere dei bracci di mare in cui si depositasse la futura dolomia. L'emersione sarebbe quindi avvenuta con corrugamento dei calcari con selce e dei soprastanti scisti silicei, e il DE LORENZO riconosce gli effetti di questa tettonica negli ellissoidi orientati in senso meridiano.

Pare inverosimile che dopo un corrugamento e un'emersione durata tutto il Trias sup., il Lias, il Giura s. str. e forse parte del Cretaceo, il flysch possa essersi depositato dappertutto con la stessa regolare concordanza angolare. Ciò avrebbe potuto verificarsi al fondo dei bacini sinclinali, o anche in prossimità delle cerniere, ove la curvatura di queste non fosse eccessivamente pronunziata, ma non sui fianchi degli ellissoidi.

Si tratta perciò, io credo, di una sedimentazione ininterrotta dai calcari con liste e noduli di selce a questa porzione basale del flysch.

Circa l'età dei singoli complessi DE LORENZO — come si è detto — riunì calcari a liste e noduli di selce e scisti silicei nel gruppo *Ladinico di Bittner*. La datazione fu fatta sulla scorta dei dati paleontologici dei calcari di scogliera e dei calcari a liste e noduli di selce contenenti, questi ultimi, una fauna analoga a quella degli strati medi e superiori dell'omologa formazione siciliana [10] [14-16] a *Monotis limaeformis*, *Posidonomya gibbosa*, *P. affinis*, *P. lineolata*, *P. fasciata*, *Halobia insignis*, *H. sicula*.

Per quest'ultima forma lo stesso DE LORENZO indicò una ricca località fossilifera al Cinto di S. Angelo, sul burrone Cararuncedde, una ventina di metri sotto i ruderi della vecchia cappella. Questa località fu in seguito ripetutamente cercata ma non più ritrovata.

In un lavoro di LUCINI, MASPERONI e SPADA [13] si legge: « Secondo le indicazioni del DE LORENZO il più alto dei banchi di calcare a liste e noduli di selce che hanno fornito la fauna a *Posidonomya* e ad *Halobia* verrebbe a trovarsi nella serie della Grada una ventina di metri al di sotto della base del flysch ».

È da avvertire che questa osservazione è inesatta. Il banco fossilifero che, seguendo le indicazioni del DE LORENZO, ho avuto la ventura di ritrovare, si trova, è vero, ad una ventina di metri sotto la base del flysch, ma solo *topograficamente*, non *stratigraficamente*. La tettonica ha qui infatti laminato ed assottigliato gli scisti, per cui non si può più certo parlare di continuità della *serie*. D'altra parte è sufficiente osservare l'altro lato del burrone, dove si ha una giacitura più regolare, per rendersi conto che tra gli ultimi banchi di calcare con selce e la base del flysch intercorre tutta la serie degli scisti silicei, della potenza non inferiore ai centocinquanta metri.

Altre località fossilifere che ho trovato sono: al Fosso Tragonara (già segnalata dal DE LORENZO); al M. Castagnereto; al M. Niella; alle pendici meridionali del M. Sirino; sul monte stesso, in corrispondenza della cresta che divide la valle delle Fontanelle da quella dell'Orto dei Monaci; alla Grada presso il fiume Serra; alle pendici orientali della Serra Orticosà.

Come che sia, non riesce difficile rinvenire ricchi nidi di Halobie. Questi fossili, infatti, formano addirittura degli ammassi in pochi strati calcarei intercalati a scisti argillosi verdognoli, presso il passaggio calcari-scisti, una quindicina di metri sotto il primo livello di scisti rossi.

All'esterno non si nota traccia di fossili, ma i gusci appaiono bene in evidenza colpendo nel senso della fissilità, preferibilmente sulla faccia inferiore dello strato. La maggior parte delle forme spetta a *Halobia sicula*, *H. insignis*, *Posidonomya gibbosa*, *P. lineolata*, *P. fasciata*. Sono presenti anche altre specie di *Halobia*, ancora in corso di determinazione.

Recentemente LUCINI, MASPERONI e SPADA, enunciando l'ipotesi che i calcari di scogliera rappresentino un termine sottostante ai calcari a liste e noduli di selce, mettevano in dubbio la triassicità di questa formazione, ammettendo la possibilità che essa sia di età più recente di quella che si è sinora riconosciuta.

Ad avvalorare tale ipotesi aggiungevano: « ...sembra pertanto poco probabile che a detto spessore¹⁾ possa corrispondere — come si dovrebbe concludere — un intervallo cronologico compreso tra il Trias medio o superiore e il Cretacico superiore... ».

Innanzitutto ritengo improbabile che i calcari di scogliera rappresentino un termine sottostante ai calcari con liste e noduli di selce. Se così fosse, sarebbe prevedibile il loro affioramento nelle culminazioni assiali degli ellissoidi, analogamente a quanto avviene per il « calcare massiccio » nella facies umbro-marchigiana. Viceversa a Lagonegro i maggiori affioramenti di calcare di scogliera sono allineati lungo gli assi sinclinali. In secondo luogo è da dire che DE LORENZO, considerando i calcari di scogliera eteropici dei calcari con selce e degli scisti silicei, si servì dei fossili contenuti nelle sco-

¹⁾ Gli AA. si riferiscono allo spessore compreso tra la base degli scisti silicei e un certo livello fossilifero cretaceo nel flysch, spessore valutato — e tale valutazione è, a mio parere, del tutto arbitraria — non superiore agli 800-1000 metri.

gliere per datare esattamente il *piano* delle due prime formazioni, non il *periodo*.

Anche se oggi, quindi, si riconoscono nelle « intime relazioni » — volute dal DE LORENZO — tra i calcari di scogliera e gli scisti silicei non già dei rapporti stratigrafici, bensì dei rapporti tettonici, resta pur sempre indiscussa la triassicità dei calcari a liste e noduli di selce in base alla fauna ad *Halobia* e *Posidonomya* in essi rinvenuta.

La posizione dei « calcari di scogliera » sarà argomento di un prossimo lavoro nel quale sarà anche descritta la fauna in essi contenuta. Ad ogni modo si hanno già indizi per ritenere le scogliere di Lagonegro eteropiche della porzione basale degli scisti silicei.

La serie rappresentata da calcari a liste e noduli di selce, scisti silicei e flysch galestrino e argilloso filladico può quindi interpretarsi come il risultato di una sedimentazione continua durata dal Carnico, e forse da ancor prima², sino al Cretaceo. Sovrapposta a questa si trova, per sovrascorrimento, la normale serie calcareo dolomitica mesozoica.

A tetto degli scisti, talvolta con amigdale di flysch *macinato* conservato ancora tra le due formazioni, si rinviene quindi la dolomia norica a *Gervilleia exilis*, o anche direttamente i calcari dolomitici e detritici del Giura s.l. (M. IATILE, NIZZULLO, CERVARO).

La dolomia appare sempre in stato cataclastico.

Scrivono LAZZARI [11]: « Tale tritramento non deve essere assunto come prova del carreggiamento... ma può trovare la sua spiegazione nel comportamento *diapirico* che assumono gli scisti silicei, e che si potrebbe essere manifestato nel corso stesso della sedimentazione delle future dolomie ».

Pare per la verità poco probabile che questo diapirismo possa addirittura creare zone di vero e proprio *impasto tettonico* tra scisti silicei e dolomia, come è dato di vedere tra il M. Arenazza e il M. Foraporta.

D'altra parte, anche ammettendo questo diapirismo che si sarebbe manifestato « nel corso stesso della sedimentazione delle future dolomie », come spiegare il tritramento, con innumerevoli specchi di faglia (e per vedere ciò basta entrare in una qualsiasi cava), in un sedimento non ancora diagenizzato?

Pur essendo, quindi, d'accordo che lo stato cataclastico della dolomia non possa essere addotto a *prova* sufficiente di un sovrascorrimento, tuttavia, messo in rapporto con tutte le altre osservazioni sopra esposte, mi pare logico considerarlo come un visibile *effetto* di esso.

Napoli, Istituto di Geologia dell'Università, Novembre 1961.

² Al di sotto dei livelli fossiliferi carnici i calcari a liste e noduli di selce presentano una potenza affiorante di almeno trecento metri. Non vi sono stati trovati fossili, ma, considerata la grande potenza, non è improbabile che siano rappresentati anche piani più bassi.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BALDACCI e VIOLA C. *Sull'estensione del Trias in Basilicata e sulla tettonica generale dell'Appennino meridionale*. Boll. R. Com. Geol. d'It., vol. XXV, pp. 372-390, Roma, 1894.
- [2] DE LORENZO G. *Sul Trias dei dintorni di Lagonegro in Basilicata*. Atti Acc. Sc. fis. e mat., s. 2ª, vol. V, n. 8, pp. 1-48. Napoli, 1893.
- [3] —, *Sulla geologia dei dintorni di Lagonegro*. Rend. Acc. dei Lincei, Cl. Sc. fis., s. 5ª, Vol. III, pp. 135-139, 309-312, 351-354. Roma, 1894.
- [4] —, *Le montagne mesozoiche di Lagonegrò*. Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., s. 2ª, vol. VI, n. 15, pp. 1-124. Napoli, 1894.
- [5] —, *Osservazioni geologiche nell'Appennino della Basilicata meridionale*. Atti Acc. Sc. fis. e mat., s. 2ª, vol. VII, n. 8, pp. 1-31. Napoli, 1895.
- [6] —, *Fossili del Trias medio di Lagonegro*. Palaeontographia Italica, vol. II, pp. 113-148. Pisa, 1896.
- [7] —, *Studii di geologia nell'Appennino meridionale*. Atti Acc. Sc. fis. e mat., s. 2ª, vol. VIII, n. 7, pp. 1-128. Napoli, 1896.
- [8] —, *Guida geologica dei dintorni di Lagonegro in Basilicata*. Boll. Soc. Geol. It., vol. XVII, pp. 170-195. Roma, 1898.
- [9] —, *Osservazioni geologiche sul tronco ferroviario Casalbuono-Lagonegro*. Atti R. Ist. d'Incoraggiamento, s. 4ª, vol. VII, n. 5, pp. 1-5. Napoli, 1894.
- [10] GEMMELLARO G. G., *Sul Trias della regione occidentale della Sicilia*. Mem. Acc. dei Cl. Sc. fis., s. 3ª, vol. XII, pp. 451-473. Roma, 1882.
- [11] LAZZARI A., *Le condizioni geo-petrolifere dell'Italia meridionale*. Boll. Soc. Natur., vol. LXVIII, pp. 73-89. Napoli, 1959.
- [12] LUCINI P., *Alcune osservazioni sui rapporti tra la formazione del flysch e quella degli scisti silicei nel territorio di Lagonegro in Basilicata*. Boll. Soc. Geol. It., vol. LXXV, fasc. 1, pp. 16-23. Roma, 1956.
- [13] LUCINI P., MASPERONI L. e SPADA L. *Dati micropaleontologici sul « flysch » del versante tirrenico della Basilicata*. Boll. Soc. Geol. Ital., vol. LXXVI, fasc. 1, pp. 67-80.
- [14] NELLI B. *Il Raibl nei dintorni di M. Iudica*. Boll. Soc. Geol. Ital., vol. XVIII, pp. 211-223. Roma, 1899.
- [15] SCALIA S. *La fauna del Trias superiore nel gruppo del M. Iudica*. Atti. Acc. Gioenia Sc. Nat., serie 5ª, vol. III; vol. V; vol. VII. Catania, 1910, 1912 e 1914.
- [16] —, *I fossili del Trias superiore dell'Acquanova e di Paraspura (M. Scalpello)*. Boll. Sedute Acc. Gioenia Sc. nat., fasc. 95. Catania, 1907.
- [17] SCARSELLA F. *Sulla posizione stratigrafica degli scisti silicei attribuiti al Trias medio nell'Appennino meridionale*. Boll. Soc. Geol. Ital., vol. LXXVI, pp. 53-59, fasc. III. Roma, 1957.
- [18] SIGNORINI R. *Sulla tettonica dei terreni mesozoici nell'Appennino Lucano*. Rend. R. Acc. Naz. Lincei, Cl. Sc. fis., s. 6ª, vol. XXIX, pp. 558-562. Roma, 1939.
- [19] TACOLI M. L. e ZOJA L. *L'età degli scisti silicei di S. Fele*. Boll. Soc. Geol. Ital., vol. LXXVI, pp. 36-45, fasc. I. Roma, 1957.
- [20] TCHIHATCHEFF P. DE, *Coup d'oeil sur la constitution géologique des provinces méridionales du royaume de Naples*. Berlin, 1842.
- [21] VIOLA C. *Nota preliminare sulla regione dei gabbri e delle serpentine nell'alta valle dei Sinni in Basilicata*. Boll. R. Com. Geol. Ital., vol. XXIII, pp. 105-125. Roma, 1892.

RIASSUNTO. — Oggetto della nota è la geologia dei dintorni di Lagonegro. La regione fu studiata dal DE LORENZO che distinse i vari complessi: calcari a liste e noduli di selce, calcari di scogliera, scisti silicei (gruppo Ladinico di Bittner); Hauptdolomit, (Norico); calcari e calcari dolomitici bruni e neri (Lias inf. e Dogger inf.); flysch (Eocene).

Viene ora invece riconosciuta l'esistenza di due serie continue, distinte e tettonicamente sovrapposte: la prima — probabilmente autoctona — è costituita da calcari a liste e noduli di selce, calcari di scogliera, scisti silicei e flysch galestrino e argilloso filladico; la seconda, sovrascorsa sulla precedente, da Hauptdolomit, calcari e calcari dolomitici giurassici s.l., sovrascorsi sulla precedente.

Al passaggio scisti silicei-dolomia non viene quindi più riconosciuto il significato di successione stratigrafica, e lo stato cataclastico della dolomia è interpretato come un effetto del sovrascorrimento.

La distinzione delle due serie trova la sua ragion d'essere nel fatto che si è riconosciuto un carattere di continuità di sedimentazione dai calcari a liste e noduli di selce al flysch galestrino. Tale successione è stata ritenuta comprensiva di tutti i piani dal Carnico al Cretaceo inferiore.

L'Hauptdolomit, quindi, coeva solo di una parte degli scisti silicei, si troverebbe sovrapposta a questo complesso per motivi tettonici. Assieme all'Hauptdolomit, ad essa ora sovrapposta, ora no, sarebbe alloctona tutta la pila calcareo dolomitica mesozoica.

SUMMARY. — The subject of this note is the geology of the area about Lagonegro (Lucania). This country was studied by DE LORENZO who distinguished the following sedimentary complexes: « calcari a liste e noduli di selce » (limestones with bands and nodules of chert), « calcari di scogliera » (reef limestones), « scisti silicei » (siliceous shales in thin layers) (*Ladinian according Bittner*); « Hauptdolomit » (*Norian*); brown and black limestones and dolomitic limestones (*Lower Lias and Lower Dogger*); « flysch » (*Eocene*).

On the contrary we recognise two distinct sedimentary complexes, the one overlaying the other: the first one, probably autochthonous, formed by « calcari a liste e noduli di selce », « scisti silicei », « calcari di scogliera » and « flysch galestrino e argilloso filladico »; the second one formed by Hauptdolomit, Jurassic limestones and dolomitic limestones overthrust on the first.

Therefore the boundary « scisti silicei » - « Hauptdolomit » is not recognised as stratigraphic succession and the Hauptdolomit cataclastic character is explained as effect of the overthrust.

The distinction between the two sedimentary complexes is based on the identification of the character of continuous sedimentation from the « calcari a liste e noduli di selce » to the « flysch galestrino e argilloso filladico ».

We think that this series includes all stages from the Carnian to the Lower Cretaceous.

Therefore the Hauptdolomit is contemporaneous of only one share of the « scisti silicei », and we think that the Hauptdolomit is overlaying to this complex for tectonic causes.

We believe that all the mesozoic limestone — dolomitic sedimentary package with the Hauptdolomit is allochthonous.





Il M. Iatile visto dalla Stazione Ferro. di Lagonegro.

a: scisti silicei passanti gradualmente, in basso, a calcari con liste e noduli di selce.

b: Hauptdolomit norica; calcari e calcari dolomitici giurassici.

s: piano di contatto tra scisti silicei (autoctono?) e complesso calcareo dolomitico alloctono.

Al contatto la dolomia è in stato cataclastico. Nella foto si distingue una fascia più chiara in corrispondenza della dolomia triturrata. Nella parte occidentale (destra nella figura) si ritrova il Giura a diretto contatto con gli scisti silicei.

Sull'efflusso di solido e liquido da letti di sabbia silicea fluidizzati con acqua.

*Nota dei dott. Leopoldo Massimilla, Gennaro Volpicelli
e Domenico Porcelli*

presentata dal socio Giovanni Malquori

(Adunanza del dì 2 dicembre 1961)

L'indagine della quale si dà conto nella presente nota fa parte di un programma di ricerche in corso di svolgimento presso questo Istituto sullo efflusso di mezzi discontinui formati da fluidi e da particelle solide attraverso fori ed orifici di forme diverse.

Nei lavori finora pubblicati sull'argomento [1, 2, 3, 4], si è riferito intorno ai risultati di sperimentazioni riguardanti l'efflusso di sistemi solido-gas fluidizzati; questa nota riguarda l'efflusso di sistemi solido-liquido.

Le esperienze sono state realizzate usando come solido sabbia silicea e come mezzo fluidizzante acqua. Il diametro medio delle particelle solide era di 0,26 mm (massimo discostamento $\pm 0,10$ mm); la densità era di 2,6 gr/cm³; i fori di efflusso avevano diametri varianti da 1,7 a 4,2 mm; le pressioni erano comprese tra 500 e 3000 mm di H₂O; le altezze dei letti fluidizzati, al di sopra dei fori, variavano da 13 a 100 cm; le portate della corrente d'acqua fluidizzante erano tali da dar luogo a sistemi solido-liquido con gradi di vuoto fino a 0,85.

La sperimentazione è stata realizzata utilizzando le apparecchiature schematicamente rappresentate nelle figure 1 e 2 e costituite dalla colonna di fluidizzazione, dai dispositivi di raccolta e misura dell'acqua e della sabbia effluite, nonché dalla pompa e dalle linee di alimentazione dell'acqua.

La colonna (a) dell'apparecchiatura di cui alla figura 1 si compone di elementi cilindrici in perspex di 90 mm di diametro e di 350, 500 e 700 mm di altezza, collegati, a mezzo di flange e morsetti a vite, tra loro e con una sezione tronco-conica (b). L'altezza della colonna viene variata utilizzando uno o più di questi elementi; nel tronco inferiore, ad una distanza di 210 mm dal distributore della corrente di acqua fluidizzante (c) sono intagliati a spigolo vivo i fori di efflusso (d) di 1,8—2,0 e 3,0 mm di diametro. Allo stesso livello dei fori è derivata una presa di pressione (e), protetta all'imbocco interno da una retina metallica che impedisce rientrate di sabbia nel manometro ad acqua (f). La svasatura alla sommità della colonna impedisce

il trascinamento della sabbia da parte della corrente d'acqua fluidizzante, la cui portata è controllata a mezzo della valvola (g). I fori di efflusso sono otturati da spinotti di legno e la colonna può essere svuotata a mezzo degli scarichi (h) ed (i), attraverso i quali effluiscono, rispettivamente, acqua e sabbia.

L'apparecchiatura di cui alla figura 2 si differenzia da quella rappre-

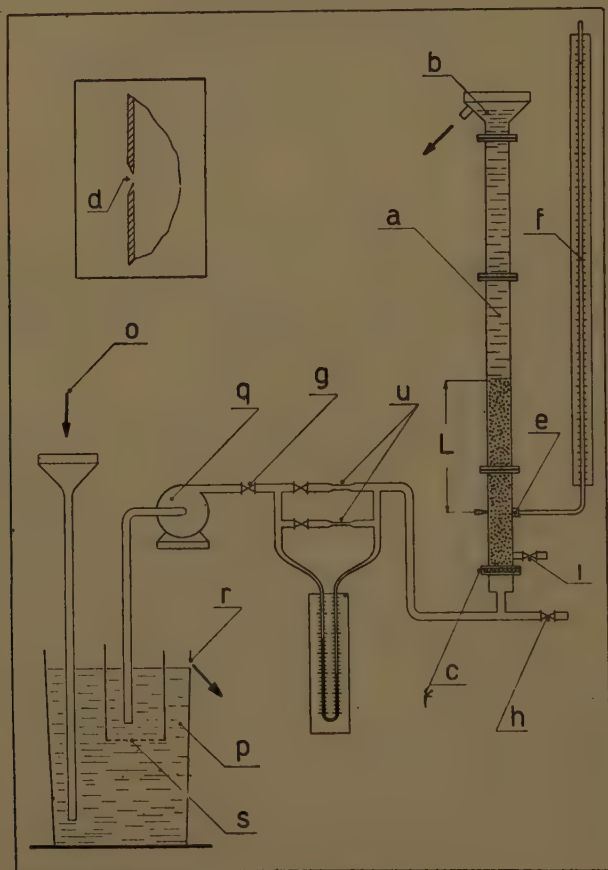


Fig. 1.

sentata in figura 1 essenzialmente per le dimensioni. La colonna ha un diametro di 192 mm ed un'altezza massima di 2200 mm. Essa si prolunga superiormente con una colonnina (l) nella quale l'acqua risale fino ad un livello fissato dalla posizione del condotto a collo d'oca (m), spostabile verticalmente insieme al condotto (n). Lo scarico della colonna e la corrente di alimentazione (o) si immettono nel serbatoio tronco-conico (p), nel quale pesca la pompa (q). Il livello dell'acqua nel serbatoio è mantenuto costante dal troppopieno (r). L'acqua aspirata dalla pompa è filtrata dalla rete (s),

la quale trattiene la sabbia che riesce a superare la sezione svasata (*b*) ed a risalire nel serbatoio (*p*). Il tronco della colonna nel quale sono praticati i fori è in lamiera di acciaio inossidabile di 0,6 mm di spessore. I fori hanno

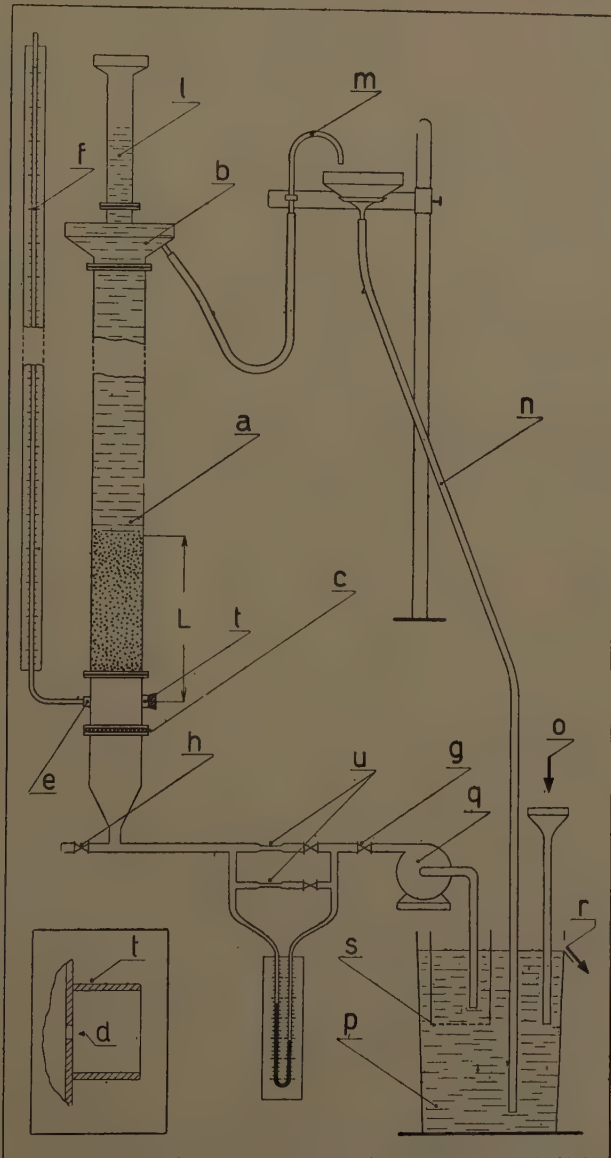


Fig. 2.

diametri nominali di 1,7-2,0-2,5-3,5 e 4,2 mm e distano 100 mm dal distributore dell'acqua; in corrispondenza di essi sono saldati i manicotti portatappi (*t*).

In entrambe le apparecchiature i distributori della corrente d'acqua sono formati da piastre di perspex di 6 mm, forate su tutta la sezione della colonna (diametro dei fori: 7 mm; densità: 50 fori/dm²) e ricoperte da una rete metallica. La regolazione ed il controllo della portata della corrente fluidizzante è realizzata con i due dispositivi (*u*): uno per le basse ed uno per le alte portate; queste variavano da 0,5 a 4 litri/min nelle esperienze con la colonna di 90 mm di diametro e da 2 a 16 litri/min nelle esperienze con la colonna di 192 mm di diametro.

Nelle esperienze realizzate con l'apparecchiatura di figura 1, regolata la portata della corrente d'acqua a mezzo della valvola (*g*), si immetteva la sabbia dall'alto della colonna fino a che l'altezza del letto fluidizzato *L* giungeva al valore voluto. Stabilizzatosi il livello del letto si leggeva la pressione relativa Δp al manometro (*f*), si toglieva lo spinotto dal foro con il quale si intendeva lavorare e, contemporaneamente, si riprendeva il caricamento della sabbia in modo da mantenere costante *L* e Δp nel corso della prova, la quale durava un tempo (*t*) di 1 - 2 o 3 minuti. Il solido ed il liquido effluiti erano raccolti in un recipiente graduato e tarato e dal volume (*V*) e dal peso (*P*) del materiale contenuto nel recipiente si risaliva alle portate volumetriche di acqua (*Q_A*) e di sabbia (*Q_S*) effluite attraverso le relazioni:

$$Q_A \rho_A + Q_S \rho_S = \frac{P}{t}$$

$$Q_A + Q_S = \frac{V}{t}$$

essendo ρ_A e ρ_S le densità, rispettivamente, dell'acqua e della sabbia.

Per ciascun foro e per diverse altezze *L* e pressioni Δp , si è sperimentato in tutto il campo delle portate della corrente fluidizzante entro il quale era possibile ottenere delle condizioni di efflusso stazionarie. La ripetibilità dei risultati sperimentali veniva controllata duplicando ciascuna prova: gli scarti percentuali nei valori delle portate di sabbia e di acqua effluite erano, nella maggior parte dei casi, inferiori al 5%.

Nonostante il buon accordo tra i dati di prove realizzate nelle stesse condizioni di esperienza, l'apparecchiatura di figura 1 risultò per vari aspetti inefficiente.

Con questa apparecchiatura si poteva operare solo con fori di diametro molto piccolo e con pressioni di efflusso molto basse: già con un foro di 3,0 mm e con un Δp dell'ordine dei 1000 mm di H₂O la portata di acqua effluente giungeva fin quasi ad un quarto, un terzo della portata della corrente liquida fluidizzante.

Inoltre era difficile praticare nella parete della colonna di 90 mm di diametro fori a spigolo vivo senza che il perspex si scheggiasse ed, essendo le aperture molto piccole, le irregolarità del contorno potevano influire

considerevolmente sulla loro forma; d'altra parte gli spinotti tendevano ad allargare i fori estendendone la sezione di efflusso.

A ciò è da aggiungere che l'apparecchiatura di figura 1 non permetteva di lavorare agli stessi valori di L e Δp con diverse portate della corrente fluidizzante. La pressione di efflusso Δp era difatti realizzata, in parte, dal carico statico dell'acqua contenuta nella colonna, in parte, dalla perdita di carico del liquido fluente attraverso il solido fluidizzato. All'aumentare della portata della corrente fluidizzante la concentrazione delle particelle andava riducendosi e, rimanendo costante l'altezza L del letto, andava riducendosi anche l'aliquota della pressione di efflusso dovuta alla presenza della sabbia nella colonna.

Nella costruzione dell'apparecchiatura rappresentata in figura 2 si è cercato di ovviare a questi inconvenienti aumentando il diametro della colonna da 90 a 192 mm, inserendo in questa un tronco in lamiera di acciaio inossidabile con fori e manicotti portatappi e sostituendo allo scarico di troppopieno alla sommità della sezione svasata (b) lo scarico a collo d'oca (m), ad altezza regolabile. Per un certo L , quest'ultimo dispositivo assicurava un costante Δp qualunque fosse la portata della corrente fluidizzante permettendo di compensare con variazioni del carico statico le variazioni della perdita di carico della corrente liquida attraverso il letto di particelle.

Entrambe le apparecchiature sono state utilizzate per determinare i gradi di vuoto ε del sistema solido-liquido fluidizzato al variare della portata della corrente d'acqua. Si introduceva nella colonna un certo quantitativo di sabbia di volume effettivo (v) e si misurava, per vari valori della portata della corrente fluidizzante, l'altezza del letto. Si determinava quindi il volume (V) della colonna occupato dalla sospensione solido-liquido e, quindi, ε , dato dalla:

$$\varepsilon = \frac{V - v}{V}$$

Diverse curve di ε al variare della portata della corrente fluidizzante sono state determinate, per ciascuna colonna, con diversi quantitativi di sabbia; queste curve, eccezione fatta per quelle relative a letti molto bassi, 15 - 30 cm di altezza, sono praticamente coincidenti.

Nelle tabelle I, II e III sono raccolti i dati delle esperienze realizzate con l'apparecchiatura di figura 1. Per ciascuna prova vengono indicati il diametro nominale del foro, la pressione di efflusso (Δp), la portata della corrente d'acqua fluidizzante (Q_f), l'altezza del letto (L), il grado di vuoto (ε) ed il rapporto tra la portata d'acqua effluita (Q_A) e la portata totale del sistema solido-liquido effluente ($Q_A + Q_S$).

Nelle tabelle da IV a IX sono riportati i risultati delle prove realizzate con l'apparecchiatura di figura 2. In queste tabelle ciascun foro è individuato con due diametri: quello nominale e quello misurato, a mezzo di cilindretti

passa e non passa; con un calibro cinquantessimale; in esse sono altresì indicate individualmente le portate Q_A e Q_S invece che i rapporti $\frac{Q_A}{Q_A + Q_S}$.

Nelle tabelle da I a IX i due valori nelle colonne: Q_A , Q_S e $\frac{Q_A}{Q_A + Q_S}$ si riferiscono a risultati di prove ripetute nelle stesse condizioni di esperienza.

Nella tabella X sono riportati dati di efflusso ottenuti in prove realizzate a mezzo dell'apparecchiatura di figura 2 senza solido fluidizzato in colonna. In queste prove, a parità di diametro del foro e di pressione di efflusso, non sono state riscontrate variazioni della portata di acqua effluita dai fori al variare della portata della corrente d'acqua fluente in colonna, almeno nel campo delle portate con le quali si è fluidizzata la sabbia silicea nelle esperienze di efflusso di acqua e solido.

La incertezza sulla forma delle aperture ricavate nella colonna in perspex di figura 1 e la possibilità che esse siano state progressivamente allargate dagli spinotti di legno nel corso della sperimentazione sono le ragioni per le quali si è ritenuto inutile di riportare nelle tabelle I, II e III le portate di sabbia e di acqua effluite. Si sono invece indicati i valori di

$\frac{Q_A}{Q_A + Q_S}$ che, come è presumibile, sono meno influenzati da irregolarità del contorno dei fori e da piccole alterazioni della sezione di questi eventualmente verificatesi durante le esperienze.

Il significato di $\frac{Q_A}{Q_A + Q_S}$ è già stato posto in rilievo nelle indagini sull'efflusso di sistemi solido-gas. Questo rapporto rappresenta il grado di vuoto del sistema che si otterrebbe disperdendo tutto il solido effluito in tutto il fluido effluito in un dato periodo di tempo.

Il confronto tra $\frac{Q_A}{Q_A + Q_S}$ ed il grado di vuoto ε del sistema solido-liquido in colonna indica il verificarsi o meno di una separazione delle particelle solide dal mezzo discontinuo effluente all'atto dell'efflusso. A tal riguardo va considerato che il comportamento di sospensioni solido-liquido è molto più prossimo a quello dei mezzi continui di quanto non lo sia quello delle sospensioni solido-gas. Nell'efflusso di queste ultime vi è una considerevole separazione delle particelle dal mezzo effluente cosicchè, per fori di 3,0 - 4,0 mm di diametro, si passa da gradi di vuoto in colonna uguali a 0,6 - 0,7 a valori di $\frac{Q_A}{Q_A + Q_S}$ uguali a 0,90 - 0,98 [1].

Nell'efflusso di sospensioni solido-liquido i gradi di vuoto in colonna sono all'incirca uguali ai valori di $\frac{Q_A}{Q_A + Q_S}$.

Ulteriori esperienze, realizzate con materiali di densità e grana diverse da quelle della sabbia silicea sono in corso di svolgimento per approfondire questo ed altri aspetti del complesso problema dell'efflusso di mezzi discontinui formati da liquidi e solidi attraverso fori.

TABELLA I.

Esperienze realizzate con la colonna di 90 mm di diametro.

Foro di efflusso: diametro nominale = 1,8 mm.

L cm	Δp mm H ₂ O	Q_f l/min	Q_A		ε
			$Q_A + Q_s$		
29	600	0,35	0,64	0,63	0,48
29	590	0,51	0,63	0,63	0,52
29	560	0,73	0,64	0,64	0,57
29	550	0,84	0,65	0,65	0,59
29	500	1,29	0,71	0,70	0,66
29	480	2,18	0,74	0,75	0,75
29	440	2,96	0,81	0,81	0,81
29	410	3,53	0,85	0,85	0,83
29	400	3,68	0,88	0,88	0,84
29	925	0,51	0,61	0,62	0,52
29	900	0,84	0,63	0,63	0,59
29	875	1,13	0,64	0,66	0,63
29	850	1,55	0,69	0,69	0,69
29	830	2,08	0,74	0,74	0,75
29	780	3,08	0,82	0,80	0,81
29	755	3,76	0,87	0,87	0,84
29	1325	0,39	0,63	0,63	0,50
29	1300	0,58	0,64	0,64	0,53
29	1260	0,93	0,63	0,62	0,61
29	1230	1,41	0,68	0,68	0,67
29	1210	1,83	0,70	0,71	0,72
29	1190	2,13	0,75	0,75	0,75
29	1160	2,86	0,84	0,80	0,80
29	1120	3,64	0,87	0,87	0,84
29	1730	0,52	0,63	0,63	0,53
29	1680	0,97	0,64	0,63	0,61
29	1615	1,69	0,71	0,72	0,70
29	1550	2,25	0,76	0,77	0,76
29	1510	3,64	0,85	0,85	0,84
64	1160	0,63	0,64	0,64	0,54
64	1100	0,97	0,64	0,64	0,60
64	1010	1,54	0,68	0,69	0,69
64	940	2,30	0,74	0,74	0,76
64	910	2,86	0,78	0,78	0,80
64	880	3,70	0,83	0,83	0,84
64	1500	0,64	0,63	0,64	0,54
64	1400	1,30	0,65	0,67	0,67
64	1265	2,70	0,78	0,80	0,79
64	1175	3,64	0,87	0,86	0,84
64	1750	1,55	0,70	0,70	0,70
64	1580	3,24	0,83	0,83	0,80
98	1580	1,33	0,69	0,65	0,67
98	1450	2,00	0,73	0,73	0,74
98	1310	3,16	0,83	0,83	0,82
98	1950	1,38	0,69	0,69	0,68
98	1800	2,50	0,77	0,76	0,78
98	1685	3,43	0,82	0,82	0,83

TABELLA II.

Esperienze realizzate con la colonna di 90 mm di diametro.

Foro di efflusso: diametro nominale = 2,0 mm.

L cm	Δp mm H ₂ O	Q_f l/min	Q_A		ε
			$Q_A + Q_S$		
29	600	0,37	0,59	0,59	0,49
29	560	0,73	0,60	0,59	0,57
29	530	1,09	0,63	0,65	0,63
29	500	1,29	0,71	0,70	0,66
29	480	2,18	0,76	0,76	0,75
29	440	2,96	0,79	0,80	0,81
29	410	3,53	0,84	0,84	0,83
29	400	3,68	0,86	0,85	0,84
29	925	0,51	0,58	0,58	0,51
29	900	0,84	0,62	0,62	0,59
29	875	1,13	0,66	0,66	0,63
29	850	1,55	0,71	0,71	0,70
29	830	2,08	0,80	0,79	0,75
29	780	3,08	0,86	0,85	0,81
29	755	3,76	0,90	0,89	0,84
29	1325	0,39	0,59	0,60	0,50
29	1300	0,58	0,60	0,61	0,53
29	1260	0,93	0,66	0,65	0,60
29	1230	1,41	0,71	0,71	0,68
29	1210	1,83	0,72	0,76	0,72
29	1190	2,13	0,76	0,76	0,75
29	1160	2,86	0,81	0,81	0,80
29	1120	3,64	0,88	0,88	0,84
29	1730	0,52	0,60	0,61	0,52
29	1710	0,72	0,61	0,61	0,57
29	1680	0,97	0,67	0,67	0,61
29	1615	1,69	0,73	0,73	0,71
29	1550	2,25	0,78	0,79	0,76
29	1510	3,63	0,87	0,87	0,84
64	1160	0,63	0,59	0,59	0,54
64	1100	0,95	0,60	0,62	0,60
64	1010	1,54	0,72	0,71	0,70
64	940	2,30	0,78	0,78	0,76
64	910	2,86	0,81	0,82	0,80
64	880	3,70	0,85	0,85	0,84
64	1500	0,63	0,60	0,62	0,54
64	1400	1,30	0,66	0,67	0,67
64	1265	2,70	0,79	0,80	0,79
64	1175	3,64	0,87	0,87	0,84
64	1750	1,55	0,71	0,73	0,69
64	1580	3,24	0,84	0,84	0,82
98	1710	0,81	0,62	0,62	0,57
98	1580	1,33	0,69	0,70	0,67
98	1450	2,00	0,75	0,75	0,74
98	1310	3,16	0,82	0,82	0,81
98	1950	1,38	0,70	0,70	0,67
98	1800	2,45	0,78	0,77	0,77
98	1685	3,43	0,83	0,83	0,83

TABELLA III.

Esperienze realizzate con la colonna di 90 mm di diametro.

Foro di efflusso: diametro nominale = 3,0 mm.

L cm	Δp mm H ₂ O	Q_f l/min	Q_A		ε
			$Q_A + Q_s$		
29	560	0,73	0,59	0,59	0,56
29	530	1,09	0,62	0,63	0,63
29	500	1,29	0,71	0,71	0,67
29	480	2,12	0,77	0,75	0,75
29	440	2,96	0,80	0,81	0,81
29	410	3,53	0,86	0,85	0,83
29	400	3,68	0,87	0,87	0,84
29	925	0,51	0,56	0,55	0,51
29	900	0,84	0,63	0,64	0,59
29	875	1,13	0,68	0,67	0,63
29	850	1,55	0,72	0,71	0,69
29	830	2,08	0,77	0,77	0,75
29	780	3,08	0,82	0,83	0,81
29	755	3,76	0,89	0,89	0,84
29	1260	0,93	0,65	0,63	0,60
29	1230	1,41	0,68	0,70	0,68
29	1210	1,83	0,73	0,73	0,72
29	1190	2,13	0,75	0,75	0,75
29	1160	2,86	0,81	0,81	0,80
29	1120	3,64	0,88	0,88	0,84
29	1710	0,72	0,63	0,60	0,57
29	1680	0,97	0,66	0,66	0,61
29	1615	1,69	0,74	0,73	0,71
29	1550	2,25	0,79	0,78	0,76
29	1510	3,63	0,87	0,87	0,84
64	1160	0,63	0,57	0,58	0,54
64	1100	0,95	0,64	0,64	0,61
64	1010	1,54	0,72	0,72	0,69
64	940	2,30	0,77	0,77	0,76
64	910	2,86	0,81	0,82	0,80
64	880	3,70	0,85	0,86	0,84
64	1500	0,63	0,60	0,60	0,54
64	1400	1,30	0,69	0,68	0,67
64	1265	2,70	0,81	0,80	0,79
64	1175	3,64	0,88	0,88	0,84
98	1580	1,33	0,69	0,69	0,67
98	1450	2,00	0,75	0,75	0,74
98	1310	3,16	0,85	0,84	0,81
98	1950	1,38	0,70	0,69	0,67
98	1800	2,45	0,78	0,78	0,78
98	1685	3,43	0,82	0,82	0,81

TABELLA IV.

Esperienze realizzate con la colonna di 192 mm di diametro.

Foro di efflusso: diametro nominale = 1,7 mm; diametro misurato = 1,68 mm.

L cm	Δp mm H ₂ O	Q_i l/min	Q_A l/min		Q_s l/min		ϵ
13	550	3,5	0,10	0,10	0,07	0,07	0,57
13	550	4,5	0,08	0,09	0,08	0,08	0,61
13	550	6,1	0,15	0,15	0,08	0,08	0,66
13	550	7,6	0,18	0,17	0,08	0,08	0,69
13	550	9,1	0,18	0,18	0,08	0,08	0,72
13	550	11,6	0,21	0,21	0,07	0,07	0,77
13	550	13,8	0,23	0,22	0,06	0,07	0,80
13	550	16,0	0,22	0,22	0,07	0,07	0,84
13	750	2,2	0,13	0,13	0,08	0,08	0,52
13	750	3,2	0,13	0,12	0,08	0,09	0,56
13	750	4,3	0,13	0,13	0,09	0,09	0,60
13	750	5,7	0,14	0,15	0,08	0,08	0,65
13	750	6,8	0,17	0,18	0,10	0,10	0,68
13	750	8,5	0,23	0,22	0,09	0,09	0,71
13	750	10,4	0,22	0,23	0,09	0,09	0,74
13	750	12,5	0,27	0,25	0,08	0,08	0,78
13	750	14,5	0,28	0,29	0,07	0,06	0,81
13	1000	2,3	0,14	0,15	0,10	0,10	0,52
13	1000	3,9	0,17	0,17	0,10	0,10	0,59
13	1000	4,6	0,17	0,16	0,10	0,11	0,61
13	1000	5,7	0,18	0,18	0,10	0,10	0,65
13	1000	7,6	0,25	0,26	0,11	0,11	0,69
13	1000	9,1	0,26	0,26	0,11	0,11	0,72
13	1000	11,6	0,29	0,29	0,10	0,10	0,77
13	1000	13,8	0,31	0,26	0,08	0,09	0,80
13	1350	2,3	0,20	0,20	0,11	0,11	0,52
13	1350	3,3	0,20	0,20	0,10	0,11	0,56
13	1350	4,4	0,22	0,21	0,13	0,13	0,61
13	1350	5,6	0,26	0,25	0,13	0,13	0,65
13	1350	7,0	0,29	0,29	0,12	0,12	0,68
13	1350	8,5	0,29	0,29	0,13	0,12	0,71
13	1350	9,6	0,32	0,31	0,12	0,12	0,73
13	1350	11,0	0,31	0,32	0,12	0,11	0,75
13	1350	13,7	0,36	0,36	0,09	0,09	0,80
62	1650	2,2	0,19	0,19	0,11	0,12	0,52
62	1650	2,9	0,19	0,19	0,11	0,12	0,55
62	1650	3,9	0,20	0,20	0,12	0,12	0,59
62	1650	4,6	0,22	0,22	0,11	0,11	0,61
62	1650	5,5	0,22	0,22	0,11	0,11	0,64
62	1650	6,6	0,23	0,23	0,11	0,11	0,67
62	1650	7,4	0,19	0,21	0,11	0,10	0,69
62	1650	8,4	0,30	0,31	0,14	0,13	0,71
62	1650	9,1	0,34	0,34	0,13	0,13	0,72
62	1650	9,2	0,29	0,30	0,15	0,15	0,72
62	1650	9,6	0,33	0,34	0,13	0,13	0,73
62	1650	11,4	0,38	0,38	0,12	0,12	0,76

(Continuaz. Tab. IV)

L cm	Δp mm H ₂ O	Q_f l/min	Q_A l/min		Q_s l/min		ε
62	1650	11,6	0,30	0,30	0,13	0,13	0,77
62	1650	12,2	0,38	0,38	0,11	0,11	0,77
62	1650	13,1	0,41	0,41	0,10	0,10	0,79
62	1650	13,3	0,34	0,34	0,13	0,13	0,79
62	1650	14,2	0,44	0,44	0,08	0,08	0,81
62	1650	15,5	0,44	0,45	0,08	0,07	0,82
13	1750	2,6	0,22	0,24	0,13	0,13	0,54
13	1750	3,5	0,23	0,23	0,12	0,13	0,57
13	1750	4,5	0,24	0,22	0,12	0,14	0,61
13	1750	7,5	0,35	0,32	0,14	0,15	0,69
13	1750	9,1	0,40	0,36	0,12	0,13	0,72
13	1750	11,9	0,42	0,40	0,11	0,11	0,77
13	1750	14,6	0,43	0,42	0,10	0,09	0,82
13	2200	2,5	0,26	0,28	0,14	0,13	0,53
13	2200	3,4	0,24	0,25	0,15	0,15	0,57
13	2200	4,9	0,27	0,27	0,15	0,15	0,63
13	2200	6,2	0,39	0,40	0,16	0,16	0,66
13	2200	8,2	0,43	0,42	0,14	0,14	0,71
13	2200	10,0	0,44	0,42	0,13	0,14	0,74
13	2200	11,9	0,47	0,44	0,12	0,13	0,77
13	2200	14,3	0,49	0,49	0,11	0,12	0,81
62	2200	1,6	0,28	0,26	0,11	0,12	0,48
62	2200	2,0	0,27	0,28	0,11	0,11	0,51
62	2200	2,6	0,26	0,25	0,12	0,13	0,54
62	2200	3,9	0,28	0,35	0,12	0,09	0,59
62	2200	5,5	0,28	0,28	0,12	0,12	0,64
62	2200	6,4	0,27	0,30	0,13	0,11	0,67
62	2200	8,2	0,27	0,26	0,12	0,13	0,71
62	2200	10,9	0,36	0,39	0,15	0,14	0,75
62	2200	14,2	0,45	0,43	0,12	0,12	0,81
62	2200	16,0	0,48	0,45	0,10	0,11	0,84
13	2500	2,3	0,22	0,23	0,15	0,16	0,52
13	2500	3,9	0,24	0,25	0,14	0,15	0,59
13	2500	4,5	0,27	0,27	0,15	0,16	0,61
13	2500	5,7	0,31	0,32	0,18	0,19	0,65
13	2500	7,6	0,40	0,39	0,19	0,21	0,69
13	2500	9,1	0,41	0,41	0,17	0,18	0,72
13	2500	11,6	0,48	0,49	0,12	0,14	0,77
13	2500	13,8	0,49	0,49	0,14	0,14	0,80
62	2900	2,3	0,29	0,29	0,15	0,15	0,52
62	2900	2,5	0,26	0,25	0,14	0,16	0,53
62	2900	3,0	0,30	0,28	0,11	0,12	0,55
62	2900	3,4	0,28	0,29	0,14	0,14	0,57
62	2900	4,1	0,28	0,32	0,14	0,13	0,60
62	2900	5,0	0,31	0,32	0,14	0,16	0,63
62	2900	6,1	0,32	0,32	0,16	0,16	0,66
62	2900	6,8	0,28	0,28	0,13	0,14	0,68
62	2900	9,1	0,34	0,35	0,15	0,15	0,72
62	2900	10,6	0,41	0,40	0,13	0,13	0,75
62	2900	12,8	0,43	0,42	0,12	0,12	0,78
62	2900	14,6	0,46	0,46	0,11	0,11	0,82
62	2900	16,7	0,50	0,50	0,09	0,09	0,85

TABELLA V.

Esperienze realizzate con la colonna di 192 mm di diametro.

Foro di efflusso: diametro nominale = 2,0 mm; diametro misurato = 1,98 mm.

L cm	Δp mm H ₂ O	Q_f l/min	Q_A l/min		Q_s l/min		ε
13	550	3,5	0,17	0,16	0,10	0,10	0,57
13	550	4,5	0,23	0,22	0,09	0,09	0,61
13	550	6,1	0,26	0,26	0,11	0,11	0,66
13	550	7,6	0,27	0,26	0,11	0,11	0,69
13	550	9,1	0,28	0,27	0,10	0,11	0,72
13	550	11,6	0,32	0,30	0,09	0,09	0,77
13	550	13,8	0,30	0,30	0,10	0,09	0,80
13	550	16,0	0,35	0,33	0,07	0,07	0,84
13	750	2,2	0,16	0,16	0,12	0,12	0,52
13	750	3,2	0,18	0,18	0,12	0,12	0,56
13	750	4,3	0,18	0,18	0,12	0,12	0,60
13	750	5,7	0,24	0,24	0,14	0,14	0,65
13	750	6,8	0,27	0,27	0,14	0,14	0,68
13	750	8,5	0,31	0,31	0,13	0,13	0,71
13	750	10,4	0,35	0,34	0,12	0,11	0,74
13	750	12,5	0,39	0,37	0,10	0,10	0,78
13	750	14,5	0,41	0,39	0,09	0,10	0,81
13	1000	2,3	0,20	0,23	0,15	0,13	0,52
13	1000	3,9	0,23	0,23	0,17	0,17	0,59
13	1000	4,6	0,27	0,26	0,17	0,18	0,61
13	1000	5,7	0,31	0,31	0,15	0,15	0,65
13	1000	7,6	0,36	0,38	0,16	0,16	0,69
13	1000	9,1	0,37	0,37	0,15	0,15	0,72
13	1000	11,6	0,42	0,40	0,13	0,15	0,77
13	1000	13,8	0,46	0,46	0,10	0,10	0,80
13	1350	2,4	0,26	0,28	0,17	0,15	0,53
13	1350	3,3	0,25	0,27	0,17	0,15	0,56
13	1350	4,4	0,37	0,37	0,18	0,18	0,61
13	1350	5,6	0,37	0,35	0,18	0,18	0,65
13	1350	7,0	0,39	0,39	0,18	0,18	0,68
13	1350	8,5	0,45	0,42	0,17	0,17	0,71
13	1350	9,6	0,46	0,44	0,16	0,16	0,73
13	1350	11,0	0,48	0,47	0,16	0,15	0,75
13	1350	13,7	0,51	0,51	0,13	0,13	0,80
62	1650	2,2	0,29	0,29	0,17	0,17	0,52
62	1650	2,9	0,29	0,29	0,17	0,17	0,55
62	1650	3,9	0,30	0,30	0,17	0,17	0,59
62	1650	4,6	0,30	0,31	0,16	0,16	0,61
62	1650	5,5	0,31	0,31	0,18	0,18	0,64
62	1650	6,6	0,39	0,41	0,21	0,20	0,67
62	1650	9,2	0,51	0,51	0,13	0,13	0,72
62	1650	11,6	0,54	0,53	0,16	0,17	0,77
62	1650	13,3	0,55	0,55	0,14	0,14	0,79
62	1650	15,5	0,56	0,56	0,14	0,14	0,83
13	1750	2,6	0,22	0,21	0,21	0,22	0,54
13	1750	3,5	0,31	0,32	0,18	0,18	0,57

(continuaz. Tab. V)

L cm	Δp mm H ₂ O	Q_f l/min	Q_A l/min		Q_s l/min		ε
13	1750	4,5	0,32	0,34	0,18	0,19	0,61
13	1750	6,1	0,36	—	0,19	—	0,66
13	1750	7,5	0,45	0,43	0,21	0,21	0,69
13	1750	9,1	0,54	0,49	0,17	0,19	0,72
13	1750	11,9	0,59	0,55	0,16	0,17	0,77
13	1750	14,6	0,59	0,59	0,14	0,12	0,82
13	2200	2,5	0,35	0,37	0,19	0,19	0,53
13	2200	3,4	0,36	0,36	0,20	0,20	0,57
13	2200	4,9	0,45	0,42	0,24	0,24	0,63
13	2200	6,2	0,45	0,45	0,23	0,23	0,66
13	2200	8,2	0,55	0,53	0,22	0,20	0,71
13	2200	10,0	0,57	—	0,20	—	0,74
13	2200	11,9	0,60	0,59	0,19	0,18	0,77
13	2200	14,3	0,65	0,64	0,17	0,16	0,81
62	2200	1,6	0,34	0,34	0,19	0,20	0,48
62	2200	2,0	0,34	—	0,19	—	0,51
62	2200	2,6	0,36	0,36	0,19	0,19	0,54
62	2200	3,9	0,38	0,36	0,19	0,19	0,59
62	2200	5,5	0,37	0,37	0,20	0,19	0,64
62	2200	6,4	0,38	0,38	0,19	0,19	0,67
62	2200	8,2	0,44	0,44	0,22	0,22	0,71
62	2200	10,9	0,54	0,55	0,22	0,20	0,75
62	2200	14,2	0,62	0,62	0,17	0,17	0,81
62	2200	16,0	0,65	0,64	0,14	0,15	0,84
13	2500	2,3	0,31	0,32	0,21	0,22	0,52
13	2500	3,9	0,37	0,37	0,21	0,24	0,59
13	2500	4,5	0,37	0,39	0,21	0,19	0,61
13	2500	5,7	0,43	0,44	0,21	0,22	0,65
13	2500	7,6	0,54	0,53	0,23	0,26	0,69
13	2500	9,1	0,59	—	0,23	—	0,72
13	2500	11,6	0,64	0,64	0,18	0,18	0,77
13	2500	13,8	0,63	0,63	0,18	0,20	0,80
62	2900	2,0	0,34	0,33	0,23	0,23	0,51
62	2900	2,3	0,42	0,40	0,22	0,23	0,52
62	2900	2,5	0,39	0,41	0,22	0,22	0,53
62	2900	3,0	0,41	0,39	0,22	0,23	0,55
62	2900	3,4	0,40	0,41	0,22	0,21	0,57
62	2900	4,1	0,41	0,49	0,21	0,19	0,60
62	2900	5,0	0,43	0,43	0,23	0,25	0,63
62	2900	6,1	0,48	0,49	0,24	0,26	0,66
62	2900	6,8	0,52	0,52	0,23	0,23	0,68
62	2900	9,1	0,53	0,55	0,22	0,22	0,72
62	2900	10,6	0,59	0,59	0,20	0,20	0,75
62	2900	12,8	0,62	0,63	0,18	0,18	0,78
62	2900	14,6	0,65	0,68	0,17	0,15	0,82
62	2900	16,7	0,72	0,71	0,13	0,13	0,85

TABELLA VI.

Esperienze realizzate con la colonna di 192 mm di diametro.

Foro di efflusso: diametro nominale = 2,5 mm; diametro misurato = 2,48 mm.

L cm	Δp mm H ₂ O	Q_f l/min	Q_A l/min		Q_s l/min		ε
13	550	2,3	0,20	0,21	0,15	0,15	0,52
13	550	3,5	0,25	0,24	0,16	0,15	0,57
13	550	4,5	0,28	0,28	0,19	0,19	0,61
13	550	6,1	0,38	0,38	0,17	0,17	0,66
13	550	7,6	0,37	0,37	0,17	0,18	0,69
13	550	9,1	0,37	0,38	0,17	0,17	0,72
13	550	11,6	0,46	0,47	0,13	0,13	0,77
13	550	13,8	0,47	0,48	0,13	0,13	0,80
13	550	16,0	0,52	0,51	0,11	0,12	0,84
13	750	2,2	0,27	0,28	0,19	0,18	0,52
13	750	3,2	0,28	0,28	0,18	0,18	0,56
13	750	4,3	0,40	0,40	0,20	0,20	0,60
13	750	5,7	0,38	0,38	0,22	0,22	0,65
13	750	6,8	0,41	0,41	0,21	0,21	0,68
13	750	8,5	0,48	0,48	0,19	0,19	0,71
13	750	10,4	0,52	0,52	0,18	0,18	0,74
13	750	12,5	0,57	0,55	0,15	0,16	0,78
13	750	14,5	0,61	0,60	0,13	0,13	0,81
13	1000	2,3	0,29	0,28	0,20	0,21	0,52
13	1000	3,9	0,35	0,34	0,22	0,23	0,59
13	1000	4,6	0,45	0,45	0,23	0,23	0,61
13	1000	5,7	0,51	0,49	0,23	0,24	0,65
13	1000	7,6	0,56	0,56	0,23	0,23	0,69
13	1000	9,1	0,57	0,57	0,22	0,22	0,72
13	1000	11,6	0,65	0,63	0,19	0,19	0,77
13	1000	13,8	0,67	0,68	0,17	0,17	0,80
62	1650	2,2	0,40	0,39	0,28	0,30	0,52
62	1650	2,9	0,43	0,44	0,27	0,27	0,55
62	1650	3,9	0,45	0,45	0,28	0,28	0,59
62	1650	4,6	0,45	0,47	0,28	0,27	0,61
62	1650	5,5	0,42	0,43	0,41	0,42	0,64
62	1650	6,6	0,63	0,62	0,30	0,31	0,67
62	1650	9,2	0,73	0,73	0,26	0,27	0,72
62	1650	11,6	0,76	0,76	0,24	0,24	0,77
62	1650	13,3	0,78	0,77	0,21	0,22	0,79
62	1650	15,5	0,81	0,82	0,20	0,20	0,83
13	1750	2,6	0,47	0,45	0,29	0,29	0,54
13	1750	3,5	0,45	0,45	0,28	0,29	0,57
13	1750	4,5	0,52	0,48	0,30	0,34	0,61
13	1750	6,1	0,67	0,64	0,31	0,31	0,66
13	1750	7,5	0,73	0,70	0,28	0,30	0,69
13	1750	9,1	0,76	0,74	0,26	0,27	0,72
13	1750	11,9	0,76	0,80	0,25	0,23	0,77
13	1750	14,6	0,91	0,87	0,17	0,19	0,82
13	2200	2,5	0,52	0,48	0,32	0,32	0,53
13	2200	3,4	0,53	0,51	0,32	0,33	0,57

(Continuaz. Tab. VI)

L cm	Δp mm H ₂ O	Q_f l/min	Q_A l/min		Q_s l/min		ε
13	2200	4,9	0,55	0,57	0,32	0,32	0,63
13	2200	6,2	0,58	0,59	0,33	0,32	0,66
13	2200	8,2	0,73	0,73	0,35	0,35	0,71
13	2200	10,0	0,82	0,80	0,30	0,31	0,74
13	2200	11,9	0,84	0,82	0,29	0,29	0,77
13	2200	14,3	0,92	0,90	0,25	0,26	0,81
62	2200	1,6	0,52	0,53	0,31	0,31	0,48
62	2200	2,0	0,52	0,52	0,32	0,31	0,51
62	2200	2,6	0,52	0,52	0,31	0,32	0,54
62	2200	3,9	0,52	0,52	0,32	0,32	0,59
62	2200	5,5	0,67	0,63	0,36	0,38	0,64
62	2200	6,4	0,67	0,64	0,36	0,37	0,67
62	2200	8,2	0,69	0,68	0,35	0,36	0,71
62	2200	10,9	0,79	0,81	0,31	0,29	0,75
62	2200	14,2	0,90	0,89	0,24	0,24	0,81
62	2200	16,0	0,97	0,94	0,20	0,22	0,84
13	2500	2,3	0,45	0,46	0,32	0,36	0,52
13	2500	3,9	0,55	0,52	0,33	0,38	0,59
13	2500	4,5	0,56	0,57	0,40	0,43	0,61
13	2500	5,7	0,68	0,68	0,39	0,41	0,65
13	2500	7,6	0,82	0,79	0,30	0,36	0,69
13	2500	9,1	0,85	0,85	0,31	0,31	0,72
13	2500	11,6	0,91	0,92	0,28	0,30	0,77
13	2500	13,8	0,95	0,96	0,27	0,29	0,80
62	2900	2,3	0,58	0,58	0,37	0,38	0,52
62	2900	2,5	0,54	0,58	0,42	0,37	0,53
62	2900	3,0	0,58	0,60	0,39	0,37	0,55
62	2900	3,4	0,60	0,62	0,36	0,34	0,57
62	2900	4,1	0,60	0,61	0,36	0,36	0,60
62	2900	5,0	0,61	0,63	0,38	0,37	0,63
62	2900	6,1	0,72	0,72	0,38	0,38	0,66
62	2900	6,8	0,77	0,75	0,36	0,36	0,68
62	2900	9,1	0,80	0,78	0,33	0,35	0,72
62	2900	10,6	0,88	0,87	0,30	0,31	0,75
62	2900	12,8	0,92	0,96	0,28	0,27	0,78
62	2900	14,6	0,95	0,97	0,27	0,26	0,82
62	2900	16,7	1,02	1,04	0,23	0,22	0,85

TABELLA VII.

Esperienze realizzate con la colonna di 192 mm di diametro.

Foro di efflusso: diametro nominale = 3,1 mm; diametro misurato = 3,08 mm.

L cm	Δp mm H ₂ O	Q_f l/min	Q_A l/min		Q_s l/min		ε
13	550	2,3	0,33	0,29	0,25	0,26	0,52
13	550	3,5	0,42	0,42	0,28	0,28	0,57
13	550	4,5	0,52	0,52	0,29	0,28	0,61
13	550	6,1	0,58	0,57	0,27	0,28	0,66
13	550	7,6	0,66	0,66	0,23	0,23	0,69
13	550	9,1	0,68	0,68	0,22	0,22	0,72
13	550	11,6	0,74	0,73	0,20	0,20	0,77
13	550	13,8	0,82	0,83	0,16	0,16	0,80
13	550	16,0	0,83	0,85	0,14	0,13	0,84
13	750	2,2	0,39	0,40	0,30	0,30	0,52
13	750	3,2	0,41	0,41	0,31	0,31	0,56
13	750	4,3	0,73	0,63	0,30	0,31	0,60
13	750	5,7	0,64	0,64	0,33	0,33	0,65
13	750	6,8	0,68	0,68	0,31	0,31	0,68
13	750	8,5	0,78	0,76	0,28	0,29	0,71
13	750	10,4	0,84	0,84	0,25	0,25	0,74
13	750	12,5	0,89	0,89	0,22	0,22	0,78
13	750	14,5	0,92	0,94	0,19	0,20	0,81
13	1000	2,3	0,46	0,45	0,33	0,35	0,52
13	1000	3,9	0,48	0,51	0,35	0,34	0,59
13	1000	4,6	0,59	0,58	0,44	0,45	0,61
13	1000	5,7	0,76	0,75	0,37	0,38	0,65
13	1000	7,6	0,86	0,86	0,34	0,34	0,69
13	1000	9,1	0,90	0,90	0,33	0,33	0,72
13	1000	11,6	0,97	0,97	0,28	0,28	0,77
13	1000	13,8	1,03	1,01	0,24	0,26	0,80
13	1350	2,3	0,57	0,56	0,42	0,40	0,52
13	1350	3,1	0,59	0,59	0,42	0,47	0,56
13	1350	4,3	0,68	0,58	0,52	0,49	0,60
13	1350	5,9	0,89	0,82	0,45	0,45	0,65
13	1350	7,0	0,96	0,94	0,40	0,44	0,68
13	1350	8,5	0,96	0,96	0,40	0,40	0,71
13	1350	9,6	1,00	1,01	0,37	0,38	0,73
13	1350	11,0	1,03	1,08	0,37	0,36	0,75
13	1350	13,7	1,19	1,19	0,27	0,27	0,80
62	1650	2,2	0,63	0,65	0,45	0,45	0,52
62	1650	2,9	0,88	0,87	0,45	0,47	0,55
62	1650	3,9	0,85	0,78	0,46	0,54	0,59
62	1650	4,6	0,81	0,80	0,52	0,53	0,61
62	1650	5,5	0,90	0,90	0,50	0,50	0,64
62	1650	6,6	0,97	0,96	0,47	0,47	0,67
62	1650	9,2	1,08	1,08	0,42	0,42	0,72
62	1650	11,6	1,12	1,10	0,37	0,39	0,77
62	1650	13,3	1,21	1,22	0,33	0,33	0,79
62	1650	15,5	1,23	1,21	0,32	0,32	0,83
13	1750	2,6	0,68	0,69	0,47	0,48	0,54

(Continuaz. Tab. VII)

L cm	Δp mm H ₂ O	Q_f l/min	Q_A l/min		Q_s l/min		ε
13	1750	3,5	0,68	0,68	0,49	0,50	0,57
13	1750	4,5	0,93	1,02	0,52	0,49	0,61
13	1750	6,1	1,02	—	0,49	—	0,66
13	1750	7,5	1,09	—	0,45	—	0,69
13	1750	9,1	1,11	1,07	0,47	0,43	0,72
13	1750	11,9	1,11	1,17	0,41	0,36	0,77
13	1750	14,6	1,43	1,34	0,25	0,28	0,82
13	2200	2,5	0,78	0,75	0,54	0,54	0,53
13	2200	3,4	0,75	0,79	0,53	0,55	0,57
13	2200	4,9	0,95	0,95	0,60	0,57	0,63
13	2200	6,2	1,09	1,09	0,57	0,57	0,66
13	2200	8,2	1,17	1,15	0,52	0,53	0,71
13	2200	10,0	1,21	1,26	0,49	0,47	0,74
13	2200	11,9	1,33	1,28	0,42	0,45	0,77
13	2200	14,3	1,53	1,47	0,35	0,37	0,81
62	2200	1,6	0,73	0,74	0,54	0,54	0,48
62	2200	2,0	0,74	0,73	0,52	0,55	0,51
62	2200	2,6	0,77	0,78	0,53	0,53	0,54
62	2200	3,9	0,79	0,78	0,53	0,54	0,59
62	2200	5,5	0,99	1,00	0,59	0,59	0,64
62	2200	6,4	1,04	0,99	0,57	0,58	0,67
62	2200	8,2	1,11	1,13	0,53	0,52	0,71
62	2200	10,9	1,25	1,26	0,46	0,45	0,75
62	2200	14,2	1,41	1,38	0,37	0,38	0,81
62	2200	16,0	1,51	1,46	0,31	0,34	0,84
62	2900	2,0	0,82	0,82	0,61	0,62	0,51
62	2900	2,3	0,88	0,87	0,62	0,63	0,52
62	2900	2,5	0,88	0,88	0,62	0,62	0,53
62	2900	3,0	0,85	0,86	0,64	0,64	0,55
62	2900	3,4	0,87	0,87	0,63	0,63	0,57
62	2900	4,1	0,87	0,89	0,64	0,61	0,60
62	2900	5,0	0,88	0,99	0,66	0,64	0,63
62	2900	6,1	1,13	1,12	0,63	0,63	0,66
62	2900	6,8	1,17	1,19	0,59	0,58	0,68
62	2900	9,1	1,32	1,31	0,51	0,52	0,72
62	2900	10,6	1,37	1,39	0,48	0,49	0,75
62	2900	12,8	1,33	1,48	0,41	0,43	0,78
62	2900	14,6	1,46	1,58	0,45	0,38	0,82
62	2900	16,7	1,58	1,61	0,39	0,35	0,85

TABELLA VIII.

Esperienze realizzate con la colonna di 192 mm di diametro.

Foro di efflusso: diametro nominale = 3,5 mm; diametro misurato = 3,52 mm.

L cm	Δp mm H ₂ O	Q_f l/min	Q_A l/min		Q_s l/min		ε
13	550	2,3	0,32	0,36	0,36	0,36	0,52
13	550	3,5	0,58	0,57	0,41	0,42	0,57
13	550	4,5	0,64	0,63	0,40	0,40	0,61
13	550	6,1	0,74	0,74	0,40	0,40	0,66
13	550	7,6	0,87	0,87	0,30	0,30	0,69
13	550	9,1	0,90	0,91	0,28	0,28	0,72
13	550	11,6	0,97	0,97	0,24	0,24	0,77
13	550	13,8	1,06	1,05	0,21	0,21	0,80
13	550	16,0	1,07	1,09	0,20	0,19	0,84
13	750	2,2	0,52	0,52	0,40	0,40	0,52
13	750	3,2	0,64	0,65	0,47	0,47	0,56
13	750	4,3	0,78	0,78	0,45	0,45	0,60
13	750	5,7	0,89	0,86	0,41	0,43	0,65
13	750	6,8	0,91	0,91	0,40	0,40	0,68
13	750	8,5	0,97	0,95	0,37	0,38	0,71
13	750	10,4	1,01	1,01	0,35	0,35	0,74
13	750	12,5	1,14	1,10	0,28	0,31	0,78
13	750	14,5	1,13	1,16	0,29	0,27	0,81
13	1000	2,3	0,79	0,81	0,44	0,44	0,52
13	1000	3,9	0,79	0,80	0,45	0,45	0,59
13	1000	4,6	0,85	0,86	0,44	0,45	0,61
13	1000	5,7	0,95	0,95	0,50	0,50	0,65
13	1000	7,6	1,09	1,09	0,42	0,43	0,69
13	1000	9,1	1,09	1,09	0,40	0,40	0,72
13	1000	11,6	1,21	1,21	0,38	0,39	0,77
13	1000	13,8	1,27	1,29	0,32	0,32	0,80
13	1350	2,3	0,73	0,75	0,55	0,55	0,52
13	1350	3,1	0,91	0,91	0,64	0,65	0,56
13	1350	4,3	0,92	0,92	0,67	0,67	0,60
13	1350	5,9	1,17	1,17	0,58	0,58	0,65
13	1350	7,0	1,24	1,24	0,48	0,48	0,68
13	1350	8,5	1,27	1,27	0,47	0,47	0,71
13	1350	9,6	1,36	1,36	0,44	0,44	0,73
13	1350	11,0	1,37	1,36	0,45	0,45	0,75
13	1350	13,7	1,40	1,41	0,43	0,43	0,80
62	1650	2,2	0,80	0,80	0,64	0,65	0,52
62	1650	2,9	0,82	0,82	0,62	0,62	0,55
62	1650	3,9	0,90	0,91	0,64	0,66	0,59
62	1650	4,6	0,99	1,00	0,69	0,69	0,61
62	1650	5,5	1,12	1,19	0,63	0,63	0,64
62	1650	6,6	1,30	1,31	0,60	0,60	0,67
62	1650	9,2	1,37	1,36	0,55	0,56	0,72
62	1650	11,6	1,36	1,33	0,53	0,53	0,77
62	1650	13,3	1,58	1,59	0,42	0,42	0,79
62	1650	15,5	1,63	1,63	0,39	0,38	0,83
13	1750	2,6	0,86	0,82	0,63	0,64	0,54

(Continuaz. Tab. VIII)

L cm	Δp mm H ₂ O	Q_f l/min	Q_A l/min		Q_s l/min		ε
13	1750	3,5	1,02	1,02	0,72	0,72	0,57
13	1750	4,5	1,20	1,09	0,70	0,73	0,61
13	1750	6,1	1,32	—	0,66	—	0,66
13	1750	7,5	1,39	—	0,59	—	0,69
13	1750	9,1	1,47	1,45	0,56	0,59	0,72
13	1750	11,9	1,51	1,60	0,51	0,45	0,77
13	1750	14,6	1,72	1,78	0,40	0,38	0,82
13	2200	2,5	1,02	1,01	0,73	0,71	0,53
13	2200	3,4	1,01	1,02	0,74	0,71	0,57
13	2200	4,9	1,32	1,37	0,77	0,74	0,63
13	2200	6,2	1,25	1,38	0,78	0,74	0,66
13	2200	8,2	1,56	1,62	0,65	0,70	0,71
13	2200	10,0	1,60	1,71	0,64	0,58	0,74
13	2200	11,9	1,77	1,70	0,53	0,56	0,77
13	2200	14,3	1,76	1,81	0,54	0,56	0,81
62	2200	1,6	0,96	0,97	0,72	0,72	0,48
62	2200	2,6	0,99	1,05	0,70	0,69	0,54
62	2200	3,9	1,14	1,25	0,78	0,81	0,59
62	2200	5,5	1,29	1,31	0,77	0,77	0,64
62	2200	6,4	1,38	1,37	0,74	0,75	0,67
62	2200	8,2	1,48	1,42	0,67	0,70	0,71
62	2200	10,9	1,56	1,58	0,62	0,59	0,75
62	2200	14,2	1,91	1,83	0,42	0,47	0,81
62	2200	16,0	1,92	1,90	0,42	0,43	0,84
13	2500	2,3	0,92	0,93	0,72	0,75	0,52
13	2500	3,9	1,00	0,98	0,74	0,77	0,59
13	2500	4,5	1,18	1,19	0,70	0,73	0,61
13	2500	5,7	1,40	1,41	0,72	0,78	0,65
13	2500	7,6	1,57	1,56	0,38	0,71	0,69
13	2500	9,1	1,64	1,66	0,65	0,69	0,72
13	2500	11,6	1,86	1,86	0,56	0,56	0,77
13	2500	13,8	1,92	1,99	0,53	0,51	0,80
62	2900	2,0	1,04	1,04	0,86	0,85	0,51
62	2900	2,3	1,13	1,09	0,83	0,86	0,52
62	2900	2,5	1,09	1,11	0,85	0,85	0,53
62	2900	3,0	1,13	1,12	0,83	0,85	0,55
62	2900	3,4	1,10	1,14	0,86	0,83	0,57
62	2900	4,1	1,41	1,33	0,88	0,93	0,60
62	2900	5,0	1,40	1,37	0,88	0,88	0,63
62	2900	6,1	1,50	1,50	0,79	0,77	0,66
62	2900	6,8	1,56	1,51	0,76	0,77	0,68
62	2900	9,1	1,78	1,66	0,65	0,71	0,72
62	2900	10,6	1,77	1,78	0,67	0,64	0,75
62	2900	12,8	2,04	1,97	0,52	0,55	0,78
62	2900	14,6	2,00	2,02	0,54	0,54	0,82
62	2900	16,7	2,12	2,13	0,46	0,45	0,85

TABELLA IX.

Esperienze realizzate con la colonna di 192 mm di diametro.

Foro di efflusso: diametro nominale = 4,2 mm; diametro misurato = 4,16 mm.

L cm	Δp mm H ₂ O	Q_f l/min	Q_A l/min		Q_s l/min		ε
13	550	2,3	0,65	0,63	0,45	0,45	0,52
13	550	3,5	0,80	0,83	0,56	0,55	0,57
13	550	4,5	0,99	0,99	0,49	0,49	0,61
13	550	6,1	1,12	1,13	0,50	0,50	0,66
13	550	7,6	1,14	1,15	0,42	0,42	0,69
13	550	9,1	1,21	1,23	0,40	0,39	0,72
13	550	11,6	1,32	1,32	0,33	0,32	0,77
13	550	13,8	1,40	1,40	0,29	0,30	0,80
13	550	16,0	1,46	1,47	0,24	0,24	0,84
13	750	2,2	0,73	0,74	0,56	0,55	0,52
13	750	3,2	0,94	0,94	0,66	0,66	0,56
13	750	4,3	0,97	0,97	0,66	0,67	0,60
13	750	5,7	1,21	1,21	0,55	0,55	0,65
13	750	6,8	1,23	1,30	0,55	0,51	0,68
13	750	8,5	1,41	1,41	0,49	0,49	0,71
13	750	10,4	1,43	1,48	0,45	0,42	0,74
13	750	12,5	1,50	1,51	0,40	0,43	0,78
13	750	14,5	1,63	1,63	0,33	0,33	0,81
13	1000	2,3	0,97	0,93	0,70	0,71	0,52
13	1000	3,9	1,18	1,21	0,65	0,63	0,59
13	1000	4,6	1,17	1,16	0,67	0,67	0,61
13	1000	5,7	1,37	1,37	0,67	0,67	0,65
13	1000	7,6	1,50	1,49	0,63	0,63	0,69
13	1000	9,1	1,57	1,57	0,55	0,55	0,72
13	1000	11,6	1,73	1,73	0,53	0,54	0,77
13	1000	13,8	1,88	1,88	0,40	0,40	0,80
13	1350	2,3	1,04	1,05	0,81	0,81	0,52
13	1350	3,1	1,22	1,23	0,90	0,90	0,56
13	1350	4,3	1,53	1,53	0,81	0,81	0,60
13	1350	5,9	1,73	1,73	0,74	0,74	0,65
13	1350	7,0	1,68	1,68	0,71	0,71	0,68
13	1350	8,5	1,74	1,74	0,66	0,66	0,71
13	1350	9,6	1,74	1,75	0,67	0,67	0,73
13	1350	11,0	2,01	2,01	0,53	0,53	0,75
13	1350	13,7	2,16	2,18	0,42	0,42	0,80
62	1650	2,2	1,09	1,09	0,89	0,90	0,52
62	1650	2,9	0,93	0,94	0,95	0,95	0,55
62	1650	3,9	1,25	1,26	0,93	0,85	0,59
62	1650	4,6	1,38	1,45	0,97	0,91	0,61
62	1650	5,5	1,62	1,62	0,86	0,84	0,64
62	1650	6,6	1,77	1,78	0,79	0,79	0,67
62	1650	9,2	1,91	1,92	0,75	0,74	0,72
62	1650	11,6	2,00	2,02	0,67	0,67	0,77
62	1650	13,3	2,27	2,27	0,52	0,52	0,79
62	1650	15,5	2,49	2,52	0,38	0,37	0,83
13	1750	2,6	1,16	1,18	0,93	0,94	0,54

(Continuaz. Tab. IX)

L cm	Δp mm H ₂ O	Q_f l/min	Q_A l/min		Q_s l/min		ε
13	1750	3,5	1,40	1,35	1,01	1,01	0,57
13	1750	4,5	1,70	1,58	0,90	0,89	0,61
13	1750	6,1	1,98	—	0,82	—	0,66
13	1750	9,1	1,95	—	0,74	—	0,72
13	1750	11,9	2,47	2,29	0,47	0,62	0,77
13	1750	14,6	2,42	2,51	0,60	0,52	0,82
13	2200	2,5	1,33	1,33	0,99	1,02	0,53
13	2200	3,4	1,61	1,43	1,16	1,07	0,57
13	2200	4,9	2,05	1,90	0,95	1,05	0,63
13	2200	6,2	2,14	2,33	0,88	0,73	0,66
13	2200	8,2	2,46	2,22	0,76	0,87	0,71
13	2200	10,0	2,55	2,40	0,65	0,78	0,74
13	2200	11,9	2,48	2,52	0,71	0,70	0,77
13	2200	14,3	2,83	—	0,47	—	0,81
62	2200	1,6	1,13	1,29	1,06	1,04	0,48
62	2200	2,0	1,42	1,34	0,93	1,01	0,51
62	2200	2,6	1,61	1,37	0,89	1,00	0,54
62	2200	3,9	1,63	1,68	1,12	1,11	0,59
62	2200	5,5	1,84	1,83	1,02	1,02	0,64
62	2200	6,4	1,78	1,72	1,05	1,08	0,67
62	2200	8,2	1,94	1,89	0,95	0,97	0,71
62	2200	10,9	2,33	2,33	0,74	0,74	0,75
62	2200	14,2	2,52	2,54	0,64	0,62	0,81
62	2200	16,0	2,56	2,62	0,59	0,60	0,84
13	2500	2,3	1,30	1,32	1,08	1,04	0,52
13	2500	3,9	1,37	1,40	1,09	0,99	0,59
13	2500	4,5	1,46	1,54	1,04	1,03	0,61
13	2500	5,7	1,94	1,90	0,97	0,96	0,65
13	2500	7,6	2,20	2,27	0,97	0,97	0,69
13	2500	9,1	2,43	2,34	0,89	0,94	0,72
13	2500	11,6	2,68	2,69	0,80	0,71	0,77
13	2500	13,8	2,97	2,74	0,54	0,73	0,80
62	2900	2,0	1,46	1,52	1,18	1,14	0,51
62	2900	2,3	1,53	1,60	1,17	1,15	0,52
62	2900	2,5	1,45	1,46	1,19	1,22	0,53
62	2900	3,0	1,57	1,40	1,23	1,30	0,55
62	2900	3,4	1,85	1,89	1,24	1,24	0,57
62	2900	4,1	1,74	1,62	1,28	1,24	0,60
62	2900	5,0	1,56	1,64	0,89	0,85	0,63
62	2900	6,1	1,76	1,82	0,96	0,92	0,66
62	2900	6,8	2,10	2,10	1,07	1,07	0,68
62	2900	9,1	2,18	2,25	1,04	1,03	0,72
62	2900	10,6	2,51	2,55	0,88	0,84	0,75
62	2900	12,8	2,76	2,75	0,74	0,74	0,78
62	2900	14,6	2,71	2,69	0,76	0,77	0,82
62	2900	16,7	2,92	2,95	0,64	0,61	0,85

TABELLA X.

Esperienze realizzate con la colonna di 192 mm di diam. senza solido fluidizz.
 Δp = pressione di efflusso; d = diametro del foro; Q_A = portata di acqua effluita.

Δp mm H ₂ O	d mm	Q_A l/min	Δp mm H ₂ O	d mm	Q_A l/min
550	1,7	0,33	550	3,1	1,04
750	1,7	0,40	750	3,1	1,21
1030	1,7	0,44	1030	3,1	1,48
1350	1,7	0,51	1350	3,1	1,61
1670	1,7	0,58	1670	3,1	1,82
2270	1,7	0,64	2270	3,1	2,05
2840	1,7	0,70	2840	3,1	2,30
550	2,0	0,46	550	3,5	1,36
750	2,0	0,54	750	3,5	1,57
1030	2,0	0,61	1030	3,5	1,82
1350	2,0	0,70	1350	3,5	2,10
1670	2,0	0,79	1670	3,5	2,33
2270	2,0	0,88	2270	3,5	2,67
2840	2,0	0,98	2840	3,5	2,96
550	2,5	0,68	550	4,2	1,84
750	2,5	0,80	750	4,2	2,16
1030	2,5	0,93	1030	4,2	2,49
1350	2,5	1,04	1350	4,2	2,88
1670	2,5	1,16	1670	4,2	3,19
2270	2,5	1,31	2270	4,2	3,63
2840	2,5	1,45	2840	4,2	4,08

BIBLIOGRAFIA

- [1] MASSIMILLA L., BETTA V. e DELLA ROCCA C. *Sull'efflusso di sistemi fluidizzati: solido-gas attraverso fori di piccolo diametro*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., serie 4^a, vol. XXVI, Napoli, 1959. La Ricerca Scientifica, **29**, 1030 (1959).
- [2] MASSIMILLA L., BETTA V. e DELLA ROCCA C. *A Study of Streams of solids flowing from solid-gas fluidized beds*. A. I. Ch. E. Journal, **7**, 502 (1961).
- [3] MASSIMILLA L., VITAGLIANO G. e CHIANESE R. *Sull'efflusso di sistemi fluidizzati solido-gas da fori di grande diametro, luci a sezione quadrata e feritoie*. Rend. Acc. Sc. fis. e mat., serie 4^a, vol. XXVII, Napoli, 1960.
- [4] MASSIMILLA L. *Sull'efflusso di sistemi fluidizzati solido-gas da fori di piccolo e grande diametro*. La Chimica e l'Industria, **43**, 483 (1961).

Napoli, Istituto di Chimica Industriale dell'Università, novembre 1961.

RIASSUNTO. — In questa nota si riferisce intorno ad esperienze realizzate con l'intento di studiare l'efflusso di sistemi solido-liquido attraverso fori di piccolo diametro praticati in pareti di colonne di fluidizzazione.

Si è usato come solido sabbia silicea, fluidizzata con acqua in colonne di 90 e 192 mm di diametro. Le pressioni di efflusso variavano tra 500 e 3000 mm di H_2O .

SUMMARY. — This paper concern with experiments which have been carried out in order to study the efflux of solid-liquid systems through holes of small diameter drilled in the wall of fluidization columns.

Silica sand has been used as solid. It has been fluidized with water in columns 90 and 192 mm I.D. The efflux pressure ranged from 500 to 3000 mm H_2O .

La trattazione di Jouravski per le sezioni pluriconnesse

Nota del dott. ing. Michele Capurso

presentata dal socio corr. Elio Giangreco

(Adunanza del dì 2 dicembre 1961)

1) PREMESSE.

È noto come la determinazione delle tensioni tangenziali nelle sezioni trasversali di una trave soggetta alle sollecitazioni di flessione e taglio, urti contro notevoli difficoltà analitiche che privano i risultati di quella semplicità di espressione necessaria alla pratica tecnica. È quindi fortunata contingenza

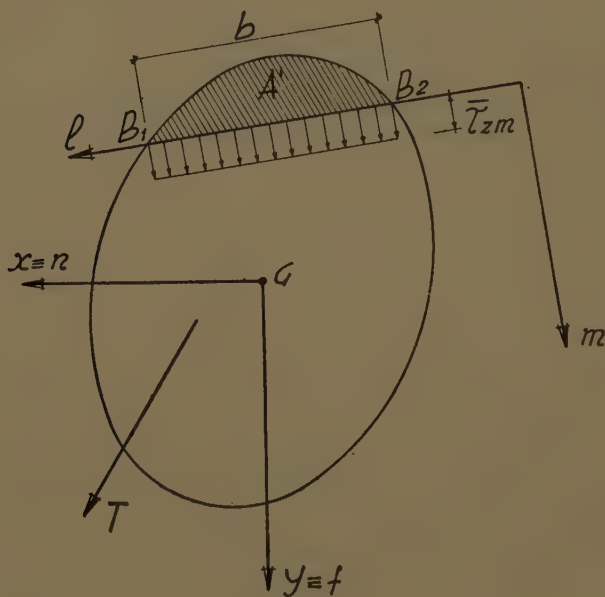


Fig. 1.

che tale problema sia suscettibile, di una trattazione approssimata, sviluppata dal JOURAVSKI, che restituisce al calcolo la necessaria maneggevolezza richiesta dai tecnici. Tale trattazione consiste, come è noto, nell'ammettere che le componenti τ_{zm} della tensione tangenziale lungo una generica corda B_1B_2 (Fig. 1), prese normalmente alla corda stessa, si possano confondere

con il loro valor medio $\bar{\tau}_{zm}$ la cui entità è facilmente valutabile con semplici considerazioni d'equilibrio in base alla nota formula:

$$(1) \quad \bar{\tau}_{zm} = - \frac{T_y S_x}{I_x b}$$

essendo T_y la componente dello sforzo tagliante T lungo l'asse di flessione $y \equiv f$, S_x il momento statico dell'area A' determinata dal contorno della sezione e dalla corda B_1-B_2 rispetto all'asse neutro baricentrico $x \equiv n$, ed I_x il momento di inerzia di tutta la sezione rispetto all'asse $x \equiv n$.

Tale trattazione, universalmente adottata in sede di calcolazione tecnica conduce a risultati più o meno vicini al vero in dipendenza delle corde prescelte per l'applicazione della (1).

Infatti per corde molto corte e normali nei punti estremi B_1, B_2 al contorno della sezione, come in genere accade nei profilati o nelle sezioni da

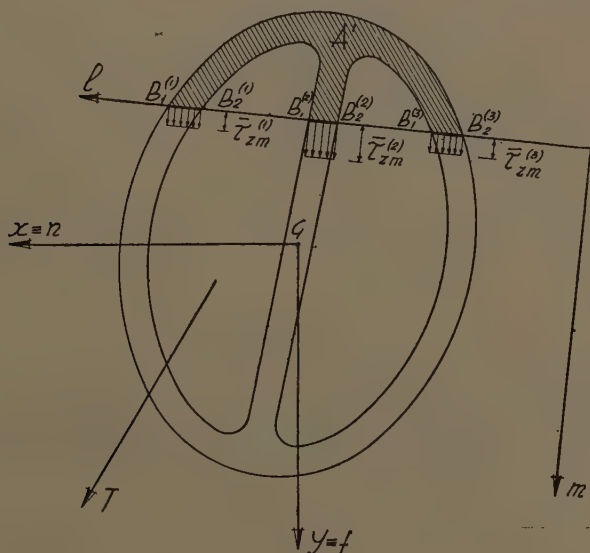


Fig. 2.

pondo scegliendo la corda coincidente con un generico spessore, l'ipotesi fondamentale risulta praticamente verificata, mentre può discostarsi notevolmente dalla realtà in molti altri casi.

Fra questi ultimi è interessante segnalare il caso molto frequente, in sede pratica, delle sezioni a connessione multipla (travate a cassone, profili alari, ecc.) nelle quali se si può ritenere lecita l'ipotesi della coincidenza della

$\tau_{zm}^{(i)}$ con il valor medio $\bar{\tau}_{zm}^{(i)}$ (Fig. 2) per ogni singolo segmento $B_1 - B_2$ tagliato

dalla corda 1 sulla sezione trasversale della trave, risulta viceversa sensibilmente errato in genere il ritenere:

$$(2) \quad \tau_{zm}^{(1)} = \tau_{zm}^{(2)} = \dots = \tau_{zm}^{(i)} = \dots = \bar{\tau}_{zm}$$

essendo $\bar{\tau}_{zm}$ il valor medio dalla componente della tensione tangenziale normale alla corda 1 desumibile dalla (1) relativamente all'equilibrio globale dell'intera aerea A' intersecata dalla corda 1 sulla sezione trasversale.

Il problema pertanto si presenta staticamente indeterminato, con un grado d'iperstaticità interno pari al numero n delle connessioni meno uno.

È infatti possibile la determinazione della legge di distribuzione delle $\tau_{zm}^{(i)}$ con sole considerazioni di equilibrio, non appena risultino assegnate i valori

di tali componenti su $n-1$ corde parziali $B_1 - B_2$ scelte in maniera tale che, praticando un taglio in corrispondenza di ciascuna di esse, la sezione resti a connessione semplice.

È necessaria pertanto l'introduzione di $n-1$ equazioni di congruenza atte a determinare in maniera univoca la soluzione del problema.

A tal uopo si procede nel seguito partendo dalla soluzione rigorosa, in termini di componenti dello spostamento, del problema dell'equilibrio elastico del solido trave nel caso della sollecitazione di flessione e taglio e si definiscono le ulteriori condizioni di congruenza atte a rendere determinato il problema, nel caso del solido a sezione pluriconnessa, quando si ricerchi la soluzione del problema elastico operando direttamente sulle componenti speciali di tensione.

2) LA SOLUZIONE RIGOROSA DEL D. S. VENANT.

Con riferimento al solido di sezione generica si assuma come origine 0 del riferimento cartesiano $0 \ x \ y \ z$ il baricentro della base $z=0$; l'asse z sia

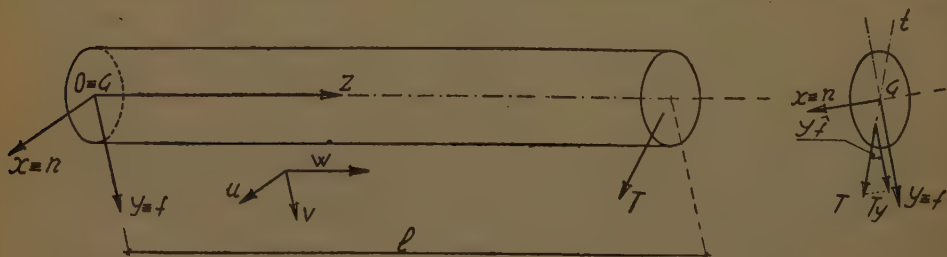


Fig. 3

coincidente (Fig. 3) con l'asse geometrico del solido e gli assi x ed y generici, purchè normali all'asse z .

Detti u, v, w , le componenti dello spostamento di un generico punto P

di tale solido, la soluzione del problema dell'equilibrio elastico resta individuata, nel caso della sollecitazione di flessione e taglio, dalle tre funzioni:

$$\begin{aligned} u &= T_y \frac{l-z}{m E I_x} x y \\ (3) \quad v &= T_y \frac{l-z}{2 m E I_x} (m z^2 - x^2 + y^2) + T_y \frac{z^3}{3 E I_x} \\ w &= - T_y \frac{l-z/2}{E I_x} y z + \frac{T_y}{E I_x} \varphi(x y). \end{aligned}$$

Tali funzioni verificano infatti le condizioni del D. S. VENAINT:

$$(4) \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

e verificano inoltre due delle tre equazioni indefinite d'equilibrio che con la posizione (4) risultano:

$$\begin{aligned} (5)_1 \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

Il soddisfacimento della terza equazione indefinita d'equilibrio:

$$(5)_2 \quad \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = 0$$

vincola infine la funzione $\varphi(x y)$ al soddisfacimento nel campo delimitato dal contorno della sezione trasversale della condizione:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = - 2y.$$

Alla terna di componenti dello spostamento (3) corrisponde pertanto un regime tensionale definito dalle seguenti componenti speciali di tensione¹⁾:

¹⁾ Si verifica con semplicità che la risultante delle (7) sulla base $z = 1$ (fig. 3) corrisponde ad una forma T la cui intensità risulta essere:

$$T = T_y \sqrt{1 + \left(\frac{I_{xy}}{I_y} \right)^2}$$

e la cui inclinazione sull'asse delle y resta definita dalla relazione:

$$\operatorname{tg} \hat{y} t = \frac{I_{xy}}{I_x}.$$

$$(7) \quad \begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{m}{2(m+1)} \frac{T_y}{I_x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{xy}{m} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{m}{2(m+1)} \frac{T_y}{I_x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{y^2 - x^2}{2m} \right) \\ \sigma_z &= -T_y \frac{l-z}{I_x} y \end{aligned}$$

e l'equazione ai limiti:

$$(8) \quad \tau_{xx} \alpha_x + \tau_{xy} \alpha_y = 0$$

conduce pertanto alla condizione di frontiera:

$$(9) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{m} \left(xy \frac{dx}{dn} + \frac{y^2 - x^2}{2} \frac{dy}{dn} \right).$$

Il problema della determinazione del regime tensionale definito dalle (7) è ricondotto pertanto dal D. S. VENANT, alla ricerca di una funzione $\varphi(x, y)$ soddisfacente nel campo la condizione (6) e di cui è assegnato al contorno il valore della derivata normale (9).

Il soddisfacimento al contorno della equazione ai limiti (8) e pertanto della relazione (9) vincola la scelta dell'asse x del riferimento cartesiano.

Applicando infatti la trasformazione di GAUSS si ha:

$$(10) \quad \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \int_A \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) dA$$

e pertanto per la (6) è necessario che risulti:

$$(11) \quad \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = -2 \int_A y dA.$$

D'altronde il verificarsi della condizione (9) richiede che sia:

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \left(xy \frac{dx}{dn} + \frac{y^2 - x^2}{2} \frac{dy}{dn} \right) ds$$

e pertanto tenendo presenti le relazioni:

$$\frac{dx}{dn} = \frac{dy}{ds} \quad \frac{dy}{dn} = -\frac{dx}{ds}$$

e la trasformazione di GAUSS:

$$(12) \quad \sum_{i=1}^n \int_{G_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \frac{2}{m} \int_A y dA$$

La (12) sarebbe compatibile con la (11), per una scelta generica dell'asse x della terna di riferimento, solo per $m = -1$, il che inficierebbe la generalità dei risultati.

È necessario pertanto che si abbia, per il soddisfacimento contemporaneo dell'equazione indefinita d'equilibrio (5)₂ e dell'equazione ai limiti (8):

$$(13) \quad \int_A y dA = 0$$

Il che risulta verificato solo se l'asse x appartiene al fascio di rette giacenti nel piano della sezione trasversale e aventi come polo il baricentro G di quest'ultima.

Solo in tal caso infatti la (6) e la (9) sono condizioni sufficienti per la esistenza e l'unicità di una funzione che le soddisfi.

Per quanto riguarda l'asse y nessuna limitazione è imposta alla sua scelta che pertanto può essere del tutto arbitraria.

Resta da osservare infine che la funzione $\varphi(x, y)$ dovrà necessariamente essere una funzione monodroma nel campo delimitato dal contorno della sezione trasversale, discendendo tale proprietà dalla monodromia della componente dello spostamento w .

Si dovrà quindi avere per ogni curva chiusa interamente contenuta nel campo:

$$(14) \quad \int_C \varphi ds = \int_C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) ds = 0$$

e pertanto tenendo presente le (7)

$$(15) \quad \int_C \left(\tau_{xx} \frac{dx}{ds} + \tau_{xy} \frac{dy}{ds} \right) ds + \frac{2 GT_y}{m EI_x} \int_C \left(xy \frac{dx}{ds} + \frac{y^2 - x^2}{2} \frac{dy}{ds} \right) ds = 0.$$

Si ottiene così, applicando la trasformazione di GAUSS al secondo termine della (15):

$$(16) \quad \int_C \tau_s ds = \frac{1}{m+1} \frac{T_y}{I_x} \int_{A_c} x dA$$

essendosi indicato con A_c l'area racchiusa dalla curva C .

La (16) risulta valida per ogni linea chiusa anche se racchiudente una cavità interna.

In particolare la circuitazione estesa a tutti i contorni esterni ed interni della sezione fornirà:

$$(17) \quad \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \tau_s ds = \frac{1}{m+1} \frac{T_y}{I_x} \int_A x dA$$

e peraltro per il teorema di STOKES:

$$(18) \quad \int_A \text{rot } \tau_s dA = \frac{1}{m+1} \frac{T_y}{I_x} \int_A x dA.$$

Essendosi quindi definita quale sollecitazione semplice di flessione e taglio quella corrispondente alla terna di funzioni (3) riferite a una terna cartesiana con origine 0 nel baricentro G della base $z=0$, tale sollecitazione resterà definita dal punto di vista tensionale dalla condizione:

$$(19) \quad \int_A \text{rot } \tau_s dA = 0$$

che postula l'annullarsi del valor medio nel campo del vettore rotazione:

$$(20) \quad \text{rot } \tau_s = \frac{T_y x}{(m+1) I_x}$$

3) L'ESTENSIONE DEL METODO DI JOURAVSKI ALLE SEZIONI PLURICONNESSE

Con riferimento al caso della trave a sezione trasversale pluriconnessa (fig. 4) si vuole procedere al calcolo del regime tensionale nella sezione avvalendosi del procedimento di JOURAVSKI modificato.

Avendo scelto l'asse x coincidente con l'asse neutro n corrispondente, nella polarità definita dall'ellisse centrale d'inerzia della sezione trasversale,

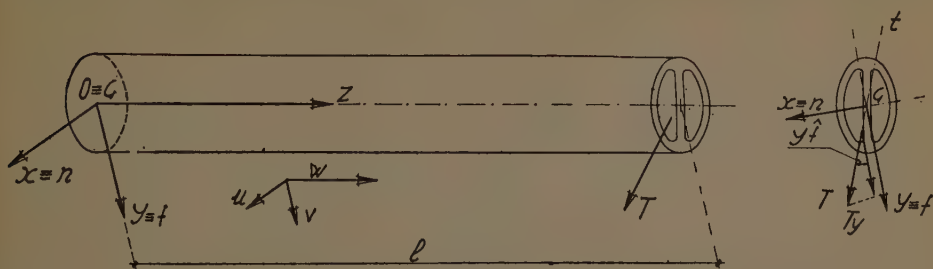


Fig. 4.

alla direzione coniugata rispetto alla retta d'azione della forza T esterna si ha per le tensioni normali:

$$(21) \quad \sigma_z = -T_y \frac{l-z}{I_w} y.$$

S'indichino con τ_1 e τ_2 il valore delle tensioni tangenziali in corrispondenza delle corde 1-1' e 2-2' (Fig. 5). Tali valori vengono assunti quali incognite iperstatiche del problema.

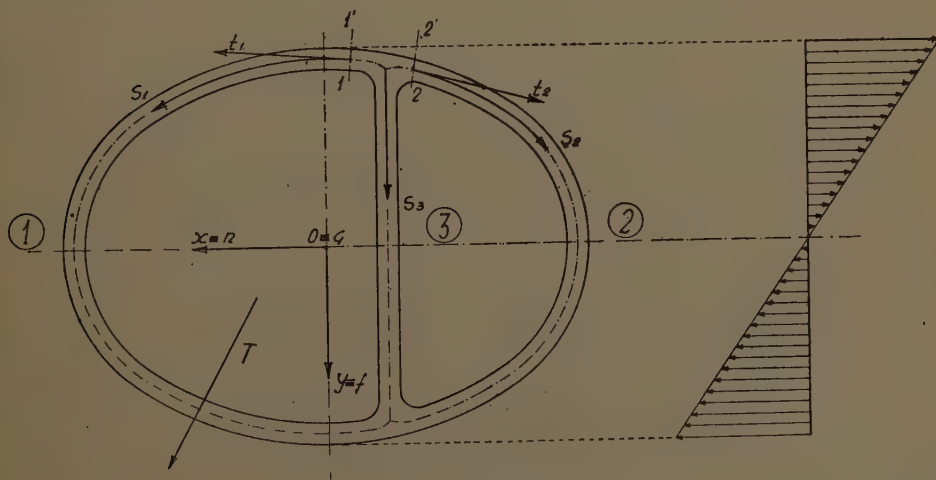


Fig. 5.

Il valore della tensione tangenziale nel generico punto di ascissa curvilinea s_1 risulta essere:

$$(22) \quad \tau(s_1) = \frac{\tau_1 \delta_1}{\delta(s_1)} - \frac{T_y S_w(s_1)}{I_w \delta(s_1)}$$

Identicamente, nel generico punto di ascissa curvilinea s_2 :

$$(23) \quad \tau(s_2) = \frac{\tau_2 \delta_2}{\delta(s_2)} - \frac{T_y S_x(s_2)}{I_x \delta(s_2)}$$

Ed infine per il generico punto di ascissa s_3 :

$$(24) \quad \tau(s_3) = \frac{\tau_1 \delta_1 + \tau_2 \delta_2}{\delta(s_3)} - \frac{T_y S_x(s_3)}{I_x \delta(s_3)}$$

Affinchè la distribuzione di tensioni risultante dalla (22), (23) e (24) dia luogo a deformazioni congruenti del sistema elastico è necessario che risulti verificata la (16) per qualsiasi linea chiusa interamente contenuta nel campo delimitato dai contorni della sezione.

Applicando pertanto tale condizione ai due circuiti 1+3 e 2+3 si traggono le due equazioni di congruenza:

$$(25) \quad \begin{aligned} \int_{l_1} \tau(s_1) ds_1 - \int_{l_3} \tau(s_3) ds_3 &= \frac{1}{m+1} \frac{T_y S_{1y}}{I_x} \\ \int_{l_3} \tau(s_3) ds_3 - \int_{l_2} \tau(s_2) ds_2 &= \frac{1}{m+1} \frac{T_y S_{2y}}{I_x} \end{aligned}$$

ove S_{1y} e S_{2y} indicano rispettivamente i momenti statici rispetto all'asse y delle aree racchiuse dai circuiti 1+2 e 2+3.

Tenendo presenti le relazioni (22) (23) e (24), le (25) possono infine scriversi:

$$(26) \quad \begin{aligned} \tau_1 \delta_1 \left[\int_{l_1} \frac{1}{\delta(s_1)} ds_1 - \int_{l_3} \frac{1}{\delta(s_3)} ds_3 \right] - \tau_2 \delta_2 \int_{l_3} \frac{1}{\delta(s_3)} ds_3 &= \\ = \frac{T_y}{I_x} \left[\frac{S_{1y}}{m+1} + \int_{l_1} \frac{S_x(s_1)}{\delta(s_1)} ds_1 - \int_{l_3} \frac{S_x(s_3)}{\delta(s_3)} ds_3 \right]; \\ \tau_1 \delta_1 \int_{l_3} \frac{1}{\delta(s_3)} ds_3 + \tau_2 \delta_2 \left[\int_{l_3} \frac{1}{\delta(s_3)} ds_3 - \int_{l_2} \frac{1}{\delta(s_2)} ds_2 \right] &= \\ = \frac{T_y}{I_x} \left[\frac{S_{2y}}{m+1} + \int_{l_3} \frac{S_x(s_3)}{\delta(s_3)} ds_3 - \int_{l_2} \frac{S_x(s_2)}{\delta(s_2)} ds_2 \right]. \end{aligned}$$

Ricavati i valori delle incognite iperstatiche τ_1 e τ_2 resta definita tramite le (22) (23) e (24) la distribuzione delle tensioni tangenziali τ_z , che peraltro risulta essere l'unica distribuzione congruente fra le ∞^2 distribuzioni equilibrate possibili.

4) UN'APPLICAZIONE NUMERICA.

Con riferimento alla sezione da ponte di Fig. 6 sollecitata a flessione e taglio con asse di flessione coincidente con l'asse principale d'inerzia y si sono calcolate le tensioni tangenziali seguendo il procedimento usuale, che presuppone la loro eguaglianza sulle tre nervature, e secondo il procedimento consigliato nella presente memoria.

Nella tabella seguente sono riportati tali valori in corrispondenza di varie corde della sezione per un valore generico del taglio T in t .

TENSIONI TANGENZIALI (t/cm^2)

Corda	Metodo usuale	Metodo proposto	
		$m = 10$	$m = \infty$
0	1,189 T	1,449 T	1,389 T
1	0,990 T	1,250 T	1,190 T
1'	0,424 T	0,554 T	0,524 T
2	— 0,849 T	— 0,718 T	— 0,749 T
2'	— 0,990 T	— 0,860 T	— 0,890 T
0'	— 1,189 T	— 1,059 T	— 1,089 T
$\tau_0/\tau_{0'}$	1,000	1,368	1,275

Si è preso in considerazione il caso $m=\infty$ per tener conto della possibilità di esistenza di traversi che impediscano la deformazione trasversale della sezione.

In Fig. 6 è riportato l'andamento delle tensioni tangenziali secondo il calcolo usuale (curva tratteggiata) e secondo il calcolo modificato per $m=10$ (curva a tratto pieno).

Si deduce facilmente da tali curve come il calcolo usuale sia a sfavore di statica essendo il valore massimo della tensione tangenziale secondo il

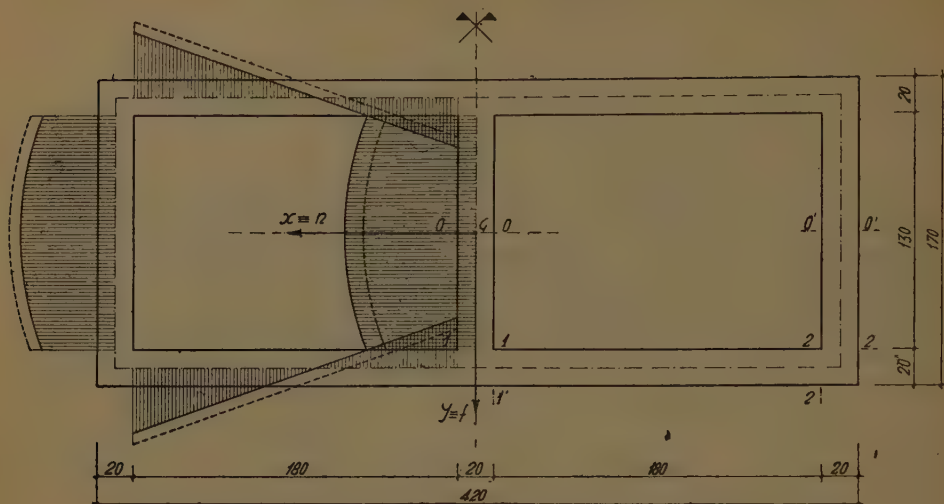


Fig. 6.

calcolo modificato notevolmente più alto di quello che si desume col calcolo usuale.

Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni.

Istituto di Tecnica delle Costruzioni, settembre 1961.

BIBLIOGRAFIA

S. TIMOSHENKO. *Theorie de l'élasticité*. Paris, Beranger, 1940.

V. FRANCIOSI. *Scienza delle Costruzioni*. Napoli, Liguori, 1958.

RIASSUNTO. — L'Autore risolve il problema della determinazione delle tensioni tangenziali nelle travi a sezione trasversale pluriconnessa soggette a flessione e taglio, estendendo a tali sezioni la possibilità d'applicazione del metodo di Jouravski.

Si dimostra la necessità d'introdurre equazioni di congruenza per rendere il problema staticamente determinato. Si riporta infine un'applicazione numerica.

SUMMARY. — The Author solves the problem of determining the shear stresses in beams with a multiply-connected cross-section, under flexure and shear, by means of an extension of Jouravski's method.

The necessary number of equations is obtained by introducing compatibility equations as well.

A numerical example is developed.

Il «Teorema fondamentale del calcolo a rottura» per carichi ripetuti in sollecitazione composta

*Nota del dott. ing. Renato Sparacio
presentata dal socio V. Franciosi*

(Adunanza del dì 2 dicembre 1961)

1. - *Definizione dei coefficienti s' , γ' , ψ' .*

Enunciato e dimostrazione del «teorema fondamentale» in presenza di «M» ed «N».

Si consideri una struttura monodimensionale piana, n volte iperstatica, sottoposta a più schemi di carico variabili tra valori estremi assegnati. Si indichi con \mathfrak{M} \mathfrak{N} rispettivamente, momento flettente e sforzo normale provocati nella sezione generica da una fissata condizione di carico, calcolati nell'ipotesi che la struttura sopporti tale carico con comportamento perfettamente elastico.

Si indichi invece con M , N momento e sforzo normale effettivi provocati da un particolare schema di carico in una certa fase del ciclo: tali valori potranno pensarsi ottenuti dalla somma degli \mathfrak{M} ed \mathfrak{N} sopra definiti, ed una coppia di valori m , n del momento e dello sforzo normale provocati nella stessa sezione dalle distorsioni plastiche indotte sulla struttura da tutti gli schemi di carico precedenti compreso quello attualmente agente. Il momento m e lo sforzo normale n , definiti dalla relazione

$$m = M - \mathfrak{M}$$

$$n = N - \mathfrak{N}$$

rappresentano momento e sforzo normale residui nella sezione generica dopo la rimozione dello schema di carico attualmente agente, ove tale scarico avvenga senza indurre ulteriori distorsioni. Si osservi inoltre che, per definizione, una distribuzione m , n lungo la struttura è in equilibrio sulla stessa in assenza di carichi esterni.

Nel piano N , M , il punto P (N , M) sarà, per ciascuna sezione, non esterno alla curva chiusa continua che ne rappresenta la frontiera di snervamento.

In una fase qualunque del ciclo di carico sia m , n la distribuzione di caratteristiche della sollecitazione provocata dalle distorsioni plastiche. Ogni

variazione dei carichi esterni provocherà nuove distorsioni plastiche e quindi variazioni nel diagramma degli m e degli n , a meno che l'attuale distribuzione m , n non sia tale da garantire che in nessuna sezione e per nessuna condizione di carico il punto $P(m + \sigma n + \sigma n)$ sia esterno al dominio di snervamento. In tali condizioni, infatti, i successivi cicli di carico comporteranno unicamente variazioni elastiche degli M ed N e la struttura non sarà più soggetta a scorrimenti plastici.

Se esiste una distribuzione m^ , n^* avente tale proprietà, è dimostrato che le successive distorsioni modificheranno gli attuali valori degli m ed n fino a giungere alla distribuzione m^* , n^* o ad altra avente le stesse proprietà.*

Tale comportamento, che il PRAGER per primo ha chiamato « shake down » e che consiste nell'adattarsi della struttura alla successiva azione di carichi variabili ripetuti eccedenti i limiti elastici, fino alla completa scomparsa di ulteriori incrementi delle deformazioni plastiche, è sufficiente a far escludere per la struttura il pericolo di collasso. Ciò accettando la definizione dell'HODGE secondo il quale la condizione necessaria e sufficiente per la sicurezza di una struttura è quella per cui tutte le possibili condizioni di carico comportino, complessivamente, solo un ammontare finito di scorrimenti plastici.

Se invece non esiste, per i carichi e la struttura assegnati, una distribuzione m^* , n^* , non è possibile la stabilizzazione. Ogni nuovo ciclo di carico provocherà nuove distorsioni e quindi nuovi scorrimenti plastici, e ancora variazioni nell'energia vincolata, inducendo deformazioni permanenti sempre più grandi nelle sezioni plasticizzate.

Ad ogni ciclo di carichi corrisponderà perciò una variazione $\Delta \bar{L}$ dell'energia vincolata \bar{L} , e, dopo un numero di cicli grande quanto occorre, e riferendosi ad un ulteriore ciclo completo di carichi, non potendo \bar{L} crescere indefinitamente, nè diventare negativa, sarà necessariamente $\Delta \bar{L} = 0$, ciò che può verificarsi solo se le distorsioni indotte dai carichi nell'intervallo considerato costituiscono un insieme atensionale di distorsioni di Volterra (sono cioè connesse ad un moto cinematico della struttura): pertanto le configurazioni della struttura precedente e seguente un ciclo completo di carichi differiscono esclusivamente di un moto rigido. L'effetto di ogni ciclo di carichi, in corrispondenza del quale si abbia $\Delta \bar{L} = 0$ può quindi considerarsi come un atto di moto rigido e il susseguirsi di questi atti di moto costituisce per la struttura un progressivo e irreparabile procedere verso la rovina: è ciò che NEAL ha denominato « incremental collapse ».

Per una struttura assegnata, e dato un sistema di forza F varianti ciascuna indipendentemente dalle altre tra valori estremi prefissati, un numero s' si definisce *coefficiente di sicurezza al collasso incrementale* se esiste una distribuzione di momenti flettenti \bar{m}^* e sforzi normali \bar{n}^* , dovuti a sole distorsioni, e cioè in equilibrio con carichi tutti nulli, tale da garantire che in nessuna sezione il punto $P(N, M) = P(\bar{m}^* + s'\varpi, \bar{n}^* + s'\varpi)$ sia esterno al dominio di snervamento per ciascuna delle coppie di valori ϖ , ϖ che i carichi possono indurre nella sezione, e tale inoltre che, in un numero di sezioni K pari al numero degli snodi sufficienti a trasformare la struttura, o parte di essa, in un meccanismo cinematico, esista una coppia di valori $s'\varpi^{(k)}$, $s'\varpi^{(k)}$ in grado di portare il punto $P(N, M) = P(\bar{n}^*_{k} + s'\varpi^{(k)}$, $\bar{m}^*_{k} + s'\varpi^{(k)})$ sulla frontiera di plasticizzazione, col conseguente raggiungimento nelle sezioni K , di uno stato tensionale legato dalla legge dello scorrimento plastico alle deformazioni definite dal meccanismo stesso.

È evidente, da ciò che precede, che il complesso di carichi $s'F$ costituisce il « carico di collasso incrementale » dovendosi intendere per tale il valore critico al di sopra del quale avviene il collasso incrementale.

Il meccanismo cinematico, corrispondente agli snodi K , si definisce « meccanismo di collasso incrementale »; la struttura sarebbe trasformata realmente in meccanismo ove gli snodi si formassero contemporaneamente, cioè se tutte le condizioni suddette legate alla distribuzione \bar{m}^* , \bar{n}^* , fossero verificate in presenza di un solo schema di carico, che rappresenterebbe, in questo caso, moltiplicato per s' , il carico di collasso statico. In regime di collasso incrementale, invece, il meccanismo non è mai realmente esistente: esso è definito attraverso il moto rigido subito dalla struttura in corrispondenza di un ciclo completo di carichi.

Un numero ψ' si definisce *moltiplicatore staticamente ammissibile* di un sistema di forze F agenti sulla struttura e varianti ciascuna indipendentemente dalle altre tra valori estremi prefissati, se esiste almeno una distribuzione di momenti m^* e sforzi normali n^* dovuti a sole distorsioni, e cioè in equilibrio con carichi tutti nulli, tale da fare rispettare in ogni sezione, e per tutte le condizioni di carico, la condizione di placizzazione; cioè tale che per ogni sezione il punto $P(N, M) = P(n^* + \psi'\varpi, m^* + \psi'\varpi)$ non sia ubicato fuori del dominio di snervamento per ciascuna delle coppie di valori ϖ , ϖ che le condizioni di carico assegnate determinano nella sezione.

Un numero γ' si definisce *moltiplicatore cinematicamente sufficiente* dei carichi F se esiste una distribuzione di momenti \bar{m} e di sforzi normali \bar{n} dovuti a sole distorsioni e cioè in equilibrio con carichi nulli, tale

che, almeno per un numero di sezioni K pari al numero degli snodi sufficienti a trasformare la struttura, o parte di essa, in un meccanismo cinematico, esista una coppia di valori $\gamma' \mathfrak{M}^{(k)}$, $\gamma' \mathfrak{N}^{(k)}$ in grado di portare il punto $P(N, M) = P(m_k + \gamma' \mathfrak{M}^{(k)}; n_k + \gamma' \mathfrak{N}^{(k)})$ sul dominio di plasticizzazione, col conseguente raggiungimento nelle sezioni K , di uno stato tensionale legato, dalla legge dello scorrimento plastico, alle deformazioni definite dal meccanismo stesso.

Il teorema fondamentale del calcolo a rottura per carichi variabili ripetuti può enunciarsi come segue:

« Un moltiplicatore γ' cinematicamente sufficiente non può essere inferiore ad un moltiplicatore ψ' staticamente ammissibile:

$$\psi' \leq \gamma'$$

Nelle sezioni K ove sono ubicate le cerniere del meccanismo corrispondente ad un generico γ' si ha:

$$(1) \quad \bar{m}_k + \gamma' \mathfrak{M}^{(k)} = M_{0N}^{(k)}; \quad \bar{n}_k + \gamma' \mathfrak{N}^{(k)} = N_{0M}^{(k)}$$

essendo $M_{0N}^{(k)}$ e $N_{0M}^{(k)}$ una coppia di caratteristiche della sollecitazione situate sulla frontiera del dominio di snervamento relativo alla sezione K , ed $\mathfrak{M}^{(k)}$ e $\mathfrak{N}^{(k)}$ rispettivamente il momento flettente e lo sforzo normale dovuti, nella sezione K , ad una delle assegnate condizioni di carico.

Si assuma come deformazione virtuale quella consentita dal grado di labilità indotto nella struttura degli snodi plastici relativi allo stesso coefficiente γ' , e definita attraverso le rotazioni relative \mathfrak{P}_k tra le facce terminali dei tronchi connessi dagli snodi plastici, e le distanze h_k dei centri di dette rotazioni relative dai baricentri delle sezioni stesse.

Poichè \bar{m} ed \bar{n} costituiscono una distribuzione di sollecitazioni in equilibrio con carichi tutti nulli, e poichè il complesso delle \mathfrak{P}_k costituisce un sistema di spostamenti compatibili, deve essere

$$\sum_k (\bar{m}_k + \bar{n}_k \cdot h_k) \mathfrak{P}_k = 0$$

cioè

$$\sum_k \left[M_{0N}^{(k)} - \gamma' \mathfrak{M}^{(k)} + h_k N_{0M}^{(k)} - \gamma' h_k \mathfrak{N}^{(k)} \right] \mathfrak{P}_k = 0$$

che si può porre nella forma:

$$(2) \quad \gamma' \sum_k \left[\mathfrak{M}^{(k)} + h_k \mathfrak{N}^{(k)} \right] \mathfrak{P}_k = \sum_k \left[M_{0N}^{(k)} + h_k N_{0M}^{(k)} \right] \mathfrak{P}_k.$$

Si consideri ora una distribuzione di momenti m^* e di sforzi normali n^* dovuti a sole distorsioni, in corrispondenza della quale sia determinato un generico coefficiente ψ^* .

Nelle stesse sezioni K prima considerate e con riferimento alle stesse condizioni di carico, potrà scriversi

$$m_k^* + \psi' \mathfrak{M}^{(k)} = M_{\psi'}^{(k)}$$

$$n_k^* + \psi' \mathfrak{N}^{(k)} = N_{\psi'}^{(k)}$$

avendo indicato con $M_{\psi'}^{(k)}$ e $N_{\psi'}^{(k)}$ una coppia di valori M, N corrispondenti ad un punto non esterno al dominio relativo alla sezione (K). Anche per la distribuzione m^* , n^* deve essere

$$\Sigma_k (m_k^* + h_k n_k^*) \mathfrak{P}_k = 0$$

e quindi si può scrivere, per le caratteristiche $\mathfrak{M}^{(k)}$, $\mathfrak{N}^{(k)}$ e $M_{\psi'}^{(k)}$, $N_{\psi'}^{(k)}$ una relazione analoga alla (2)

$$(3) \quad \psi' \Sigma [\mathfrak{M}^{(k)} + h_k \mathfrak{N}^{(k)}] \mathfrak{P}_k = \Sigma [M_{\psi'}^{(k)} + h_k N_{\psi'}^{(k)}] \mathfrak{P}_k$$

Sottraendo la (3) dalla (2) si può scrivere:

$$(4) \quad (\gamma' - \psi') \Sigma [\mathfrak{M}^{(k)} + h_k \mathfrak{N}^{(k)}] \mathfrak{P}_k = \\ = \Sigma [(M_{0N}^{(k)} + h_k N_{0M}^{(k)}) - (M_{\psi'}^{(k)} + h_k N_{\psi'}^{(k)})] \mathfrak{P}_k.$$

Ma la (4) può essere verificata solo per $\gamma' \geq \psi'$

Si supponga, infatti, per assurdo

$$(5) \quad \psi' > \gamma'$$

Dalla (4), essendo

$$\Sigma [\mathfrak{M}^{(k)} + h_k \mathfrak{N}^{(k)}] \mathfrak{P}_k < 0$$

come è facile verificare con la (2), si ricava, per la (5)

$$(6) \quad \Sigma [(M_{0N}^{(k)} + h_k N_{0M}^{(k)}) - (M_{\psi'}^{(k)} + h_k N_{\psi'}^{(k)})] \mathfrak{P}_k > 0.$$

Ma il primo membro della (6) rappresenta una sommatoria di tutti i termini negativi, come dimostrato in [1] dal Prof. FRANCIOSI, e quindi la (5) è un assurdo.

2. - *Dimostrazione del « teorema fondamentale » per un continuo tridimensionale in cui lo stato tensionale sia definito a mezzo di componenti generalizzate della tensione.*

Per un continuo tridimensionale in regime elastoplastico siano $Q_1 \dots Q_n$ le componenti generalizzate della tensione ($n \leq 6$) e $q_1 \dots q_n$ le corrispondenti componenti generalizzate della deformazione plastica.

Con $Q^{(e)}_1 \dots Q^{(e)}_n$ si indicano le componenti generalizzate della tensione indotte nel continuo tridimensionale da una fissata condizione di carico, nell'ipotesi che il comportamento del materiale sia perfettamente e indefinitamente elastico.

Lo stato tensionale che occorre sovrapporre a quello definito dalle $Q^{(e)}_i$ per ottenere la distribuzione, reale, definita dalle Q_i , è rappresentato da un insieme di caratteristiche che indicheremo con $Q^{(o)}_i$, e che, per definizione, risulta in equilibrio con carichi esterni nulli e rappresenta lo stato di coazione indotto dalle distorsioni di origine plastica. In termini geometrici, nell' S_6 di coordinate Q_i , lo stato tensionale indotto da una condizione di carico generica, sarà rappresentato da un vettore \vec{Q} , di componenti $Q_1 \dots Q_6$, che può considerarsi risultante della somma di un vettore $\vec{Q}^{(e)}$, di componenti $Q^{(e)}_1 \dots Q^{(e)}_6$ e di un vettore $\vec{Q}^{(o)}$ di componenti $Q^{(o)}_1 \dots Q^{(o)}_6$:

$$\vec{Q}^{(o)} = \vec{Q} - \vec{Q}^{(e)}.$$

La condizione di plasticizzazione in un punto — secondo uno qualsiasi dei criteri — è espressa da una relazione tra le componenti di tensione:

$$\Phi(Q_1 \dots Q_6)_{\pm}^w = 0$$

che rappresenta una superficie chiusa continua contenente l'origine (frontiera di snervamento).

Dato un sistema di carichi esterni varianti ciascuno indipendentemente dagli altri tra valori estremi prefissati, un numero s' si definisce *coefficiente di sicurezza al collasso incrementale* se esiste una distribuzione di sforzi $Q^{(o)}_i$ in equilibrio con carichi tutti nulli tale da garantire che in nessuna sezione, e per nessuna delle possibili condizioni di carico, il vettore

$$\vec{Q} = \vec{Q}^{(o)} + s' \vec{Q}^{(e)} \quad (7)$$

abbia l'estremo esterno al dominio di plasticizzazione, e tale inoltre che, indicando con $\vec{\Sigma q}$ un campo di deformazioni plastiche tali da rendere possibili degli spostamenti congruenti con i vincoli ma peraltro arbitrari (meccanismo di collasso), esista, per ciascuno dei vettori \vec{q} , il corrispondente $\vec{Q} = \vec{Q}^{(o)} + s^2 \vec{Q}^{(e)}$ dovuto ad una qualsiasi delle possibili condizioni di carico del sistema, avente estremo sulla frontiera di snervamento e legato a \vec{q} dalla legge dello scorrimento plastico:

$$q_i = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \quad (\text{con } \lambda > 0)$$

Un numero ψ' si definisce « *moltiplicatore staticamente ammissibile* » di un insieme di carichi variabili tra valori estremi prefissati se esiste almeno una distribuzione di sforzi $Q^{(o)}_i$ in equilibrio con carichi tutti nulli tale da garantire che in nessuna sezione e per nessuna delle possibili condizioni di carico, il vettore

$$\vec{Q} = \vec{Q}^{(o)} + \psi' \vec{Q}^{(e)}$$

abbia l'estremo esterno al dominio di plasticizzazione.

Un numero γ' si definisce *moltiplicatore cinematicamente sufficiente* di un sistema di carichi variabili tra valori estremi prefissati, se esiste una distribuzione di sforzi $Q^{(o)}_i$ tale che, indicando con $\vec{\Sigma q}$ un campo di deformazioni plastiche che rendono possibili degli spostamenti congruenti con i vincoli ma peraltro arbitrari (meccanismo cinematico) esista, per ciascuno dei vettori \vec{q} , il corrispondente $\vec{Q} = \vec{Q}^{(o)} + \gamma' \vec{Q}^{(e)}$ dovuto ad una qualsiasi delle possibili condizioni di carico del sistema, avente estremo sulla frontiera di snervamento e legato a \vec{q} della legge dello scorrimento plastico

$$q_i = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \quad (\text{con } \lambda > 0)$$

Si sia determinato un coefficiente γ' legato, secondo la precedente definizione, ad un campo $\vec{\Sigma q}$ di deformazioni plastiche costituenti un moto rigido compatibile con i vincoli. (Il campo $\vec{\Sigma q}$ costituisce un « *insieme atensionale di distorsioni plastiche* »). Per ciascun vettore \vec{q} si ha un vettore associato \vec{Q} dato dalla relazione

$$\vec{Q} = \vec{Q}^{(o)} + \gamma' \vec{Q}^{(e)}$$

e caratterizzato per la definizione di γ' , dall'avere il suo estremo sulla frontiera di snervamento.

Poichè il campo dei $\vec{Q}^{(e)}$ costituisce un insieme di sollecitazioni in equilibrio con carichi nulli, e assumendo il già definito *meccanismo* relativo al campo $\Sigma \vec{q}$ come un sistema di spostamenti virtuali, può scriversi, per il principio dei lavori virtuali

$$(7) \quad \Sigma (\vec{Q}^{(e)} \times \vec{q}) = \Sigma (\vec{Q} - \gamma' \vec{Q}^{(e)}) \times \vec{q} = 0$$

cioè

$$(8) \quad \gamma' \Sigma (\vec{Q}^{(e)} \times \vec{q}) = \Sigma (\vec{Q} \times \vec{q})$$

Sia ψ' un qualsiasi coefficiente staticamente ammissibile.

Per una certa distribuzione di sollecitazioni definita da un insieme di vettori $\vec{Q}^{(e)}$ in equilibrio con carichi esterni nulli, sarà verificata per ciascun vettore

$$(9) \quad \vec{Q} = \vec{Q}^{(e)} + \psi' \vec{Q}^{(e)}$$

la condizione di plasticizzazione. In particolare, tale condizione sarà verificata in corrispondenza degli stessi vettori $\vec{Q}^{(e)}$ che compaiono nelle (8). Applicando il principio dei lavori virtuali al campo dei $\vec{Q}^{(e)}$ assumendo quali spostamenti virtuali quelli stessi legati al campo $\Sigma \vec{q}$ ed utilizzati per la (7), si ottiene una relazione analoga alla (8):

$$(10) \quad \psi' \Sigma (\vec{Q}^{(e)} \times \vec{q}) = \Sigma (\vec{Q}^* \times \vec{q})$$

dove si è indicato con asterisco il vettore generico \vec{Q}^* definito dalla (9) per porre in rilievo che esso rappresenta uno stato tensionale che non supera la condizione di plasticizzazione.

Dalle (8) e (10), ricordando che, per il principio del massimo lavoro plastico

$$\vec{Q} \times \vec{q} \geq \vec{Q}^* \times \vec{q}$$

essendo \vec{Q} il vettore rappresentativo dello stato tensionale corrispondente alla deformazione \vec{q} , si ricava

$$\gamma' \geq \psi'.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] V. FRANCIOSI. *Il teorema fondamentale del calcolo a rottura*. « L'Ingegnere », 1955, n. 12. (Si veda anche: *Ponti ad arco con impalcato sospeso*. Milano - Hoepli, 1958).
- [2] V. FRANCIOSI. *La sicurezza a rottura nei ponti ad arco*. « L'ingegnere », 1956, n. 7.
- [3] R. SPARACIO. *Verifica a rottura in presenza di carichi ripetuti, in particolare di sollecitazioni sismiche*. Comunicazione al Congresso Internazionale di Ingegneria Sismica di Messina, dicembre 1959.
- [4] R. SPARACIO. *La ricerca del minimo coefficiente di sicurezza a rottura in presenza di carichi variabili e distorsioni*. « Giornale del Genio Civile », ottobre 1960.
- [5] W. PRAGER. *Probleme der Plastizitätstheorie*. Basel, Birkhäuser, 1955.
- [6] PH. HODGE. *Plastic analysis of structures*. New York, Mc Graw Hill, 1959.

RIASSUNTO. — Si dimostra il « teorema fondamentale del calcolo a rottura » per carichi variabili ripetuti per le strutture presso-inflesse. Si perviene, inoltre, alla dimostrazione del « teorema fondamentale » per un continuo tridimensionale il cui stato tensionale sia definito a mezzo di componenti generalizzate della tensione.

SUMMARY. — The « fundamental theorem of limit analysis » for variable repeated loading is demonstrated for a tridimensional continuum, and for beams with axial and bending stresses.

Processo verbale dell'adunanza del dì 7 gennaio 1961.

Assistono all'adunanza il presidente Malquori, il segretario D'Erasmo, i soci ordinari residenti Colamonico, Franchetta, Franciosi, Imbò, Miranda Nobile, Orù, Scherillo, Spampinato ed i corrispondenti Covello, Giangreco, Jacopetti, Ippolito, Nicolaus. Scusa l'assenza il socio Penta.

Il Presidente dà innanzitutto la parola al socio corrispondente Rodolfo Alessandro Nicolaus, che commemora il compianto socio Maria Bakunin. Quindi il presidente ricorda che parecchi colleghi, impossibilitati a presenziare alla cerimonia, hanno fatto pervenire calde espressioni di partecipazione, e si dice sicuro interprete dell'unanime sentimento di tutti i presenti, rivolgendo alla venerata memoria di Maria Bakunin un pensiero di gratitudine, di devozione, di rimpianto.

Poscia invita la prof. Liliana Jannelli, che gentilmente accolse l'invito dell'Accademia, a commemorare il suo maestro Ugo Beretta.

Reso così questo tributo di omaggio alla memoria dei due cari colleghi scomparsi, il Presidente ringrazia i due oratori per le loro elevate parole, nonché i numerosi allievi, amici ed estimatori presenti alla seduta, e rinnova ai familiari i sensi del più profondo cordoglio dell'Accademia.

Ripresa la seduta dopo un breve intervallo in segno di lutto, il segretario dà lettura del processo verbale dell'adunanza 3 dicembre 1960, che è approvato. Quindi comunica i ringraziamenti del consocio Onorato per le condoglianze espressegli dall'Accademia in occasione del grave lutto sofferto. Legge poi la circolare della Società Astronomica Italiana, relativa ai progetti di massima preparati dagli Osservatori Astrofisici ed Osservatori italiani per l'osservazione e lo studio del prossimo eclisse totale di sole del 15 febbraio 1961. Dà infine notizia delle principali deliberazioni prese dal Consiglio Generale della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti nella sua adunanza del 30 dicembre scorso, ed informa i consoci che la seduta plenaria prevista dall'art. 16 dello Statuto sociale è stata fissata per il dì 22 gennaio.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio è segnalato un gruppo di lavori dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, offerto dal consocio Picone.

Su proposta delle rispettive Commissioni, nominate nella precedente adunanza, vengono quindi accolte alla unanimità, per la stampa nel Rendiconto, le sei note seguenti:

1) Rachele Scarpati e Vincenzo Dovinola, *Sugli acidi pirrolcarbonici*. Nota XIX. *Azione dell'acqua ossigenata sull'acido 3-metil-4-pirrolcarbonico* (presentata dal socio Nicolaus);

2) Giuseppe Del Re e Rachele Scarpati, *Sugli acidi pirrolcarbonici*. Nota XX. *Considerazioni teoriche sulla reattività* (presentata dallo stesso socio Nicolaus);

3) Giuseppe Del Re e Aldo Covello, *Sul calcolo delle curve di energia potenziale dei legami chimici mediante il metodo semi-empirico MO-LCAO* (presentata pure dal socio Nicolaus);

4) Luigi Salvadori, *Criteri di instabilità per i moti merostatici di un sistema olononio* (presentata dal socio Tolotti);

5) Giovanni Aquaro, *Relazioni tra cardinalità di basi e di strutture uniformi sopra uno spazio topologico* (presentata dal socio Ciliberto);

6) Giovanni Aquaro, *Proprietà locali e proprietà globali di uno spazio topologico* (presentata dallo stesso socio Ciliberto).

Il socio Franchetta presenta una nota del dott. Antonino Lo Voi dal titolo *Studio topologico di una superficie iperellittica di rango 3 dotata di torsione*. Il Presidente incarica della relativa relazione la Commissione composta dai soci Franchetta, Spampinato e Miranda.

Il socio corrispondente Nicolaus presenta una nota della prof. Rachele Scarpati e del dott. Ciro Santacroce sopra l'*Azione dell'acqua ossigenata sul 2-formilpirrolo*. È incaricata di riferire su tale lavoro la Commissione Nicolaus, Covello e Malquori.

Il socio Franciosi presenta una nota del prof. Aldo Raithele e del dott. Luigi Adriani dal titolo *In tema di sicurezza delle strutture ad arco*, sulla quale riferirà nella prossima tornata la Commissione Franciosi, Giangreco e Tolotti.

Il socio Malquori presenta una nota del prof. Riccardo Sersale e del dott. Vittorio Sabatelli *Sull'attività « pozzolanica » delle zeoliti*. Nota II. *Reattività dell'ancime con soluzione d'idrossido di calcio*. È incaricata della relativa relazione la Commissione composta dai soci Malquori, Scherillo e D'Erasmo.

Processo verbale dell'adunanza del dì 4 febbraio 1961.

Sono presenti il presidente Malquori, il segretario D'Erasmo, i soci ordinari residenti Catalano, Colamonico, Franchetta, Imbò, Nobile, Orrù, Scherillo, il socio ordinario non residente Milone, ed i corrispondenti Nicolaus e Scarsella.

Scusano l'assenza i soci Miranda e Penta.

Il presidente annunzia che un lutto gravissimo ha colpito l'Accademia con la morte di Francesco Giordani, personalità eminente che ha lasciato un'orma profonda nei più svariati settori della vita italiana, avendo nobilmente ricoperto cariche altissime nei campi della scienza, dell'industria, dell'economia, della cultura, dell'energia nucleare. Mentre si dice sicuro che l'Accademia ricorderà degnamente, in altra adunanza, la sua vasta e multiforme opera di studioso, di tecnico, di organizzatore, prega i colleghi di mandare alla cara memoria di Lui il mesto ed affettuoso saluto del Sodalizio, che, apprezzandone i meriti e la bontà, ne piange l'imatura scomparsa.

Il segretario, mentre si dice sicuro che il presidente Malquori vorrà accogliere l'unanime invito dei colleghi, tenendo egli stesso in altra tornata una degna commemorazione di Francesco Giordani, ricorda dal canto suo, con accorato rimpianto, la nobile figura dell'illustre consocio, mettendone in particolare rilievo il costante attaccamento al Sodalizio, che lo vide per un quarantennio frequentare assiduamente le sue adunanze, intervenire col suo illuminato consiglio in tutte le questioni scientifiche, culturali, amministrative, contribuire con le ricerche proprie e dei discepoli alle pubblicazioni accademiche, dirigere — in qualità di Presidente della Classe o dell'intera Società — i lavori del Consesso con equilibrio sommo, garbo inappuntabile, lungimirante visione e soddisfazione generale. « Socio corrispondente », egli aggiunge, « nella Sezione di Scienze Naturali dal dì 5 febbraio 1921 e ordinario residente dal dì 11 febbraio 1928, Francesco Giordani diede al nostro Rendiconto molteplici frutti del suo vivido ingegno e della sua profonda cultura, pubblicando negli anni giovanili vari lavori sulla costituzione della picrotossina, sulla eterificazione dei fenoli, sugli indoni e sulle reazioni fotochimiche (lavori condotti con la collaborazione della sua maestra Maria Bakunin), e, più tardi, dal 1919 al 1939, parecchi altri studi sopra la catalisi e la cinetica chimica, fra cui particolarmente interessanti quelli riguardanti la teoria del funzionamento degli elettrolizzatori a diaframma e a circolazione, dei quali perfezionò notevolmente la costruzione.

« Napoletano per nascita, per studi, per carriera, per bontà e giovialità di carattere, Egli era rimasto tenacemente legato a questa nostra città, di cui si sentiva figlio prediletto, anche quando era rapidamente salito alle più alte vette della notorietà, non solo nel campo universitario e culturale, ma anche in quelli, enormemente più vasti, della vita economica della nazione e dell'organizzazione atomica europea.

« Il vostro segretario non ha oggi l'intento, con questo scialbo e disadorno cenno pronunciato a pochi giorni dalla dolorosa ed immatura scomparsa di Francesco Giordani, di considerare l'importanza scientifica e pratica degli studi di Lui, nè può parlarvi adeguatamente della sua brillantissima carriera, a cominciare dalla laurea conseguita nel 1918, dall'insegnamento di elettrochimica tenuto per incarico dal 1919 al 1925 e dalla relativa cattedra conquistata per concorso nel 1925 presso la Scuola d'Ingegneria e dalla direzione dell'Istituto di Chimica generale ed inorganica, a cui passò nel 1932, dopo la morte di Ferruccio Zambonini, fino alle altissime cariche, più recenti, di Presidente del Consiglio Nazionale delle Ricerche, dell'Accademia dei Lincei, del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, del Comitato Nazionale per le Ricerche Nucleari, di Accademico Pontificio e socio dei più importanti Sodalizi italiani e stranieri, uno dei tre saggi dell'Euratom.

« Tale compito sarà opportunamente assolto dal nostro Presidente, che, con la sua parola dotta e al tempo stesso affettuosa, farà rivivere in mezzo a noi la cara inoblittabile figura dello scienziato, del maestro, del cittadino, dell'uomo. A me, modesto ammiratore e collega, che gioii, come tanti altri fra voi, della rapida ascensione del nostro amato consocio alla più elevata notorietà, quelle che oggi brillano di più vivida luce, nel mesto rimpianto che tutti ci pervade, sono le qualità eccezionali del carattere di Lui, che Gli creavano attorno un'atmosfera di simpatia, di ammirazione, di amore; dell'uomo di straordinaria bontà e di singolare modestia; dell'amico, sincero e cordiale, pronto a prodigarsi sempre per tutti; del cittadino dalla multiforme attività disinteressatamente offerta per la Sua città e per la Sua nazione.

« Questo spiega l'universalità del dolore con cui è stata dovunque appresa la notizia della Sua scomparsa, e giustifica il duraturo ricordo che di Lui serberanno tutti coloro che apprezzano ancora i valori morali di una vita nobilmente spesa per la Scienza e per la Patria ».

Ripresa la seduta dopo una breve interruzione in segno di lutto, il segretario dà lettura del verbale dell'adunanza del 7 gennaio, che è approvato.

Indi presenta l'Annuario 1961 della Società, già distribuito ai soci, e comunica la Ministeriale 23 gennaio 1961, n. 280, relativa all'avvenuta approvazione della nomina del prof. Antonio Carrelli a vice-presidente dell'Accademia per l'anno 1961. Informa poi che nell'adunanza plenaria del 22 gennaio scorso il Presidente generale procedette — secondo le norme del relativo bando di concorso — alla apertura della busta suggellata contrassegnata dal motto *Finis coronat opus*, e che risultò autore della memoria premiata dall'Accademia nel concorso al premio biennale 1959-1960 il prof. Ercole Grossetti.

Legge quindi i bandi di concorso al premio triennale per la fisica « Francesco Samaini » di lire 1.500.000 e alla borsa « Francesco Samaini per lo studio della Fisica » di lire 750.000, entrambi con scadenza al 1° luglio 1961, indetti dalla Fondazione Samaini presso il Tempio Voltiano in Como con lo scopo di incoraggiare nel nome di Alessandro Volta gli studi di Fisica in Italia.

Su conforme parere delle rispettive Commissioni, nominate nell'adunanza del 7 gennaio, l'Accademia approva all'unanimità l'inserzione nel Rendiconto delle quattro note seguenti:

1) Lo Voi Antonino, *Studio topologico di una superficie iperellittica di rango 3 dotata di torsione* (presentata dal socio Franchetta);

2) Scarpati Rachele e Santacroce Ciro, *Azione dell'acqua ossigenata sul 2-formilpirrolo* (presentata dal socio Nicolaus);

3) Raithel Aldo e Adriani Luigi, *In tema di sicurezza delle strutture ad arco* (presentata dal socio Franciosi);

4) Sersale Riccardo e Sabatelli Vittorio, *Sull'attività « pozzolanica » delle zeoliti*.
Nota II. *Reattività dell'analcime con soluzione di idrossido di calcio* (presentata dal socio Malquori).

Il socio corrispondente Nicolaus presenta una nota del prof. Rachele Scarpati e del dott. Donato Sica dal titolo: *Reazioni dei cheteni*. Nota V. *Reazioni fra chetoni e chetenacetali*. Il Presidente nomina la Commissione Nicolaus, Malquori e Covello, con l'incarico di riferire su questo lavoro nella prossima tornata.

Processo verbale dell'adunanza del dì 4 marzo 1961.

Assistono all'adunanza i soci ordinari residenti Catalano, Colamonico, D'Erasmus, Imbò, Salfi, Scherillo ed i corrispondenti Covello, De Lerma, Nicolaus e Scarsella. Scusano l'assenza il Presidente Malquori ed i soci Giangreco e Penta.

Presiede il socio anziano Colamonico, segretario il socio D'Erasmus.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 4 febbraio, che è approvato. Indi comunica i ringraziamenti della famiglia Giordani per le condoglianze espresse dall'Accademia. Presenta quindi il volume XXVII della 4ª serie del Rendiconto, relativo all'anno 1960, pressochè ultimato e di prossima distribuzione ai soci. Il presidente si compiace per la mole e l'importanza di detto volume, ricco di oltre 600 pagine di stampa, comprendenti più di cinquanta lavori diversi, e corredato di numerose figure intercalate e tavole fuori testo, che attesta la continuata attività del Sodalizio.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio, è segnalato l'Annuario dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte per l'anno 1961, offerto dal socio Nicolini. L'Accademia ringrazia il donatore.

La Commissione Nicolaus, Malquori e Covello riferisce sulla nota della prof. Rachele Scarpati e del dott. Donato Sica dal titolo *Reazioni dei cheteni*. Nota V. *Reazioni fra cheteni e chetenacetali*, proponendone l'accoglimento per la stampa nel Rendiconto. L'Accademia unanime approva.

Il segretario presenta, a nome del socio Giangreco, una nota del dott. Giovanni Menditto, *Vibrazioni libere e forzate di un corpo rigido in un mezzo elastico*. Il presidente nomina la Commissione Giangreco, Tolotti e Franciosi, con l'incarico di riferire nella prossima adunanza.

Il socio tesoriere Scherillo presenta il bilancio consuntivo 1960. L'Accademia nomina revisori dei conti i soci Orrù e Scarsella.

Processo verbale dell'adunanza del dì 1º aprile 1961.

Sono presenti i soci ordinari residenti Catalano, D'Erasmus, Malquori, Nobile, Scherillo ed i corrispondenti Colucci, Nicolaus e Scarsella. Presiede il Presidente Malquori, segretario il socio D'Erasmus. Scusano l'assenza i soci Colamonico, Imbò, Orrù, Penta.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza del 4 marzo 1961, che è approvato.

Il presidente si compiace per il bel volume del Rendiconto, recentemente pubblicato e distribuito, e rinnova al segretario i ringraziamenti suoi e dei Colleghi per la solerzia con la quale ne ha curato la stampa.

La Commissione Giangreco, Tolotti e Franciosi riferendo sulla nota del dott. Gio-

vanni Menditto, *Vibrazioni libere e forzate di un corpo rigido in un mezzo elastico*; ne propone l'accoglimento per la stampa nel Rendiconto. L'Accademia unanime approva.

Il segretario presenta, a nome del socio Imbò, una nota del dott. Gabriele Rago dal titolo *Caratteristiche di una distribuzione continua dei piccoli ioni atmosferici, deducibili mediante l'uso dell'apparecchio Ebert-Mache*. Il presidente nomina la Commissione Imbò, Carrelli e D'Erasmo, con l'incarico di riferire su questo lavoro nella prossima adunanza.

Presenta quindi, da parte del socio Orrù, una nota dei dott. Francesco Badolato e Iride Bucci dal titolo: *Sulla concentrazione dell'acido ascorbico legato in poltiglie di semi Phaseolus vulgaris poste ad incubare. Influenza esercitata dai costituenti del complesso radichetta-piumetta*. Viene incaricata di riferire su di essa la Commissione Orrù, Salfi e Galgano.

Processo verbale dell'adunanza del dì 6 maggio 1961.

Assistono all'adunanza i soci ordinari residenti Catalano, Colamonico, D'Erasmo, Imbò, Miranda, Nobile, Orrù, Scherillo, Spampinato ed il corrispondente Nicolaus.

In luogo del presidente Malquori e del vice-presidente Carrelli, assenti da Napoli per motivi di ufficio, presiede il socio anziano Colamonico. Segretario il socio D'Erasmo. Scusano l'assenza i soci Malquori, Salfi, Giangreco e Scarsella.

Il Segretario dà lettura del processo verbale dell'adunanza 1° aprile 1961, che è approvato. Indi comunica il bando di concorso per l'assegnazione del Premio Internazionale Cristoforo Colombo di lire 5.000.000, riservato per il 1961 alle comunicazioni terrestri e bandito dal Comune di Genova. L'Accademia è invitata a far pervenire le sue segnalazioni alla Commissione giudicatrice non oltre il 31 agosto 1961.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in dono è segnalato un gruppo di lavori dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte, inviato dal socio Nicolini.

Il socio Colamonico presenta ed offre in omaggio due suoi recenti lavori dal titolo *Aspetti della distribuzione delle culture agrarie nella Puglia e Scuole secondarie in esperimento e programmi di geografia*, esponendone un brev riassunto.

La Commissione Imbò, Carrelli e D'Erasmo riferisce sulla nota del dott. Gabriele Rago dal titolo *Caratteristiche di una distribuzione continua dei piccoli ioni atmosferici, deducibili mediante l'uso dell'apparecchio Ebert-Mache*, proponendone l'accoglimento per la stampa nel Rendiconto.

Uguale parere, unanimamente favorevole, esprime la Commissione Orrù, Salfi e Galgano nei riguardi della nota dei dott. Francesco Badolato e Iride Bucci *Sulla concentrazione dell'acido ascorbico legato in poltiglie di semi di Phaseolus vulgaris poste ad incubare. Influenza esercitata dai costituenti del complesso radichetta-piumetta*.

L'Accademia approva a voti unanimi entrambe le predette relazioni.

Il segretario presenta, a nome del socio Malquori che ha scusato l'assenza, due note del prof. Riccardo Sersale dal titolo *Ricerche sulla zeolitizzazione dei vetri vulcanici per trattamento idrotermale*. Nota VIII. *Zeolitizzazione di ossidiane trachandesitiche artificiali*, e Nota IX. *Zeolitizzazione di ossidiane leuco-fonolitiche artificiali*. Viene incaricata di riferire su queste due note la Commissione composta dai soci Malquori, Scherillo e D'Erasmo,

A nome del socio corrispondente Giangreco, impedito a partecipare all'adunanza, lo stesso segretario presenta una nota del dott. Guido Sarà sopra *Alcune considerazioni sulla instabilità flesso-torsionale delle travi alte*. Il Presidente nomina la Commissione Giangreco, Tolotti e Franciosi, perchè riferisca in altra adunanza.

Il socio Orrù, anche a nome del collega Scarsella, legge la Relazione dei revisori dei conti sul bilancio dell'Accademia dell'anno 1960, relazione che viene approvata alla

unanimità, insieme con un voto di plauso al Tesoriere per la precisione e solerzia con cui cura gli interessi del Sodalizio.

Prima che venga chiusa la seduta, il Segretario informa che nella prossima adunanza del 3 giugno l'Accademia sarà chiamata a votare sulle proposte che la Sezione di Scienze Naturali ha avanzato per coprire i posti vacanti nelle categorie di socio ordinario residente e di socio corrispondente.

Processo verbale dell'adunanza del dì 3 giugno 1961.

Partecipano all'adunanza, presieduta dal presidente Malquori, i soci ordinari residenti Catalano, Colamonico, D'Erasmus (segretario), Franchetta, Imbò, Miranda, Nobile, Orrù, Scherillo, Spampinato, Tolotti, e il socio corrispondente Nicolaus. È scusata l'assenza dei soci Salfi e Scarsella.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 6 maggio 1961, che è approvato. Indi comunica il Programma dei lavori del *Colloquio Internazionale sui problemi ecologici delle zone litorali del Mediterraneo*, che avrà luogo dal 17 al 23 luglio 1961 presso la Stazione Zoologica di Napoli, e l'invito del Presidente dell'Accademia delle Scienze di Padova e del Rettore di quella Università a voler partecipare alla solenne celebrazione del *tricentenario della nascita di Antonio Vallisneri*, indetta per i giorni 29 e 30 settembre e 1° ottobre p.v. L'Accademia aderisce cordialmente a tali manifestazioni, decidendo di farsi rappresentare alla prima di esse dal socio Salfi ed alla seconda dal socio corrispondente Scorza Dragoni.

Il segretario dà quindi notizia dell'attribuzione, ormai decisa nella sede dell'Accademia dei Lincei e che diventerà ufficiale entro pochi giorni, del Premio nazionale del Presidente della Repubblica al prof. Carlo Miranda, e si dice sicuro interprete dell'unanime sentimento di tutti i consoci, esprimendo al valoroso e caro collega il più vivo compiacimento per l'altissima e meritata distinzione. Il socio Miranda ringrazia vivamente.

Viene quindi esaminata ed accolta la richiesta di cambio degli Atti dell'Accademia con le Tesi di dottorato pubblicate dall'École Polytechnique Fédérale di Zurigo, che offre pure la « *Bibliographia Scientiae Naturalis Helvetica* ».

Il socio Malquori presenta ed offre in omaggio il volume relativo al *Convegno sui cementi siderurgici*, tenuto a Napoli dal 30 maggio al 2 giugno 1960. L'Accademia ringrazia.

Vengono successivamente lette, ed approvate alla unanimità, le relazioni delle Commissioni nominate nella precedente adunanza, le quali propongono di accogliere per la stampa nel Rendiconto le tre note seguenti:

- 1) Sersale prof. Riccardo, *Ricerche sulla zeolitizzazione dei vetri vulcanici per trattamento idrotermale*. Nota VIII. *Zeolitizzazione di ossidiane trachi-andesitiche artificiali*.
- 2) Sersale prof. Riccardo, *Ricerche sulla zeolitizzazione dei vetri vulcanici per trattamento idrotermale*. Nota IX. *Zeolitizzazione di ossidiane leuco-fonolitiche artificiali*.
- 3) Sarà dott. Guido, *Alcune considerazioni sulla instabilità flessorionale delle travi alte*.

Il socio Scherillo presenta, a nome del socio straniero Conrad Burri, una nota dal titolo: *Vulcano Vesbico e Monte Vulture: analogie nella loro evoluzione magmatica*.

Il segretario presenta, a nome del socio corrispondente Gleijeses, una nota del prof. Filippo Manna *Sulla verifica del principio di omogeneità nelle espressioni vettoriali*. È incaricata di riferire su questo lavoro la Commissione Gleijeses, Ippolito e Franciosi.

Il socio Malquori presenta una nota del prof. Riccardo Sersale, *Ricerche sulla zeolitizzazione dei vetri vulcanici per trattamento idrotermale*. Nota X. *Zeolitizzazione di ossidiane leucitiche artificiali*. È incaricata di riferire su questo lavoro la Commissione Malquori, Scherillo, D'Erasmus.

Il socio Miranda presenta, a nome del collega Ciliberto, una nota del prof. Giovanni Aquaro dal titolo *Una osservazione sopra un teorema di alternativa in algebra*. Su di essa riferirà la Commissione costituita dai soci Miranda, Ciliberto e Franchetta.

Il socio corrispondente Nicolaus presenta una nota dei dottori Mario Piattelli, Ernesto Fattorusso e Silvana Magno dal titolo *Identificazione del 5,6-dirossindolo nell'ossidazione enzimatica della dopa*, per la quale dovrà riferire, nella prossima tornata, la Commissione Nicolaus, Orrù e Covello, e una nota degli stessi autori Piattelli, Fattorusso e Magno, preparata in collaborazione del consocio Nicolaus, sopra la *Identificazione degli acidi 2,4-pirroldicarbonico e 2,5-pirroldicarbonico tra i prodotti di ossidazione della sepiomelanina decarbossilata*.

Constatata la validità dell'adunanza, a norma dell'art. 12 dello Statuto sociale, si passa quindi, secondo l'ordine del giorno, alla elezione dei soci per i posti vacanti nelle diverse categorie.

Il segretario comunica che, nelle adunanze di Sezione del dì 6 maggio scorso, quella di Scienze Matematiche decise di non proporre, per ora, alcun candidato all'unico posto di socio corrispondente nè ai due posti di socio straniero attualmente vacanti. La Sezione di Scienze Naturali stabilì, invece, di proporre all'approvazione della Classe tre candidati per la nomina ai tre posti vacanti di socio ordinario residente e due candidati per la nomina a due dei tre posti vacanti di socio corrispondente.

Su invito del Presidente, i soci Malquori, Orrù e D'Erasmo leggono le relazioni sui requisiti scientifici, rispettivamente, dei soci corrispondenti Jacopetti Mario, Covello Mario e Scarsella Francesco, proposti a voti unanimi dalla Sezione per la nomina a socio ordinario residente. Quindi il Presidente chiede ai soci ordinari presenti all'adunanza se abbiano da proporre altri nomi. Non essendo state fatte altre proposte, ciascuno dei candidati predetti è ammesso separatamente alla votazione a scrutinio segreto, ottenendo dodici voti favorevoli sopra dodici soci ordinari presenti e votanti.

Il presidente proclama quindi eletti soci ordinari residenti nella Sezione di Scienze Naturali i professori Jacopetti Mario, Covello Mario e Scarsella Francesco, avvertendo che, a norma dell'art. 15 dello Statuto sociale, tali elezioni saranno comunicate al Ministero della Pubblica Istruzione per l'approvazione del Capo dello Stato.

Successivamente i soci Catalano e Malquori leggono rispettivamente i rapporti motivati sui requisiti scientifici del prof. Valerio Giacomini, ordinario di Botanica nell'Università di Napoli, e del prof. Alfonso Liquori, ordinario di Chimica fisica nel medesimo Ateneo, proposti ad unanimità dalla Sezione di Scienze Naturali per la nomina a socio corrispondente. Non avendo alcuno dei presenti chiesto, su domanda del Presidente, di integrare la lista con altri nomi, i due candidati predetti vengono ammessi alla votazione per scrutinio segreto, ottenendo dodici voti favorevoli sopra dodici soci ordinari presenti e votanti.

Il presidente proclama pertanto eletti i professori Valerio Giacomini e Alfonso Liquori soci corrispondenti nella Sezione di Scienze Naturali.

Si autorizza il segretario ad accettare, con le norme e limitazioni in vigore, durante il periodo delle ferie estive, le note dei soci di ogni categoria, che saranno eventualmente presentate per la inserzione nel Rendiconto.

Il presente verbale viene redatto, letto ed approvato seduta stante.

Processo verbale dell'adunanza del dì 4 novembre 1961.

Presiede il presidente Malquori, segretario il socio D'Erasmo. Assistono i soci ordinari residenti Carrelli, Catalano, Colamonico, Covello, Franchetta, Franciosi, Imbò, Miranda, Nobile, Orrù, Scarsella, Scherillo.

Scusano l'assenza i soci Diamare, Giangreco, Liquori, Nicolaus.

Espresso un cordiale benvenuto ai nuovi colleghi, che in qualità di ordinari partecipano all'adunanza, il presidente dà la parola al segretario, il quale comunica:

1) la Ministeriale 8 luglio 1961, che approva la nomina dei professori Francesco Scarsella, Mario Covello e Mario Jacopetti a soci ordinari residenti nella Sezione di Scienze Naturali;

2) le lettere dei predetti colleghi, che ringraziano per la nomina loro conferita nello scorso luglio, nonché quella dei proff. Valerio Giacomini e Alfonso Liquori, che esprimono la loro riconoscenza per la elezione a soci corrispondenti nella medesima Sezione;

3) le lettere dei soci Mario Salfi e Giuseppe Scorza Dragoni, che, accogliendo cortesemente l'invito loro rivolto dall'Accademia, si piacquero rappresentare il Sodalizio rispettivamente al Congresso Internazionale per lo studio degli Insetti Sociali, tenuto a Pavia, e alla celebrazione del Tricentenario Vallisneriano, indetta dall'Università di Padova nello scorso mese di settembre;

4) la lettera 31 agosto 1961 della Presidenza del Consiglio dei Ministri, che partecipa l'assegnazione all'Accademia — sui fondi che l'Ente Nazionale per la Cellulosa e per la Carta riserva alle riviste di elevato valore culturale — di un contributo di L. 300.000 per la stampa del volume del Rendiconto relativo all'anno 1959;

5) la pratica svolta dall'Ufficio di Segreteria per ottenere, dal medesimo Ente, un ulteriore contributo finanziario, a parziale sgravio delle spese sostenute per la pubblicazione del Rendiconto accademico dell'anno 1960;

6) il bando di concorso relativo a 5 borse di perfezionamento biennale, di lire 3.000.000 ciascuna, indetto dalla Compagnia Assicurazioni Generali di Trieste e riservato a giovani laureati in Ingegneria o in Scienze matematiche o in Scienze statistiche, demografiche e attuariali.

L'Accademia prende atto di tutte le precedenti comunicazioni.

Il Segretario informa quindi che in data 11 settembre è pervenuta all'Accademia, per la inserzione nel Rendiconto, una nota del socio corrispondente Carlo Ciliberto, *Sull'unicità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie*.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio vengono segnalate quelle dell'Istituto per le applicazioni del Calcolo, offerte dal socio Picone, il vol. XII (1960) dell'Annuario dell'Istituto e Museo Zoologico dell'Università di Napoli, inviato dal consocio Salfi, e la *Commemorazione di Giuseppe De Lorenzo*, tenuta dall'Accademia dei Lincei dal socio D'Erasmo.

Il socio Colamonico, presentando l'ultimo volume della collana di *Memorie di geografia economica*, relativo a *I porti della Sicilia*, ne discorre. Il presidente ringrazia i donatori.

Il socio Miranda presenta una nota dei proff. D. Mangeron e L. E. Krivosein dal titolo *Problemi di Coursat e di Dirichlet per una classe di equazioni integro-differenziali a derivate totali*, ed una nota del dott. Giorgio Adler sulla *Maggiorazione del gradiente delle funzioni biarmoniche di due variabili*. Il presidente nomina la Commissione Miranda, Franchetta e Cafiero con l'incarico di riferire sui due lavori nella prossima adunanza.

Il socio D'Erasmo presenta una memoria della prof. Angiola Maria Maccagno dal titolo *L'Elephas meridionalis Nesti di Contrada «Madonna della Strada» Scopcito (L'Aquila)*. — Il presidente incarica la Commissione costituita dai soci D'Erasmo, Scarsella e Scherillo di esaminarla e di riferire su di essa in una delle prossime tornate.

Il socio Orrù presenta le tre note seguenti: 1) Lidia Foti, Teodoro De Leo e Isabella Trara Genoino, *L'Influenza dell'età e del digiuno sul colesterolo epatico nel ratto Wistar maschio*;

2) Francesco Badolato e Iride Bucci, *Rapporti tra alimentazione e colesterolo epa-*

tico ed ematico in ratti maschi Wistar. Nota I: *Influenza di una dieta normoprotidica iperlipidica vegetale*;

3) Francesco Badolato e Iride Bucci, *Rapporti tra alimentazione e colesterolo epatico ed ematico in ratti maschi Wistar*. Nota II. *Influenza di una dieta iperprotidica iperlipidica vegetale*. È incaricata di riferire su questi tre lavori la Commissione Orrù, Salfi e Galgano.

A nome del socio corrispondente Giangreco sono quindi dal segretario presentate le note appresso elencate: 1) Elio Giangreco e Antonio La Tegola, *Sul problema della lastra-piastra*; 2) Antonio La Tegola, *La risoluzione del problema della trave mediante sviluppi in serie di autofunzione*; 3) Michele Capurso, *Sulla flessione delle piastre sottili in presenza di carichi assiali*. Su queste ultime due riferirà nella ventura tornata, la Commissione Giangreco, Franciosi e Tolotti.

Il segretario legge quindi la lettera del socio corrispondente Nicolaus, il quale, scusando la sua assenza, presenta, per il Rendiconto, una nota sua e dei dottori Mario Piattelli, Ernesto Fattorusso e Silvana Magno, dal titolo *Sepiomelanina e pigmenti sintetici*, e, per la stampa negli Atti, una memoria sua e della prof. Rachele Scarpati *Sugli acidi pirrolici*. Per quest'ultimo lavoro, corredato da numerose tabelle e figure intercalate a tratto, il presidente invita, a norma dell'art. 18 dello Statuto, la Commissione Malquori, Covello e Scherillo a riferire nella prossima adunanza.

Il socio Franciosi presenta tre note: una dell'ing. Salvatore D'Agostino, *Sul criterio della massima tensione tangenziale ottaedrale*; le altre due dell'ing. Bruno Barbarito, rispettivamente dal titolo *La soluzione flessionale delle volte scatolari*, e *Sulle ipotesi a sostegno dei principi di Kirchhoff*.

Il presidente prega la Commissione Franciosi, Tolotti e Giangreco di voler riferire su questi tre lavori nella tornata successiva.

Il socio Covello presenta due note: la prima, che ha per autori lo stesso prof. Covello ed il dott. Giuseppe Ciampa e verte *Sulla determinazione del peso molecolare di polimeri dell'acido salicilico*; la seconda dovuta a Mario Covello, Eugenio Piscopo ed Enrico Abignente, che ha per titolo: *Nuovi iodo-organici di sintesi. Sulla preparazione di acidi iodoalchilossibenzoici e derivati*.

Il socio Scarsella presenta una sua nota *Sulla presenza del Lias nell'isola di Capri*, e ne discorre.

Il socio Franchetta presenta una nota del dott. Mario Curzio *Sui sottogruppi normali dei gruppi speciali*, sulla quale è chiamata a riferire la Commissione composta dai soci Franchetta, Miranda e Cafiero.

Il segretario presenta infine, da parte del socio ordinario Diamare, una nota che ha per titolo: *Del sessualismo in generale e dell'ermafroditismo in particolare. Su altre questioni di organi endocrini in anatomia, morfologia, istofisiologia (Ricerche e saggio di critica storica)*.

Constatata la validità dell'adunanza, secondo le norme fissate dall'art. 12 dello Statuto e dall'art. 3 del Regolamento per le votazioni a cariche sociali, il presidente invita i soci ordinari a procedere, secondo l'ordine del giorno, alla elezione del vice-presidente per l'anno 1962.

La votazione, fatta a scrutinio segreto, ha dato il seguente risultato:

Soci ordinari presenti e votanti, quattordici;

Tolotti Carlo, voti quattordici.

Il presidente proclama eletto vice-presidente per l'anno 1962 il socio prof. Carlo Tolotti.

Considerato, poi, che col 31 dicembre 1961 scade il triennio di carica del segretario D'Erasmo, si passa alla votazione, pure a scrutinio segreto, a detta carica per il triennio 1962-1964, con il risultato appresso indicato:

Soci ordinari presenti e votanti, quattordici;

D'Erasmo Geremia, voti tredici;

Imbò Giuseppe, voti uno.

Il presidente proclama eletto Segretario per il triennio 1962-1964 il socio Geremia D'Erasmo, il quale ringrazia i colleghi per la riconfermata prova di fiducia accordatagli.

Entrambe queste nomine verranno comunicate — a norma dell'art. 15 dello Statuto sociale — al Ministero della Pubblica Istruzione per la prescritta approvazione del Capo dello Stato.

Prima di togliere l'adunanza, il segretario informa che è stata fissata per le ore 18 del 22 novembre la solenne commemorazione di Francesco Giordani, che per iniziativa dell'Università degli Studi di Napoli e della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti sarà tenuta dal consocio Giovanni Malquori nell'Aula Magna dell'Ateneo.

Processo verbale dell'adunanza del dì 2 dicembre 1961.

Assistono all'adunanza i soci ordinari residenti Catalano, Colamónico, Covello, D'Erasmo, Imbò, Miranda, Nobile, Orrù, Salfi, Scarsella, Scherillo, ed i corrispondenti De Lerma, Galgano, Giangreco e Nicolaus.

In assenza del presidente, impedito a partecipare alla riunione da motivi di ufficio, presiede il socio Colamónico. Segretario il socio D'Erasmo.

È scusata l'assenza dei soci Franchetta, Franciosi, Liquori.

Il presidente, prima di dare la parola al collega Galgano, che commemorerà il compianto socio Gioacchino Leo Sera, si rende interprete dei sentimenti di tutta l'Accademia, la quale si associa unanime al tributo di omaggio che verrà reso alla memoria dello scienziato, e comunica i messaggi di adesione pervenuti, citando quelli della vedova, signora Bianca Cinoli, del Rettore dell'Università di Pavia, dei direttori degli Istituti di Anatomia comparata e di Antropologia di quella Università, ed informa che sono presenti la sorella dell'Estinto, signora Beatrice Trojani Sera ed i nipoti Trojani e Sarli Quichil.

Il socio Galgano pronuncia l'orazione commemorativa, che verrà integralmente inserita nel Rendiconto accademico, ed il presidente ringrazia il collega per le sue nobili ed elevate parole, rinnovando ai familiari del compianto prof. Sera l'espressione del più vivo cordoglio del Sodalizio.

Ripresa la seduta dopo una breve sospensione, il segretario legge il processo verbale della tornata del 4 novembre, che è approvato.

La Commissione D'Erasmo, Scarsella e Scherillo, incaricata di riferire sulla memoria della prof. Angiola Maria Maccagno dal titolo *L'Elephas meridionalis Nesti di Contrada « Madonna della Strada » Scoprito (L'Aquila)*, esprime a vot unanimi la proposta di accoglimento per la stampa nel nuovo volume (IV) della 3ª serie degli Atti, lasciando a carico dell'autrice le spese per la esecuzione delle illustrazioni. L'Accademia, unanime, approva.

Uguale parere, favorevole alla inserzione nello stesso volume degli Atti, esprime la Commissione Malquori, Covello e Scherillo nei riguardi della memoria del socio corrispondente Rodolfo Alessandro Nicolaus e della Prof. Rachele Scarpato *Sugli acidi pirrolici*. L'Accademia approva all'unanimità.

Vengono successivamente accolte, pure a voti unanimi, su proposta delle rispettive Commissioni nominate nell'adunanza del dì 4 novembre, le note seguenti, destinate alla stampa nel Rendiconto:

- 1) Mangeron D. e Krivosein L. E., *Problemi di Goursat e di Dirichlet per una classe di equazioni integrodifferenziali a derivate totali* (presentata dal socio Miranda);
- 2) Giorgio Adler, *Maggiorazione del gradiente delle funzioni biarmoniche di due variabili* (presentata dallo stesso consocio Miranda);

3) Lidia Foti, Teodoro De Leo e Isabella Trara Genoino, *L'influenza dell'età e del digiuno sul colesterolo epatico nel retto Wistar maschio* (presentata dal socio Orrù);

4) Francesco Badolato e Iride Bucci, *Rapporti tra alimentazione e colesterolo epatico ed ematico in ratti maschi Wistar*. Nota I: *Influenza di una dieta normoprotidica iperlipidica vegetale* (presentata dal socio Orrù);

5) Francesco Badolato e Iride Bucci, *Rapporti tra alimentazione e colesterolo epatico ed ematico in ratti maschi Wistar*. Nota II. *Influenza di una dieta iperprotidica iperlipidica vegetale* (presentata dal socio Orrù);

6) Antonio La Tegola, *La risoluzione del problema della trave mediante sviluppi in serie di autofunzioni* (presentata dal socio Giangreco);

7) Michele Capurso, *Sulla flessione delle piastre sottili in presenza di carichi assiali* (presentata dal socio Giangreco);

8) Salvatore D'Agostino, *Sul criterio della massima tensione tangenziale ottaedrale* (presentata dal socio Franciosi);

9) Bruno Barbarito, *La soluzione flessionale delle volte scatolari* (presentata dal socio Franciosi);

10) Bruno Barbarito, *Sulle ipotesi a sostegno dei principi di Kirchhoff* (presentata dal socio Franciosi);

11) Mario Curzio, *Sui sottogruppi normali dei gruppi speciali* (presentata dal socio Franchetta).

Il socio Scarsella presenta una nota del dottor Paolo Scandone dal titolo *Nuove vedute sulla geologia dei dintorni di Lagonegro (Basilicata)*. Riferirà su di essa la Commissione Scarsella, D'Erasmo e Scherillo).

Il socio corrispondente Giangreco presenta una nota dell'ing. Michele Capurso, *La trattazione di Jourviski per le sezioni pluriconnesse*. Il presidente incarica di riferire su di essa la Commissione composta dai soci Giangreco, Tolotti e Franciosi.

Il segretario presenta, a nome del socio Malquori, una nota dei dottori Leopoldo Massimilla, Gennaro Volpicelli e Domenico Porcelli *Sull'efflusso di solido e liquido da letti di sabbia silicea fluidizzati con acqua*. È incaricata della relativa relazione la Commissione Malquori, Franciosi e Giangreco.

Informa infine che da parte del consocio Franciosi è pervenuta una nota dell'ing. Renato Sparacio riguardante *Il « teorema fondamentale del calcolo a rottura » per carichi ripetuti in sollecitazione composta*. Il presidente nomina la Commissione Franciosi, Tolotti e Giangreco, con l'incarico di riferire su questo lavoro nella prossima adunanza.

In seduta privata, si dà lettura della circolare Ministeriale del dì 2 novembre 1961, che invita i soci ordinari residenti all'adunanza plenaria del 10 dicembre prossimo, nella quale si procederà alla votazione per la nomina di sette componenti del Consiglio Superiore delle Accademie e Biblioteche.

INDICE

G. D'ERASMO — Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche durante l'anno 1960	pag. 1
R. A. NICOLAUS — Maria Bakunin	» 15
L. JANNELLI — Ugo Beretta	» 22
R. SCARPATI, C. SANTACROCE — Azione dell'acqua ossigenata sul 2-formil- pirrolo	» 27
A. RAITHEL, L. ADRIANI — In tema di sicurezza delle strutture ad arco	» 34
R. SERSALE, V. SABATELLI — Sull'attività « pozzolanica » delle zeoliti. Nota II. Reattività dell'analcime con soluzione d'idrossido di calcio	» 45
A. LO VOI — Studio topologico di una superficie iperellittica di rango 3 dotata di torsione	» 65
R. SCARPATI, D. SICA — Reazioni dei cheteni. Nota V. Reazioni tra cheteni e chetenacetali	» 70
G. MENDITTO — Vibrazioni libere e forzate di un corpo rigido in un mezzo elastico	» 81
G. RAGO — Caratteristiche di una distribuzione continua dei piccoli ioni atmosferici, deducibili mediante l'uso dell'apparecchio Ebert-Mache	» 88
F. BADOLATO, I. BUCCI — Sulla concentrazione dell'acido ascorbico legato in poltiglie di semi <i>Phaseolus vulgaris</i> poste ad incubare; influenza esercitata dai costituenti del complesso radichetta-piumetta	» 98
G. SARÀ — Alcune considerazioni sulla instabilità flessio-torsionale delle travi alte	» 105
G. BURRI — Vulcano Vesbico e Monte Vulture; analogie nella loro evoluzione magmatica	» 131
F. MANNA — Sulla verifica del principio della omogeneità nelle espressioni vettoriali	» 143
G. AQUARO — Una osservazione sopra un teorema di alternativa in algebra	» 161
M. PIATTELLI, E. FATTORUSSO, S. MAGNO, R. A. NICOLAUS — Identificazione degli acidi 2,4-pirroldicarbonico e 2,5-pirroldicarbonico tra i prodotti di ossidazione della sepiomelanina decarbossilata	» 165
M. PIATTELLI, E. FATTORUSSO, S. MAGNO — Identificazione del 5,6-dios- sindolo nell'ossidazione enzimatica della dopa	» 168
R. SERSALE — Ricerche sulla zeolitizzazione dei vetri vulcanici per trat- tamento idrotermale. Nota VIII. Zeolitizzazione di ossidiane trachi- andesitiche artificiali	» 171
C. CILIBERTO — Sulla unicità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie	» 187
R. SERSALE — Ricerche sulla zeolitizzazione dei vetri vulcanici per tratta- mento idrotermale. Nota IX. Zeolitizzazione di ossidiane leuco-fono- litiche artificiali	» 199

D. MANGERON, L. R. KRIVOSEIN — Problemi di Coursat e di Dirichlet per una classe di equazioni integro-differenziali a derivate totali . . .	pag. 213
G. ADLER — Maggiorazione del gradiente delle funzioni biarmoniche di due variabili . . .	» 225
L. FOTI, T. DE LEO, I. TRARA GENOINO — Influenza dell'età e del digiuno sul colesterolo epatico in ratti Wistar maschi . . .	» 240
F. BADOLATO, I. BUCCI — Rapporti tra alimentazione e colesterolo epatico ed ematico in ratti Wistar maschi. Nota I. Influenza di una dieta normoprotidica iperlipidica . . .	» 251
F. BADOLATO, I. BUCCI — Rapporti tra alimentazione e colesterolo epatico ed ematico in ratti Wistar maschi. Nota II. Influenza di una dieta iperprotidica iperlipidica . . .	» 264
E. GIANCRECO, A. LA TEGOLA — Sul problema della lastra-piastra . . .	» 273
A. LA TEGOLA — La risoluzione del problema della trave mediante sviluppi in serie di autofunzioni . . .	» 290
M. CAPURSO — Sulla flessione delle piastre sottili in presenza di carichi assiali . . .	» 298
R. SERSALE — Ricerche sulla zeolitizzazione dei vetri vulcanici. Nota X. Zeolitizzazione di ossidiane leucititiche artificiali . . .	» 317
M. PIATTELLI, E. FATTORUSSO, S. MAGNO, R. A. NICOLAUS — Sepiomelanina e pigmenti sintetici . . .	» 337
S. D'AGOSTINO — Sul criterio della massima tensione tangenziale ottaedrale . . .	» 340
B. BARBARITO — La soluzione flessionale delle volte scatolari . . .	» 354
M. COVELLO, G. CIAMPA — Sulla determinazione del peso molecolare di polimeri dell'acido salicilico . . .	» 369
M. COVELLO, E. PISCOPO, E. ABIGNENTE — Nuovi iodo-organici di sintesi. Sulla preparazione di acidi iodoalchilossibenzoici e derivati . . .	» 375
F. SCARSELLA — Sulla presenza del Lias nell'isola di Capri . . .	» 391
M. CURZIO — Sui sottogruppi normali dei gruppi speciali . . .	» 395
B. BARBARITO — Sulle ipotesi a sostegno dei principi di Kirchhoff . . .	» 403
G. MALQUORI — Francesco Giordani . . .	» 406
M. GALGANO — Gioacchino Leo Sera . . .	» 420
P. SCANDONE — Nuove vedute sulla geologia dei dintorni di Lagonegro . . .	» 436
L. MASSIMILLA, G. VOPICELL, D. PORCELLI — Sull'efflusso di solido e liquido da letti di sabbia silicea fluidizzati con acqua . . .	» 445
M. CAPURSO — La trattazione di Jouravski per le sezioni pluriconnesse . . .	» 468
R. SPARACIO — Il « Teorema fondamentale del calcolo a rottura » per carichi ripetuti in sollecitazione composta . . .	» 479
Processi verbali delle tornate accademiche dell'anno 1961 . . .	» 489

*Finito di stampare
nello Stab. Tip. G. Genovese
Pallonetto S. Chiara, 22 - Napoli
il 10 marzo 1962*

Direttore responsabile: Prof. MICHELE FUIANO

Autorizzazione del Tribunale di Napoli B. 648 del dì 29 febbraio 1960

